HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

*Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik*

Radioökologie und Strahlenschutz

Vorlesung FHH: WS 2019/20

Ulrich J. Schrewe

Themen:

Anwendung kernphysikalischer Messverfahren in der industriellen Messtechnik

Eigenschaften ionisierender Strahlung

Strahlungswirkung - Strahlenschutz

Inhaltsverzeichnis

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Zugang zu den Unterlagen

Microsoft Power Point Dateien mit Vorlesungsunterlagen finden Sie als Web-Disk:

https://webdisk.hs-hannover.de

Oder über die Homepage:

http://schrewe.wp.hs-hannover.de

Fragen (jederzeit) auch per E-Mail:

ulrich.schrewe@hs-hannover.de

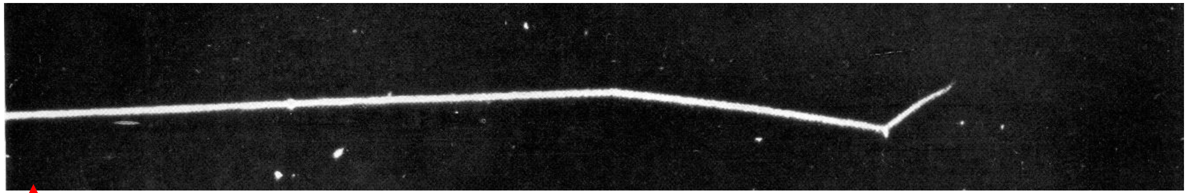
Geladene Teilchenstrahlung

α- Strahlung: zweifach positiv geladene He^{++}-Ionen

β^- oder β^+-Strahlung: geladene Leptonen (leichte Teilchen)

Ionenstrahlung: positiv geladene Ionen H^+, oder andere schwere Ionen

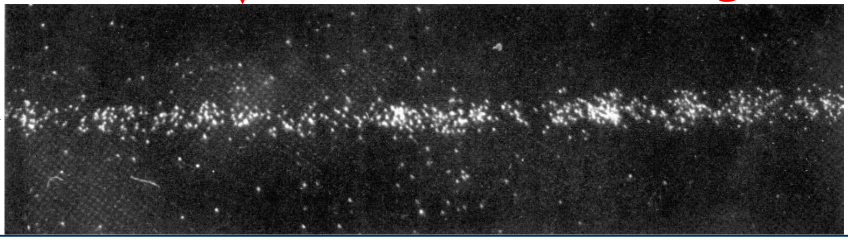
Elektrisch geladenen Teilchen wirken im Vorbeiflug durch eine elektrostatische Fernwirkung auf die Elektronen der Atome entlang ihrer Bahnspur. Die Atome können ionisiert werden.



Bahn eines α-Teilchens

Bahn eines α-Teilchens mit hoher Auflösung

Man erkennt die einzelnen Ionisationen entlang der Bahn.



Quelle: Atlas typischer Nebelkammerbilder, Gentner et al.

Direkt ionisierende Strahlung

Elektrisch geladene Teilchen geben ihre kinetische Energie „quasi-kontinuierlich“ in Form kleiner Energieportionen entlang ihrer Flugbahn in Materie ab. Dies entspricht einem Bremsvorgang. Es tritt dabei eine direkte Ionisierung der Materie entlang der Bahn auf.

Der Energieverlust im Bremsmaterial kann neben der Ionisierung auch zu einer Anregung der Atom führen.

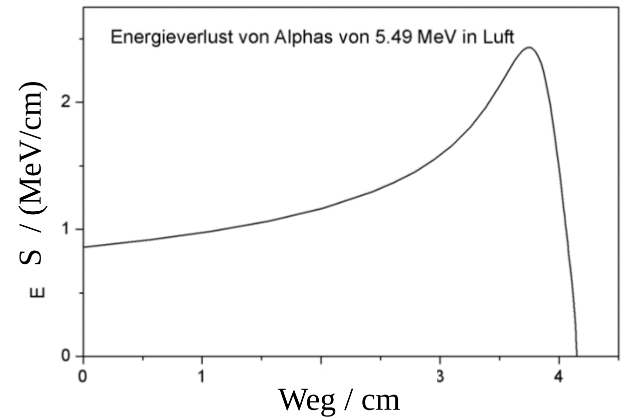
Da die anfängliche kinetische Energie der Teilchen in kleinen Portionen an die Umgebung abgegeben wird, besitzen geladene Teilchen eine maximale Reichweite, die erreicht wird, wenn keine kinetische Energie mehr verfügbar ist.

Die Strahlungswirkung tritt entlang des gesamten Weges auf.

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Lineares Bremsvermögen

Bragg-Kurve für α-Teilchen

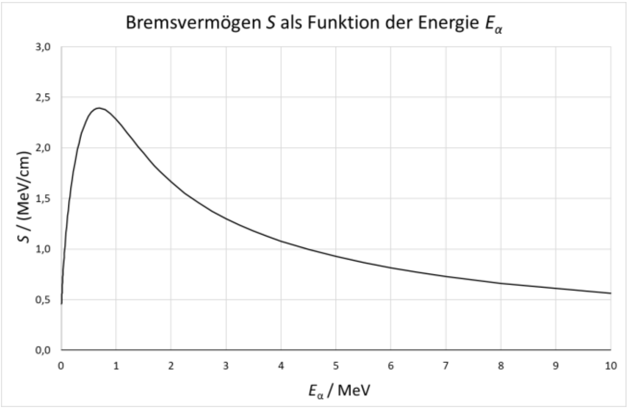


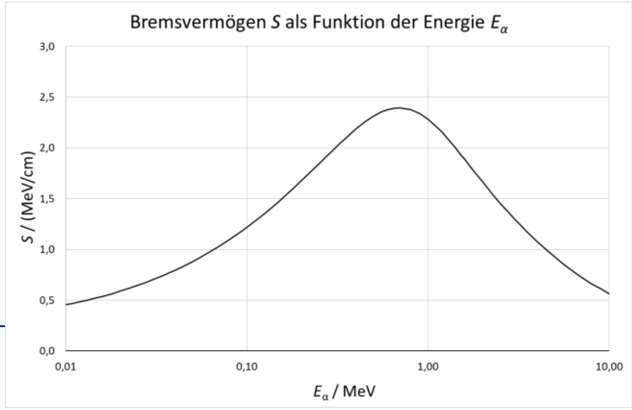
Den Energieverlust pro Weglängen-element nennt man lineares Bremsvermögen.

$$S(E) = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

Bei großer Geschwindigkeit ist das Bremsvermögen geringer als bei kleiner Geschwindigkeit. Kurz vor dem Bahnende erreicht das Bremsvermögen sein Maximum (Bragg-Peak).

Merkregel: Schnelle Teilchen sind weniger wirksam als langsame Teilchen.





HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

*Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik*

Daten zum Bremsvermögen

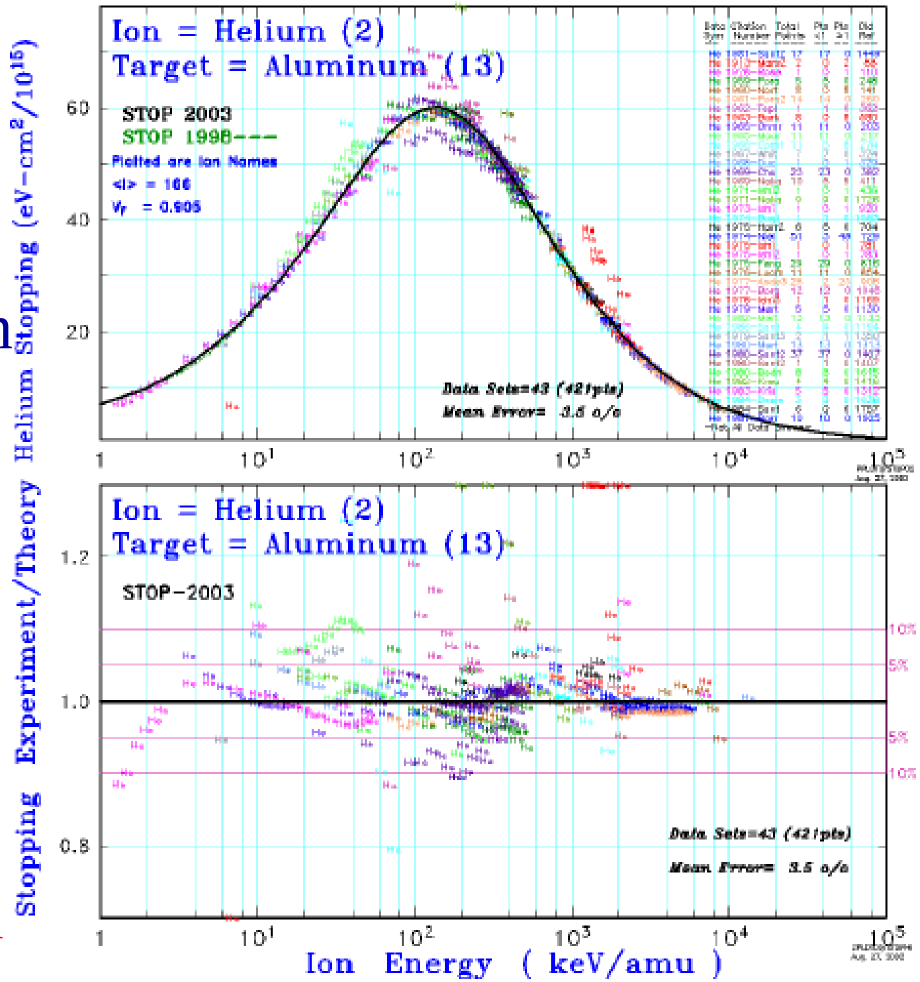
↑ J. F. Ziegler, J. P. Biersack, and U. Littmark, The Stopping and Range of Ions in Matter, volume 1, P

Literatur zur Theorie und umfangreiches Datenmaterial zum Bremsvermögen geladener Teilchen in verschiedenen Materialien findet man bei J. F. Ziegler et. al. *)

*) J. F. Ziegler, J. P. Biersack, and U. Littmark, The Stopping and Range of Ions in Matter, volume 1, Pergamon, New York, 1985

Ein für nicht-kommerzielle Zwecke kostenfreies Programm SRIM wird unter http://www.srim.org/ von Ziegler angeboten.

Beispiel: Bremsvermögen von He Ionen in Al



Quelle: http://www.srim.org/

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

J. F. Ziegler

Programm SRIM

Man kann mit Google nach „SRIM download“ suchen. Eine Installation ist in wenigen Minuten möglich. SRIM ermöglicht Bremsvermögen und Reichweite von Ionen in Materie zu berechnen.

Startseite

Stopping / Range Tables

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

SRIM Output

Geladen Teilchen werden durch die Elektronenhülle und Stöße mit den Kernen gebremst.

$$(S/\rho)_{ges} = (S/\rho)_{elec.} + (S/\rho)_{nucl.}$$

Reichweite:

$$R_{CSDA} = \int_{E_0}^{0} \frac{1}{S(E)} dE$$

Die Projected Range R_p ist auf Grund von Streuungen kleiner als R_{CSDA}.

Helium in Air, Dry (ICRU-104) (gas).txt - Editor

Datei Bearbeiten Format Ansicht ?

```
==================================================================
              SRIM version ---> SRIM-2013.00
              Calc. date   ---> September 26, 2017
==================================================================

Disk File Name = SRIM Outputs\Helium in Air, Dry (ICRU-104) (gas).txt

Ion = Helium [2] , Mass = 4,003 amu

Target Density =  1,2048E-03 /cm3 = 6,7470E+19 atoms/cm3
Target is a GAS
======= Target  Composition ========
   Atom   Atom   Atomic    Mass
   Name   Numb   Percent   Percent
   ----   ----   -------   -------
     C      6    000,02    000,02
     O      8    021,08    023,18
     N      7    078,43    075,51
    Ar     18    000,47    001,29
====================================
Bragg Correction = 0,00%
Stopping Units =  MeV / (mg/cm2)
See bottom of Table for other Stopping units
```

α-Teilchen Luft

Ion Energy	dE/dx Elec.	dE/dx Nuclear	Projected Range	Longitudinal Straggling	Lateral Straggling
10,00 keV	3,172E-01	6,111E-02	132,97 um	54,63 um	47,80 um
11,00 keV	3,327E-01	5,797E-02	145,40 um	57,65 um	51,05 um
12,00 keV	3,475E-01	5,519E-02	157,64 um	60,46 um	54,14 um
13,00 keV	3,617E-01	5,271E-02	169,68 um	63,08 um	57,08 um
14,00 keV	3,753E-01	5,047E-02	181,52 um	65,53 um	59,89 um
15,00 keV	3,885E-01	4,844E-02	193,17 um	67,84 um	62,57 um
16,00 keV	4,012E-01	4,660E-02	204,65 um	70,00 um	65,14 um
17,00 keV	4,136E-01	4,490E-02	215,95 um	72,05 um	67,60 um

Tabelliert wird *S/ρ*

in der Einheit: $\frac{MeV}{mg/cm^2}$

Mögliche Umrechnungen:

$$1\frac{S}{\rho}\cdot\rho = 1\frac{MeV}{mg/cm^2}\cdot 1\frac{g}{cm^3} = 10^{-3}\frac{MeV}{cm}$$

HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

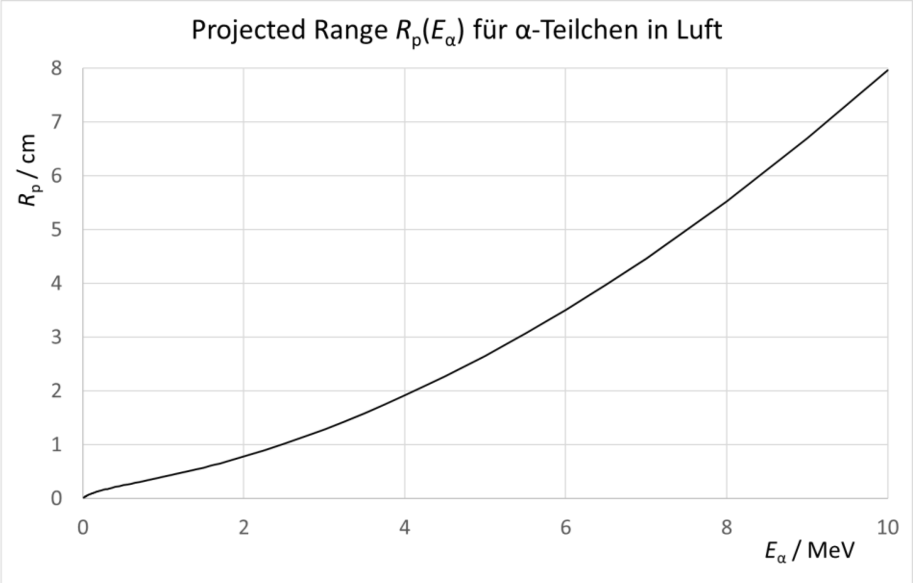
α–Reichweite

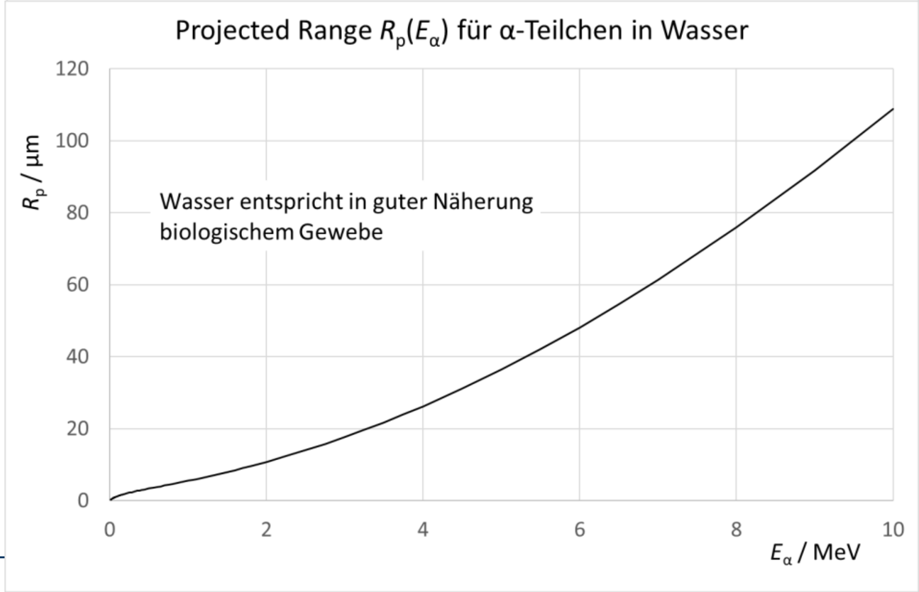
α -Teilchen aus radioaktiven Zerfällen haben feste Energiewerte.

Pro 1 cm Luft werden circa 33 000 Ionenpaare gebildet. ($5{,}3 \cdot 10^{-15}$ C).

Typische Reichweiten
in Luft: 2 cm bis 10 cm,
in Wasser: 20 µm bis 100 µm.

α -Teilchen werden zu He Gas. (Gasdruck kann bei gekapselten α-Quellen ein Problem sein).





HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

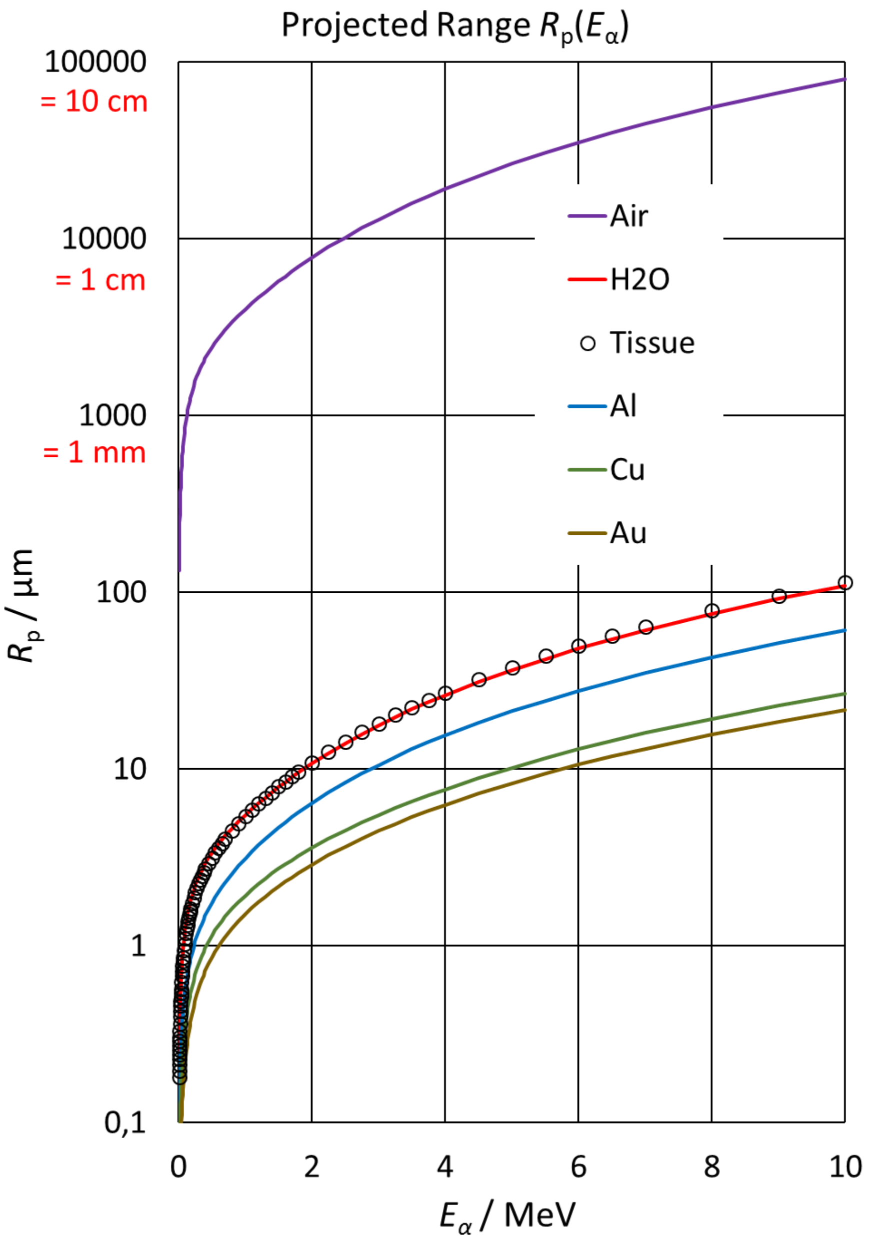
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Vergleich α–Reichweiten

Die Reichweite $R(E)$ ist gleich dem Integral von $1/S(E)$ zwischen Startenergie E_a und Endenergie $E_e = 0$.

$$R(E) = \int_{E_a}^{E_e=0} \frac{1}{S(E)} dE$$

Bei CSDA Rechnungen (continuous slowing down approximation) vernachlässigt man stochastische Effekte.
Realistische Ergebnisse erhält man durch Monte-Carlo-Simulation. Man berücksichtigt Streueffekt und erhält die projected Range R_p.



Monte-Carlo-Simulation

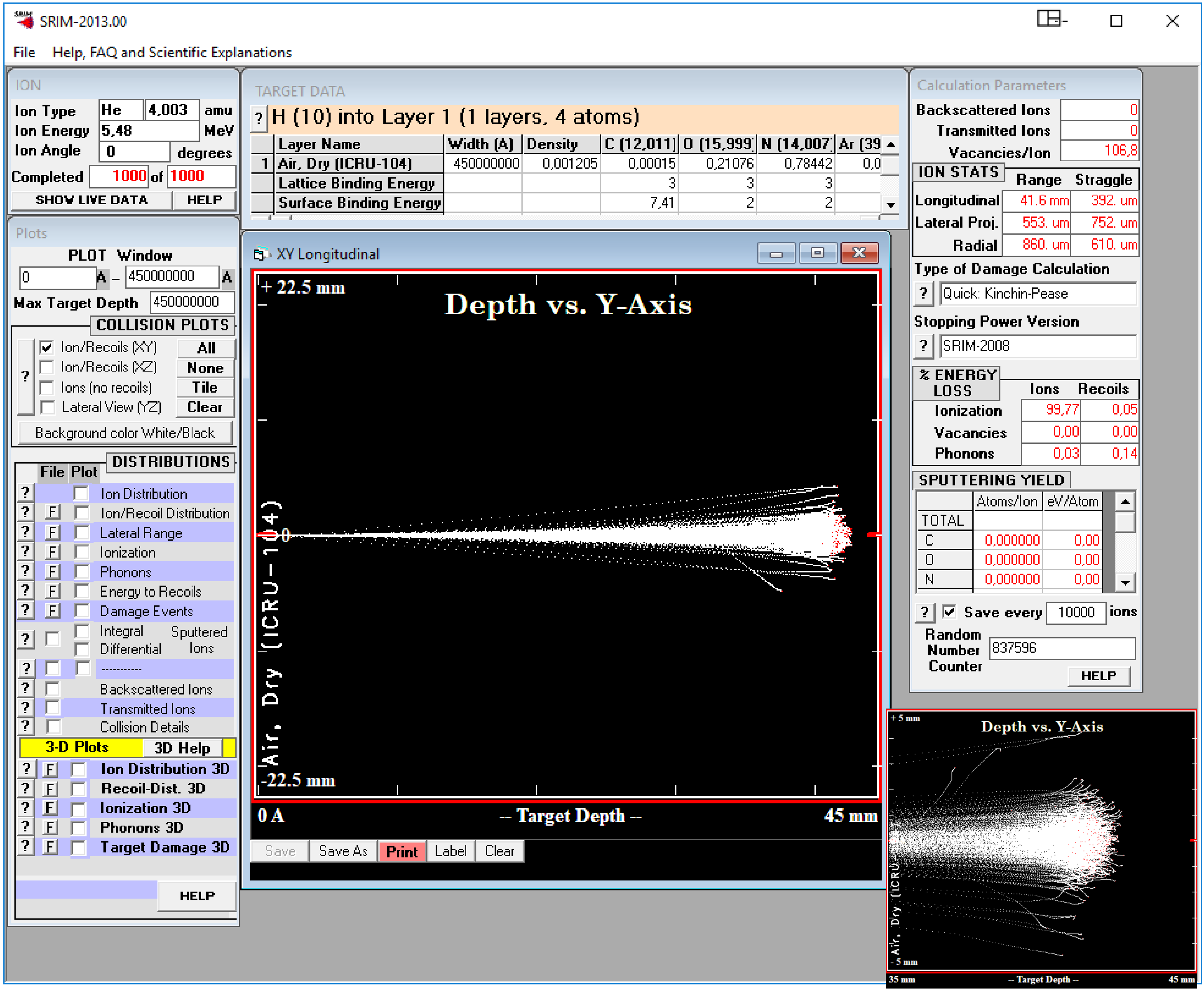
HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Man kann mit Hilfe von TRIM kann man für einzelne Ionen den Bahnverlauf berechnen.

Monte-Carlo- Verfahren.

Man erhält ein realistisches Bild der Wechselwirkung von Ionen mit Materie, insbesondere des Straggeling.



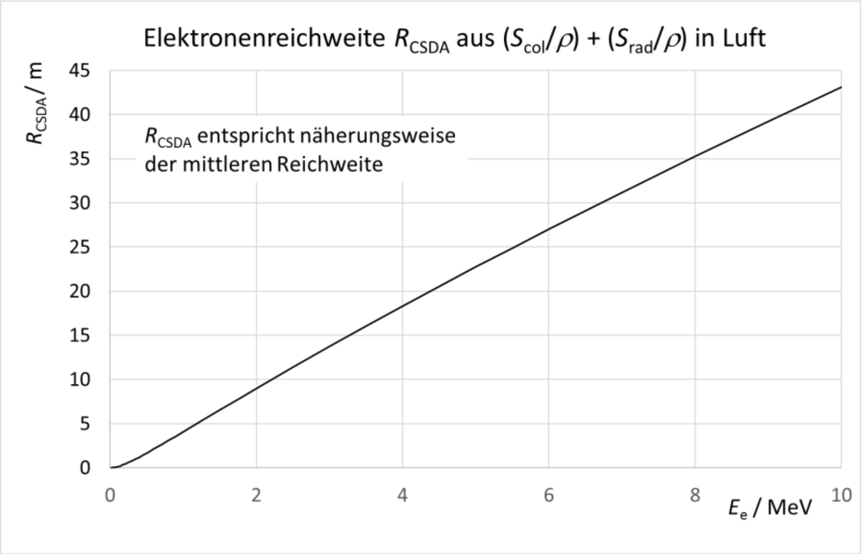
HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

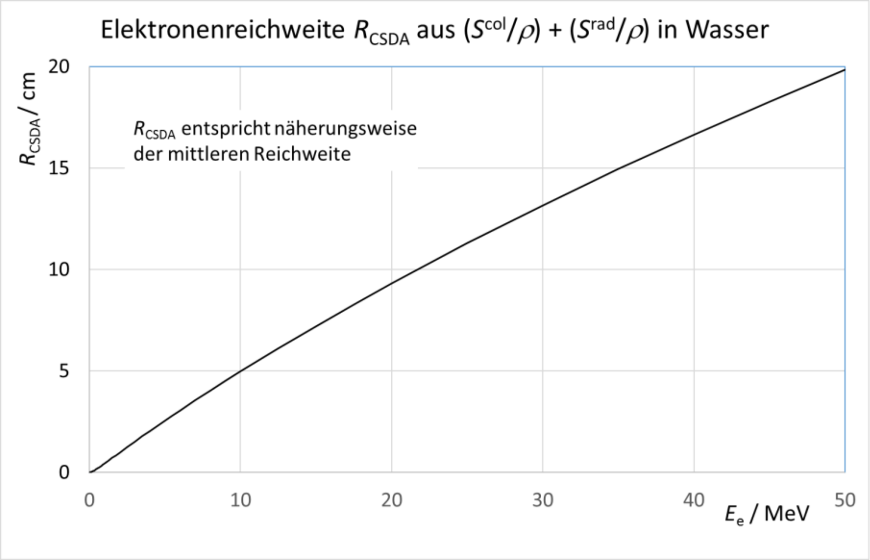
β-Reichweite

β -Teilchen aus radioaktiven Zerfällen besitzen kontinuierliche Energiespektren.

Pro 1 cm Luft werden ca. 300 Ionenpaare gebildet ($4{,}8 \cdot 10^{-17}$ C).
Reichweite für Energien zwischen 1 – 10 MeV
in Luft: 4 m - 45 m,
in Wasser: 0,4 cm - 5 cm.

β^- -Teilchen bleiben Elektronen,
β^+ zerstrahlt zusammen mit e^- in zwei Photonen mit E_γ = 511 keV.





HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Programm ESTAR

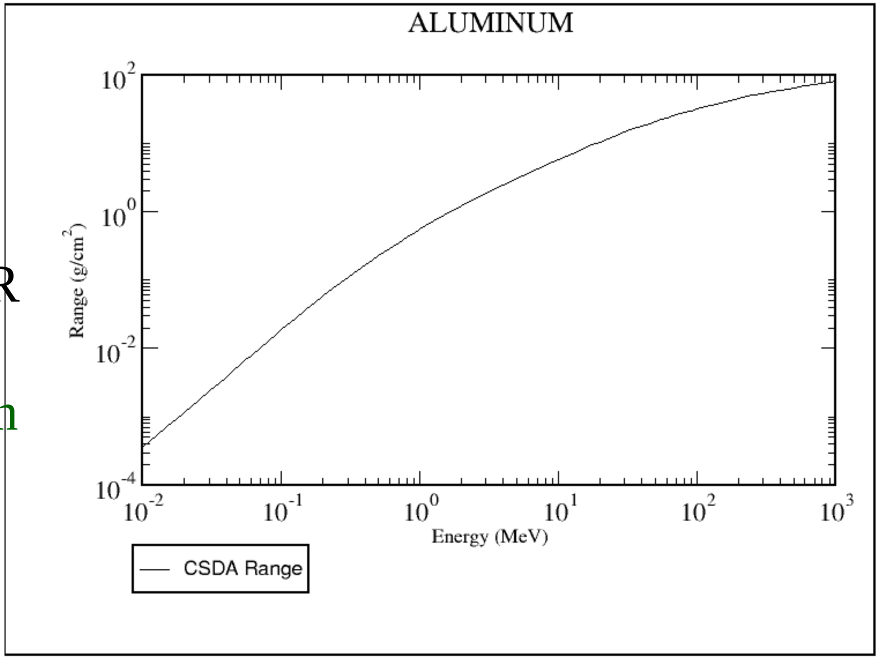
Stopping-Power and Range Tables for Electrons, Protons, and Helium Ions

Quelle:http://www.nist.gov/pml/data/star/index.cfm

M.J. Berger,[1] J.S. Coursey,[2] M.A. Zucker[2] and J. Chang[2]
[1]NIST, Physics Laboratory, Ionizing Radiation Division
[2]NIST, Physics Laboratory, ECSED

Unter http://www.nist.gov/pml/data/star/index.cfm können die Programme ESTAR für Elektronen, PSTAR für Protonen und ASTAR für α-Teilchen verwendet und Tabellen und Diagramm für Stopping Power und Ranges in verschieden Materialien erzeugt werden.

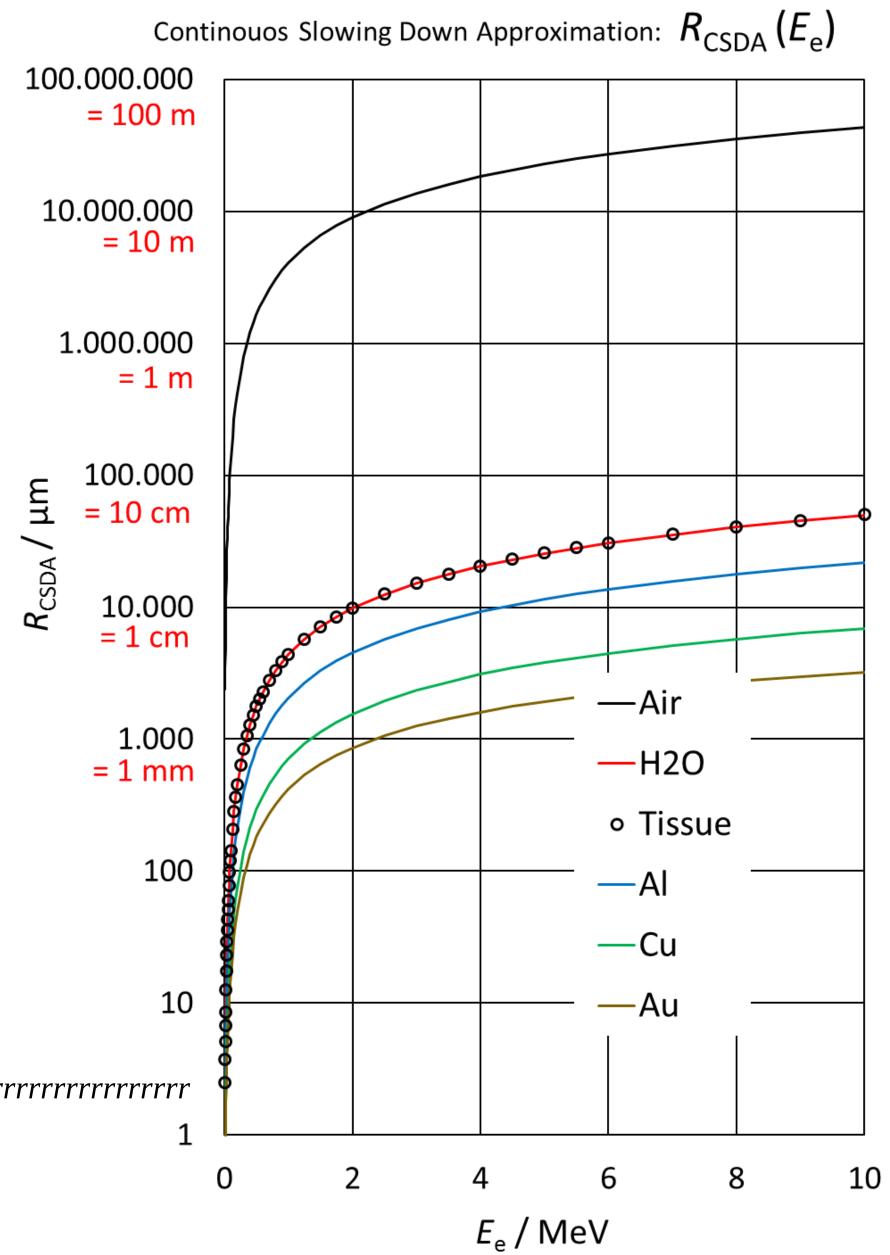
Beispiel hier: Reichweite (CSDA) von Elektronen in Aluminium



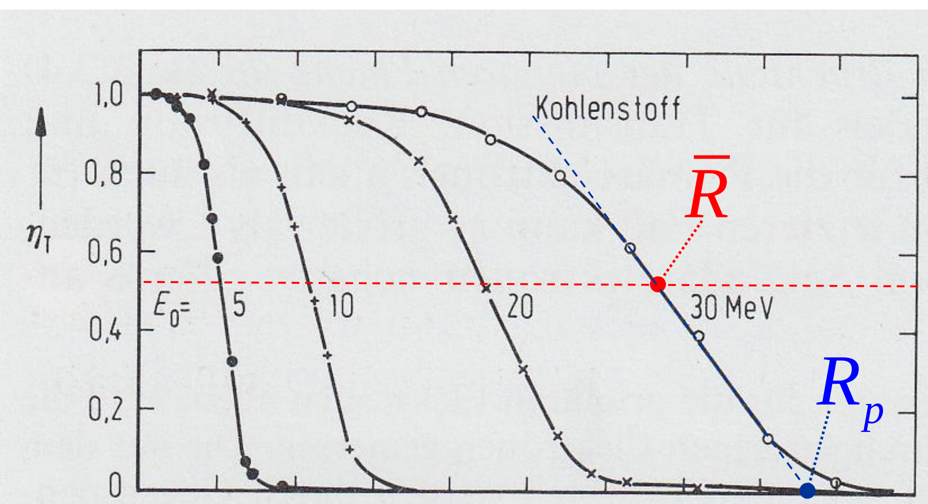
Vergleich β–Reichweite

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Elektronen streuen sehr viel stärker als Ionen. Man verwendet zur Berechnung der Reichweiten das CSDA Modell. Die CSDA – Reichweite entspricht etwa einer mittleren Reichweite $\bar{R}$.



Rrrrrrrrrrrrrrrr



nach Harder und Poschet - 1967

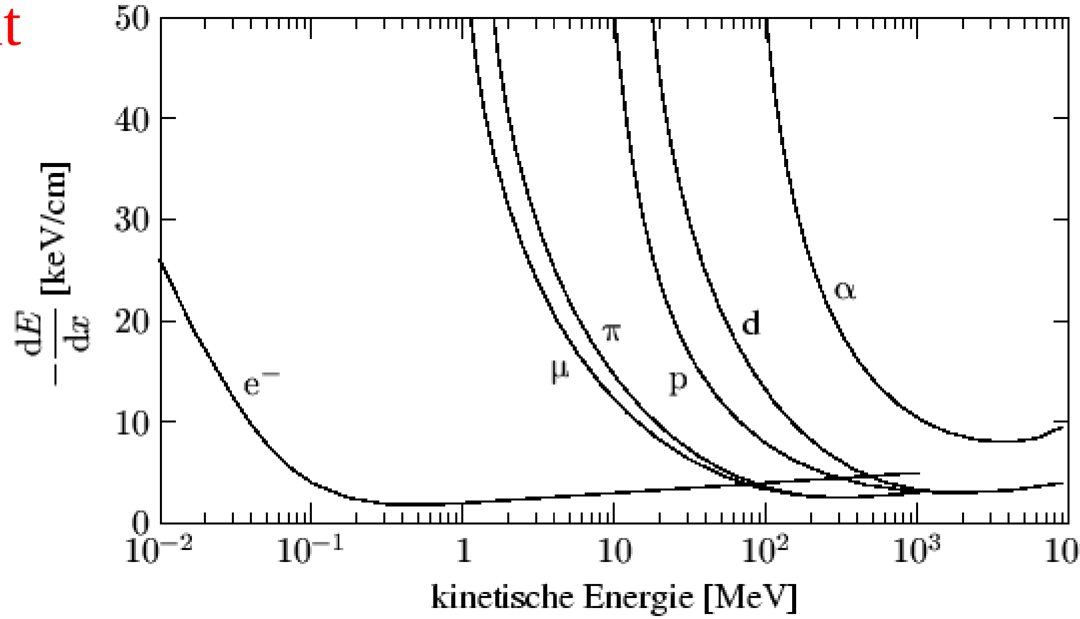
Vergleich geladener Teilchen

Geladene Teilchen, z. B. e^-, $^1H^+$, $^4He^{++}$, unterscheiden sich hinsichtlich Masse und Ladungszustand. Bei kleinen Geschwindigkeiten gilt für das Bremsvermögen näherungsweise:

$$S(E) = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim \frac{1}{v^2}$$

Je langsamer das Teilchen, umso größer die Ionisierung und damit die Wirkung.

Bei größeren Geschwindigkeiten treten relativistische Effekte auf, die bewirken, dass das Bremsvermögen wieder zunimmt. Auch bei kleineren Geschwindigkeiten ist die $1/v^2$-Abhängigkeit nur eine Näherung.



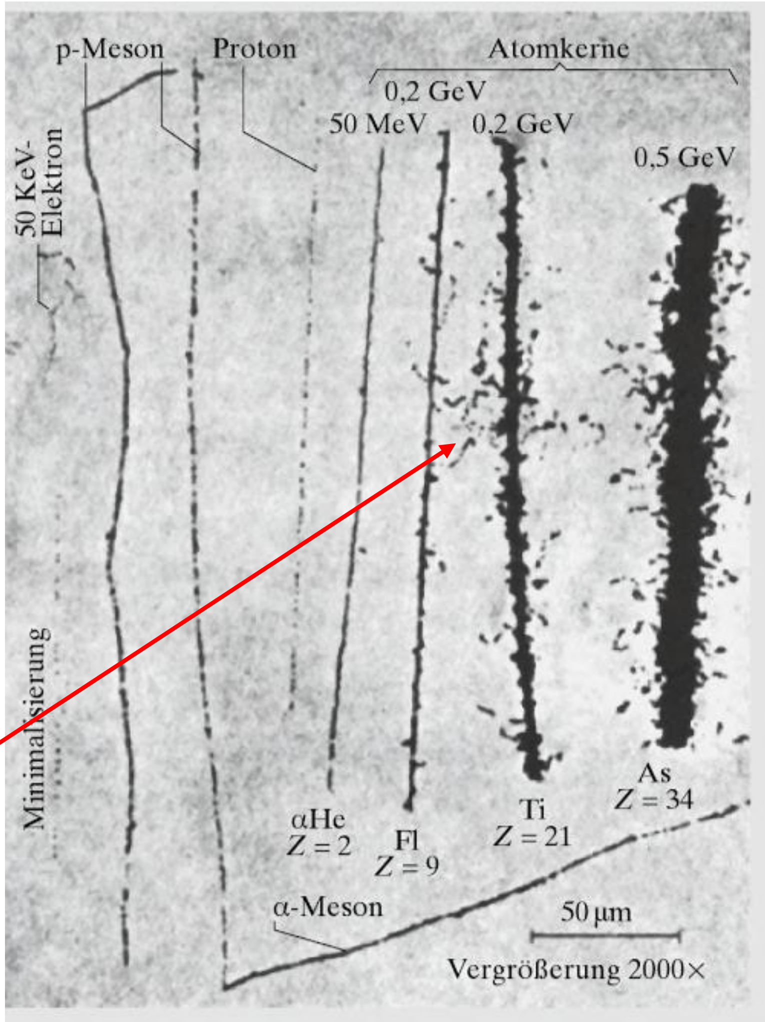
Vergleich der Bahnspuren

Geladene Teilchen wie e^-, e^+, $^1H^+$, $^4He^{++}$ sowie schwere Ionen besitzen große Unterschiede in Masse und Ladung. Das Bremsvermögen kann daher sehr verschieden sein.

Das lineare Bremsvermögen entspricht einer Ionisierungsdichte (Zahl der Ionen pro Weglängeneinheit). Leichte Teilchen zeigen geringe, schwere Teilchen starke Ionisierungsdichten.

Als δ-Elektronen bezeichnet man Elektronen mit großer Energie entlang der Bahn.

δ-Elektronen transportieren von der eigentlichen Bahnspur weg und finden daher in der Strahlenbiologie Beachtung.



Quelle: Vogel, H.: Gerthsen Physik, Springer Verlag, 1997; aus Finkelnburg, W.: Einführung in die Atomphysik.

Ungeladene Teilchenstrahlung

γ- Strahlung: Elektromagnetische Wellenstrahlung aus dem Atomkern stammend. Wegen der große Energie besitzt sie Teilchencharakter – Photonen genannt.

Röntgenstrahlung: Elektromagnetische Wellenstrahlung aus der Atomhülle. Große Ähnlichkeit mit γ-Strahlung.

n-Strahlung: Neutronenstrahlung - hat keine Wechselwirkung mit Hüllenelektronen, nur mit Atomkernen.

ν-Strahlung: Neutrino-Strahlung - neutrale Leptonen, machen (praktisch) überhaupt keine Wechselwirkung.

Neutrale Teilchen können ohne Wechselwirkung in Materie eindringen und oft sogar durchdringen. Falls eine Wechselwirkung erfolgt, wird meist Energie in großen Portionen übertragen (Stoßprozesse).

Als Folge der Wechselwirkung können geladene Teilchen entstehen.

Indirekt ionisierende Strahlung

Die Wechselwirkung der indirekt ionisierenden Strahlung (Röntgen-, γ- und Neutronenstrahlung) ist ein stochastischer Vorgang ähnlich wie der radioaktive Zerfall.

Streng genommen ist auch die Wechselwirkung geladener Teilchen ein stochastischer Vorgang, aber die Zahl der Wechselwirkungen ist so groß, dass eine CSDA-Näherung verwendet wird. (CSDA - continuous slowing down approximation).

Die möglichen Wechselwirkungen der indirekt ionisierenden Strahlung besitzen bestimmte Wahrscheinlichkeiten. Einzelne Wechselwirkungen können nicht vorhergesagt werden.

Die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Wechselwirkungen werden durch ihre „Wirkungsquerschnitte" ausgedrückt.

Der statistische Charakter der Wechselwirkung führt zu einem exponentiellem Schwächungsgesetz.

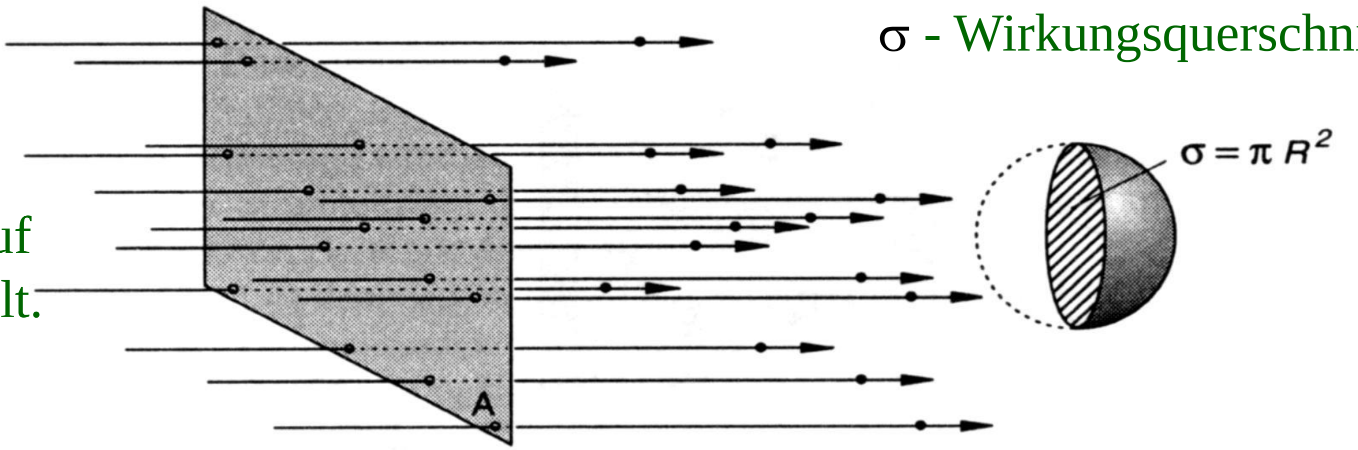
Wirkungsquerschnitt

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Carl Ramsauer
1879 - 1955

Der Begriff wurde im Zusammenhang mit der Entdeckung des Ramsauer-Effekts erstmals verwendet.

Treffen kleine Projektile mit Radius r, die mit der Zahl N_P pro Fläche A ausgesandt werden, auf Ziele (Kugeln) mit Radius R, so führen alle Projektile, die innerhalb der Fläche $\pi \cdot (r + R)^2$ liegen, zu einem Treffer. Falls $r \ll R$ ist $\sigma = \pi \cdot R^2$. Die Trefferfläche σ wird Wirkungsquerschnitt genannt.



σ - Wirkungsquerschnitt

N_P - Zahl der Projektile die auf die Fläche A fällt.

Einheit des Wirkungsquerschnitts

Die SI-Einheit einer Fläche ist 1 m^2. Wirkungsquerschnitte (WQ) von atomaren und nuklearen Prozessen sind sehr viel kleiner als 1 m^2.
Aus praktischen Gründen verwendet man die Einheit 1 *b* = 1 Barn:

$$1\,b = 10^{-24}\,cm^2 = 10^{-28}\,m^2$$

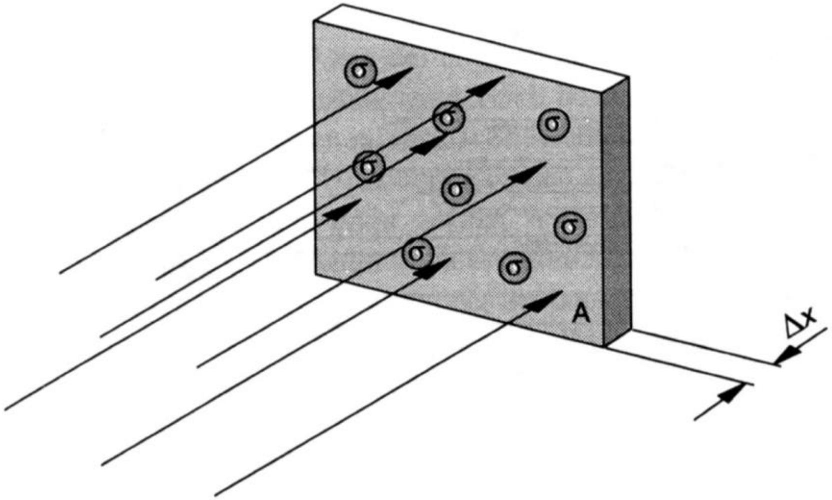
(Die Einheit leitet sich vom engl. Begriff barn – Scheune ab, wobei die Redewendung, dass ein bestimmter Wirkungsquerschnitt „*as big as a barn*" (frei übersetzt) „*groß wie ein Scheunentor*" sei, Hintergrund dieser ungewöhnlichen Namensgebung gewesen sein soll.)

Zur Orientierung: Atomare und nukleare Wirkungsquerschnitt sind oft von vergleichbarer Größe wie die Querschnittsflächen der betreffenden Objekte.

Radius der Atome: ~ 0,1 nm – atomare WQ: ~ 10^{-20} m^2
Radius der Atomkerne: (1 – 10) fm – nukleare WQ: ~ 10^{-28} m^2

Trefferstatistik in dünnen Schichten

Ein Schütze schießt mit N_p Projektilen auf eine Fläche A, die mit N_T Zielen der Querschnittsfläche σ besetzt ist. Wie viele Treffer N_R erzielt er?



N_R = Zahl der Treffer

N_T = Zahl der Ziele

σ = Querschnittsfläche des Einzelzieles

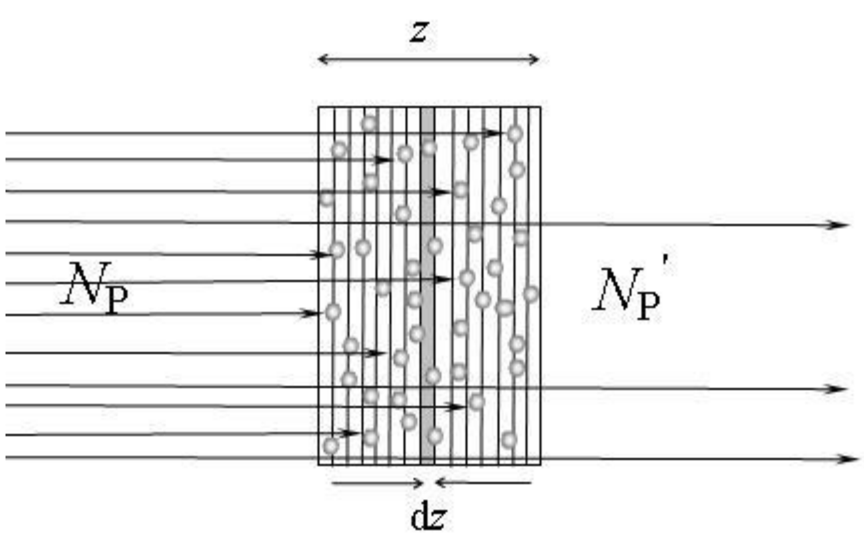
N_p/A = Zahl der Projektile pro Fläche A

$$N_R = N_T \cdot \sigma \cdot \frac{N_P}{A}$$

Die Beziehung gilt nur für dünne Schichten mit $N_T \cdot \sigma \ll A$, da sonst „Verdeckung" auftritt.

Schwächung in dicken Schichten

In dicken Schichten ist $N_T \cdot \sigma >> A$. Daher können Ziele am Ende der Schicht durch Zielen im vorderen Teil verdeckt werden. Deshalb zerlegt man die dicke Schicht z in zahlreiche "dünne Schichten" der Dicke dz und wendet dann ein Integrationsverfahren an.



N_P = Zahl der Projektile vor der Schicht

N_P' = Zahl der Projektile hinter der Schicht

z = Gesamtdicke

dz = Dicke der "dünnen Schicht"

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Zahl der Reaktion in der Schicht dz

In der "dünnen Schicht" dz finden $\mathrm{d}N_\mathrm{R}$ Reaktionen statt. Es gilt:

$$\mathrm{d}N_R = \mathrm{d}N_T \cdot \sigma \cdot \frac{N_P}{A} \qquad (1)$$

wobei $\mathrm{d}N_\mathrm{T}$ die Zahl der Targetatome in der Schicht dz bezeichnet. Bezeichnet man mit n_T die Zahl der Targetatome pro Volumen, so gilt für $\mathrm{d}N_\mathrm{T}$:

$$\mathrm{d}N_T = n_T \cdot A \cdot dz \qquad (2)$$

Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (1) ergibt:

$$\mathrm{d}N_R = n_T \cdot A \cdot \sigma \cdot \frac{N_P}{A} \cdot \mathrm{d}z \qquad (3)$$

Projektile, die in der Schicht dz ein Ziel getroffen haben, sind danach nicht mehr verfügbar. Deshalb gilt: $\mathrm{d}N_R = -\mathrm{d}N_P \qquad (4)$

Integration

Einsetzten von Gl. (4) in (3) ergibt die Abnahme der Projektilanzahl in der Schichtdicke dz gilt:

$$\mathrm{d}N_p = -n_T \cdot \sigma \cdot N_P \cdot \mathrm{d}z$$

Durch Integration über alle dünnen Schichten dz ergibt sich die Abnahme der Projektile in der Schicht der Dicke *z*:

$$\int_{N_{P,0}}^{N_P(z)} \frac{\mathrm{d}N'_p}{N'_P} = -n_T \cdot \sigma \cdot \int_0^z dz'$$

Lösung:

$$\boxed{N_P(z) = N_{P,0} \cdot e^{-n_T \cdot \sigma \cdot z}}$$

Schwächungs-gesetz

$N_p(z)$ ist die Zahl der Teilchen hinter der Schichtdicke *z*. $N_{p,0}$ ist die Teilchenzahl für $z = 0$.

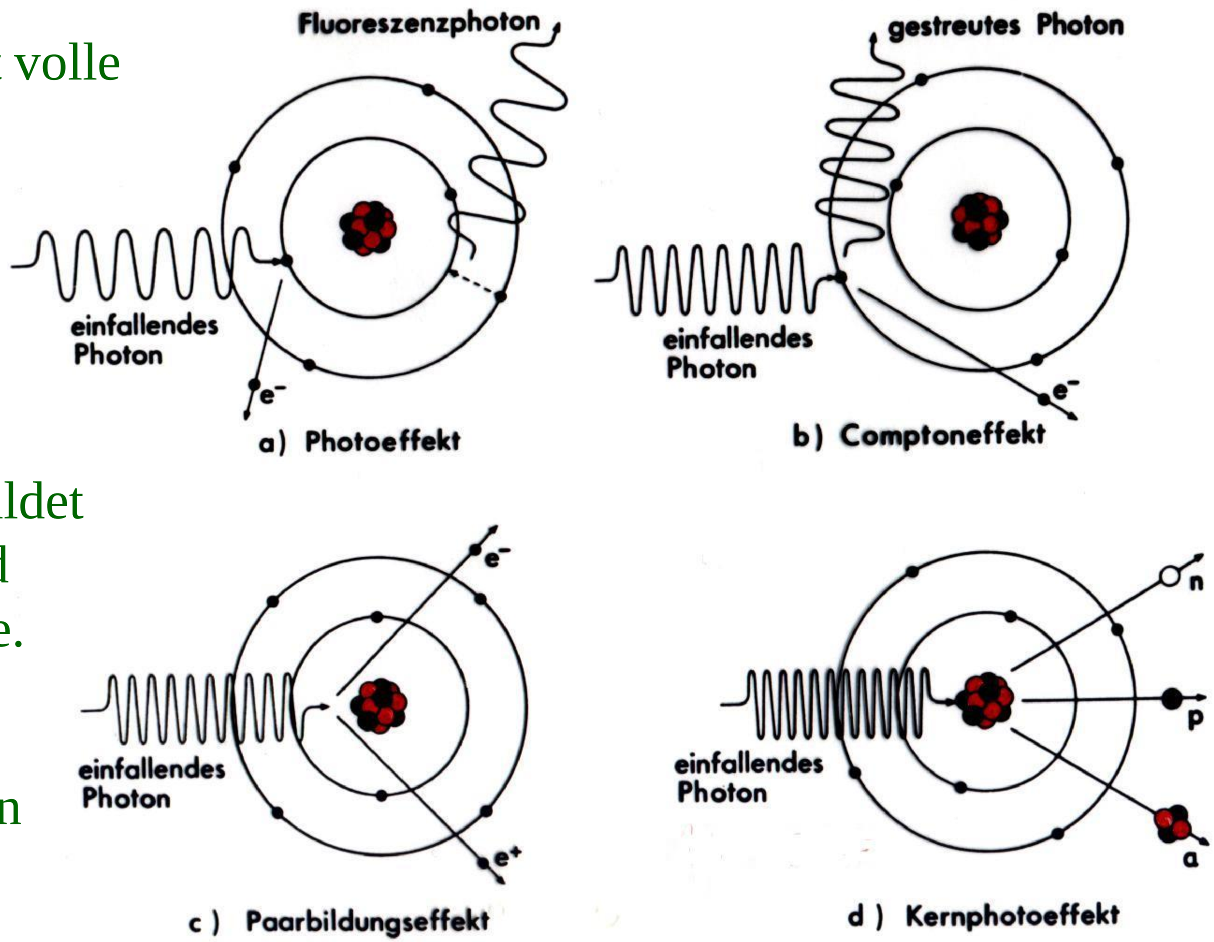
Wechselwirkungen von Photonen

Photoeffekt: Photon überträgt volle Energie auf ein (inneres) Hüllenelektron.

Comptoneffekt: Photon überträgt Teilenergie auf ein (äußeres) Hüllenelektron.

Paarbildungseffekt: Photon bildet im Kernfeld ein Paar e^+/e^- und überträgt diesen seine Energie.

Kernphotoeffekt: Photon überträgt seine Energie auf ein oder mehrere Kernbausteine.



HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Wechselwirkungs-Eigenschaften

Die verschiedenen Effekte tragen je nach Energie der Photonenstrahlung unterschiedlich zur Schwächung bei:

Photoeffekt: Wirkt besonders stark bei kleinen Energien, insbesondere im Energiebereich 10 keV < E_{Photon} < 100 keV. Er tritt bei sehr schweren Elementen bis zu einer Photonenenergie von 1 MeV auf.

Comptoneffekt: Zeigt nur eine geringe Energieabhängigkeit. Er ist bei Energien von ca. 100 keV maximal.

Paarbildung: Für Photonenenergie E_{photon} < 1022 keV ist Paarbildung unmöglich. Bei hohen Energien wird die Paarbildung zur dominierenden Wechselwirkung.

Kernphotoeffekt: Nur bei hohen Energien (> 4 MeV) relevant.

HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Additivität der Wirkungsquerschnitte

Photoeffekt, Comptoneffekt, Paarbildung und Kernphotoeffekt (plus weitere) besitzen unabhängige, jeweils energieabhängige Wirkungs-querschnitte.

Wirkungsquerschnitte (WQ) sind additiv:

$$\sigma_{ges} = \sigma_{Photo} + \sigma_{Compton} + \sigma_{Paarbildung} + \ldots.$$

Empfohlene Datenquelle:
NIST - National Institute for Standards and Technology, USA
XCOM: Photon Cross Section Database
http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html

Additivität der WQ bedeutet, dass die verschiedenen Effekte unabhängig voneinander jeweils bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit haben und gemeinsam zur Gesamtwechselwirkung der Photonenstrahlung mit Materie beitragen.

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Schwächungsgesetz

Man schreibt das Schwächungsgesetz in verschiedenen Varianten und definiert auf diese Weise zwei neue Größen (μ und μ/ρ) zur Beschreibung der Photonenwechselwirkung.

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-n_T \cdot \sigma_{ges} \cdot z} = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot z} = I_0 \cdot e^{-(\mu/\rho) \cdot \rho \cdot z}$$

$I(z)$ = Strahlungsintensität hinter der Schicht der Dicke z, übliche Einheit: 1 s^{-1}
I_0 = Strahlungsintensität vor der Schicht der Dicke z, übliche Einheit: 1 s^{-1}
μ = Schwächungskoeffizient, übliche Einheit: 1 cm^{-1}
n_T = Zahl der Atome pro Volumeneinheit, übliche Einheit: 1 cm^{-3}
σ_{ges} = Gesamtwirkungsquerschnitt, übliche Einheit: $1 \cdot 10^{-24}$ cm^2
μ/ρ = Massenschwächungskoeffizient, übliche Einheit: 1 $cm^2 \cdot g^{-1}$
ρ = Massendichte, übliche Einheit: 1 $g \cdot cm^{-3}$
z = Schichtdicke, übliche Einheit: 1 cm

HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Umformung von Größen

Dichte ρ kann als Masse m pro Volumen V oder als molare Masse M geteilt durch das molare Volumen V_m ausgedrückt werden.

Das Molvolumen V_m ist das Produkt aus Teilchenvolumen V_M multipliziert mit der Avogadro-Zahl N_A:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{M}{V_M \cdot N_A}$$

Es folgt für das Teilchenvolumen V_M:

$$V_M = \frac{M}{\rho \cdot N_A}$$

Die Zahl der Atome pro Volumeneinheit n_T ist der Kehrwert des Teilchenvolumens V_M. Es folgt:

$$n_T = \frac{1}{V_M} = \frac{N_A \cdot \rho}{M}$$

Umformung von Größen

Der Schwächungskoeffizienten μ kann in folgender Form dargestellt werden.

$$\mu = n_T \cdot \sigma_{ges} = \frac{N_A \cdot \rho}{M} \cdot \sigma_{ges}$$

Folgerung: Der Wirkungsquerschnitt σ_{ges} ist proportional zum Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ.

$$\sigma_{ges} = \frac{M}{N_A} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho} \right)$$

Die Zahl der Atome pro Masseneinheit $n_{\square}$ ist gleich Zahl der Atome pro Volumen n_{T} geteilt durch die Dichte ρ. $n_{\square}$ kann auch als Quotient der Avogadro-Zahl N_{A} und der Molmasse M_{mol} ausgedrückt werden:

$$n_{\square} = \frac{n_T}{\rho} = \frac{N_A}{M}$$

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Umformung von Größen

Aus den Gleichungen $\sigma_{ges} = \frac{M}{N_A} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ und $n_{\square} = \frac{n_T}{\rho} = \frac{N_A}{M}$

folgt: $$\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A}{M} \cdot \sigma_{ges} = n_{\square} \cdot \sigma$$

μ/ρ entspricht dem Produkt aus Wirkungsquerschnitt σ_{ges} und der Anzahl der Atome pro Masseneinheit $n_{\square}$.

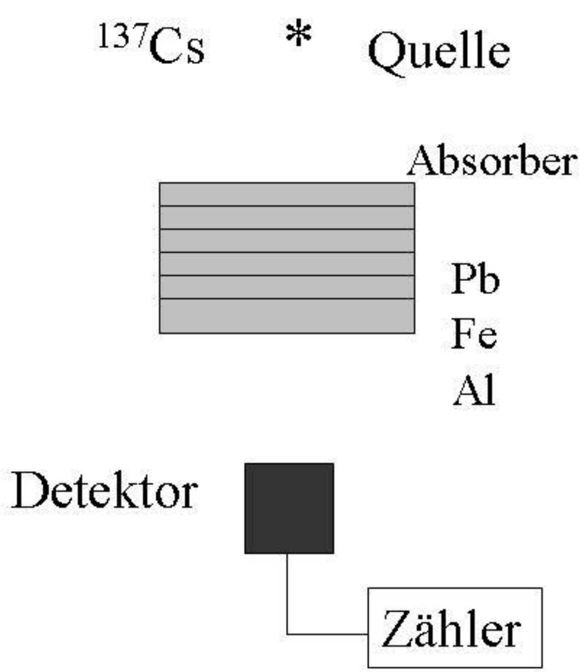
Beim radioaktiven Zerfallsgesetz gilt für die Zerfalls-konstante λ und die Halbwertszeit $T_{1/2}$ die Verknüpfung: $$T_{1/2} = \ln 2/\lambda$$

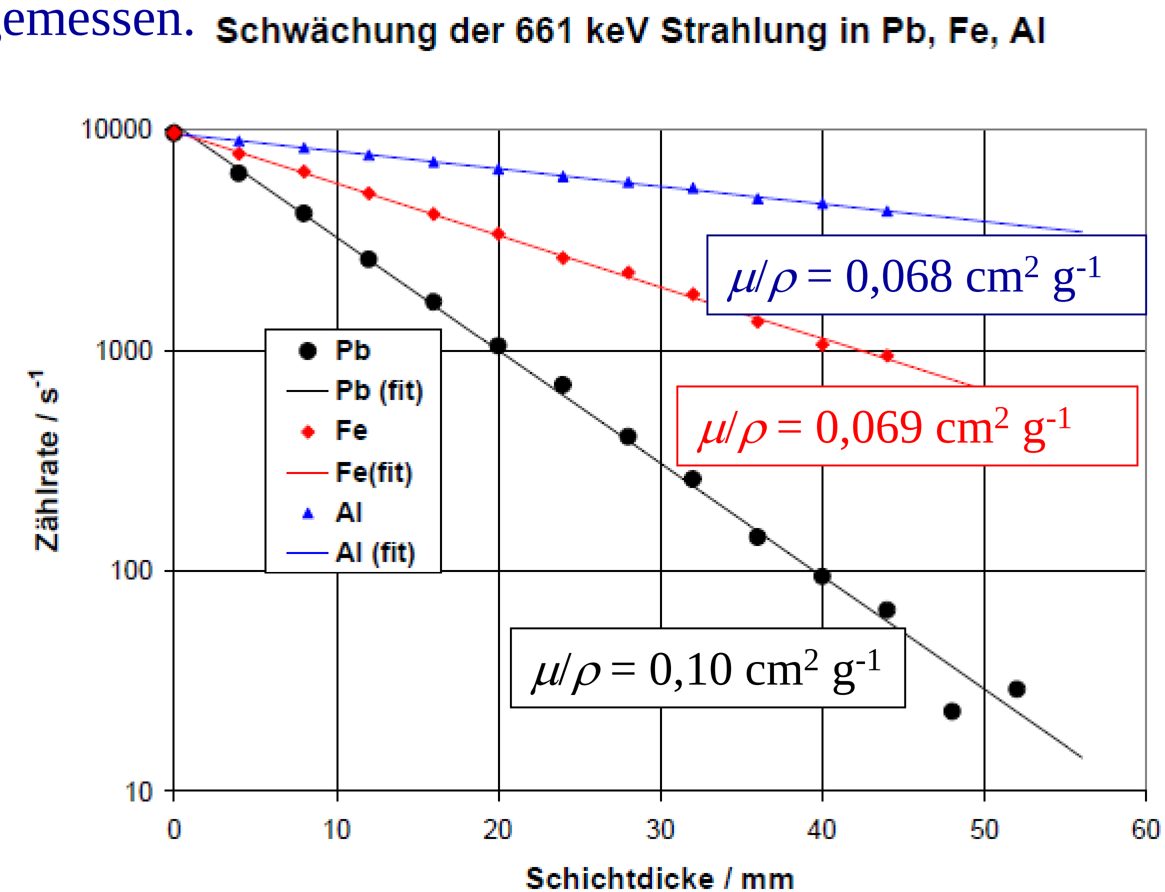
Beim Schwächungsgesetz kann man analog eine Halb-wertsdicke $d_{1/2}$ definieren: $$d_{1/2} = \ln 2/\mu$$

HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Experiment zur Strahlungsschwächung

Eine ^{137}Cs-Quelle sendet γ-Strahlung der Energie 661 keV aus. Die Strahlung wird durch jeweils 4 mm dicke Platten aus Pb, Fe und Al geschwächt. Hinter den Platten wird die Strahlungsintensität gemessen.





Bestimmung des Wirkungsquerschnitts

Das Diagramm zeigt für $\ln(I/I_0)$ den erwarteten linearen Verlauf als Funktion der Absorberdicke x. Die Steigung entspricht dem Schwächungskoeffizienten μ.
Im Diagramm wurde der Massenschwächungskoeffizient μ/ρ angegeben.
(Das sind die Steigungswerte μ geteilt durch die Dichte ρ)

Beispiel für Blei: $$\frac{\mu}{\rho} = 0{,}1\, cm^2\, g^{-1}$$

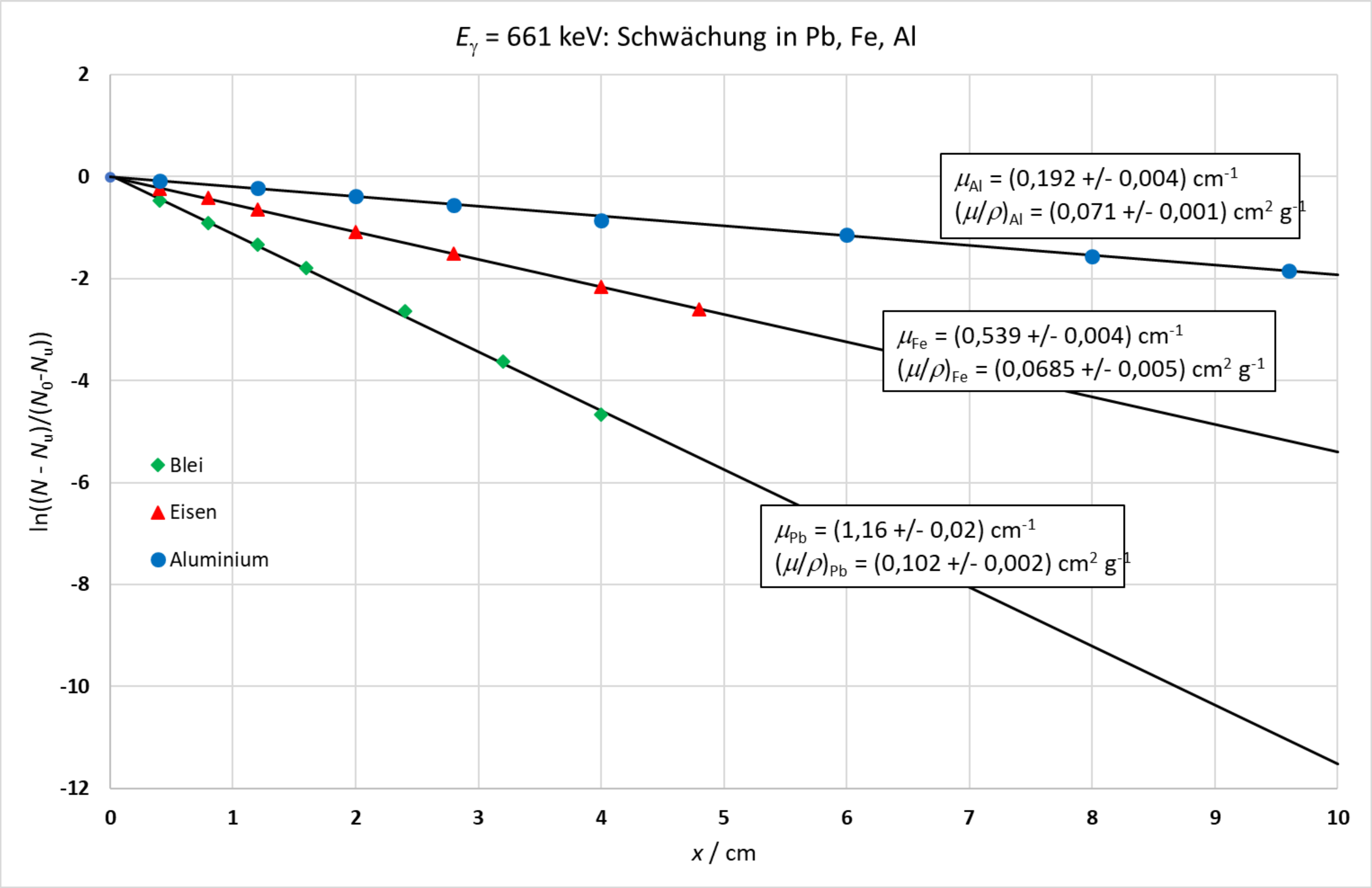
Wirkungsquerschnitt für Pb:

$$\sigma_{ges} = \frac{M}{N_A} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right) = \frac{207{,}2\, g \cdot mol^{-1}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}} \cdot 0{,}1 \frac{cm^2}{g} = 34 \cdot 10^{-24}\, cm^2$$

Ein Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 34\ 10^{-24}\ cm^2 = 34\ b$ entspricht geometrisch einem Kreis mit Radius von $3{,}3 \cdot 10^{-12}$ cm $= 33 \cdot 10^{-15}$ m = 33 fm.

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II

Auswertung der Messung vom 17.04.2019



HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Auswertung der Messung vom 17.04.2019

	Aluminium	**Eisen**	**Blei**
Messung Schwächungskoeffizient: μ / cm^{-1}	0,192 +/- 0,004	0,539 +/- 0,004	1,16 +/- 0,02
Massenschwächungskoeffizient: (μ/ρ) / $cm^2\ g^{-1}$	0,071 +/- 0,001	0,0685 +/- 0,005	0,102 +/- 0,002
Massenschwächungskoeffiezient NIST	0,0705	0,0735	0,111
Abweichung von Theorie und Experiment	5%	7%	9%
Dichte: ρ / g cm^{-3}	2,699	7,874	11,35
Molare Masse: M / g mol^{-1}	26,982	55,845	207,20
Zahl Targetatome pro Volumen: n_T / cm^{-3}	6,02E+22	8,49E+22	3,30E+22
Wirkungsquerschnitt: σ / b	3,18	6,35	35,09

Bragg Kleemann Regel

Der Massenschwächungskoeffizient μ/ρ ist gleich dem Produkt aus Wirkungsquerschnitt σ_{ges} und Zahl der Atome pro Masseneinheit $n_{\square}$.

Besteht ein Material aus i unterschiedlichen Atomsorten (i = 1,2,3...n), deren relativer Massenanteil c_{i} ist, so gilt:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{mittel} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_i$$

Bragg-Kleemann-Regel

mit: $c_i = \dfrac{n_{\square,i}}{n_{\square}}$ und: $n_{\square} = \sum_{i=1}^{n} n_{\square,i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot n_{\square} = n_{\square} \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i$

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
*Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik*

Beispielrechnung für c_i

Wasser: H_20; die relativen Massenanteile c_i sind:

H:
$$c_H = \frac{2 \cdot 1,00794}{2 \cdot 1,00794 + 1 \cdot 15.994} = 0,111898$$

O:
$$c_O = \frac{1 \cdot 15,9994}{2 \cdot 1,00794 + 1 \cdot 15.994} = 0,888102$$

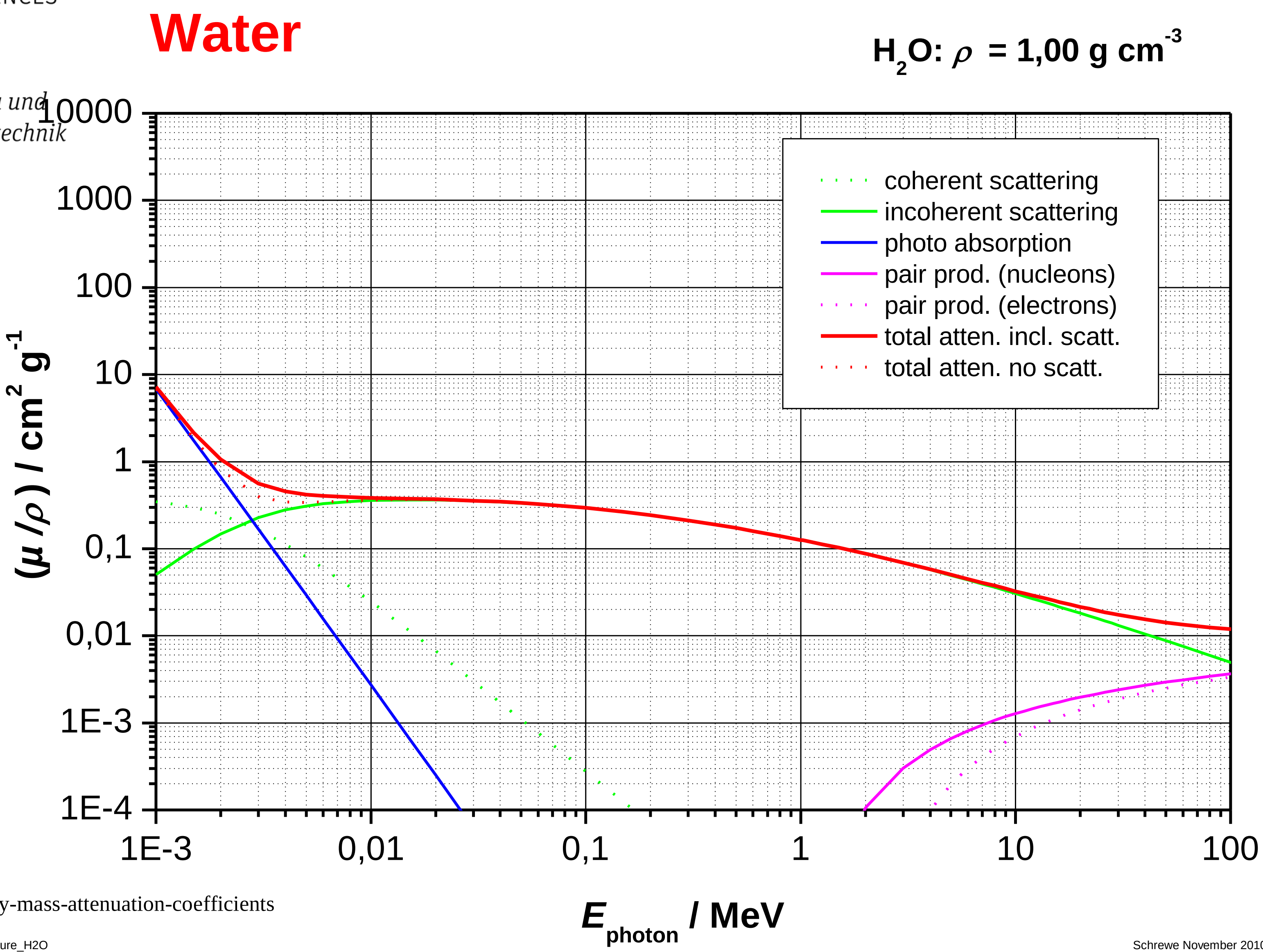
Bariumsulfat: $BaSO_4$

Ba:
$$c_{Ba} = \frac{1 \cdot 137,327}{137,327 + 32,066 + 4 \cdot 15.994} = 0,5884$$

S:
$$c_S = \frac{1 \cdot 32,066}{137,327 + 32,066 + 4 \cdot 15.994} = 0,1374$$

O:
$$c_O = \frac{4 \cdot 15,9994}{137,327 + 32,066 + 4 \cdot 15.994} = 0,2742$$

μ/ρ- Daten



Wasser hat sehr ähnliche Schwäch-ungs-eigenschaften wie biologisches Gewebe.

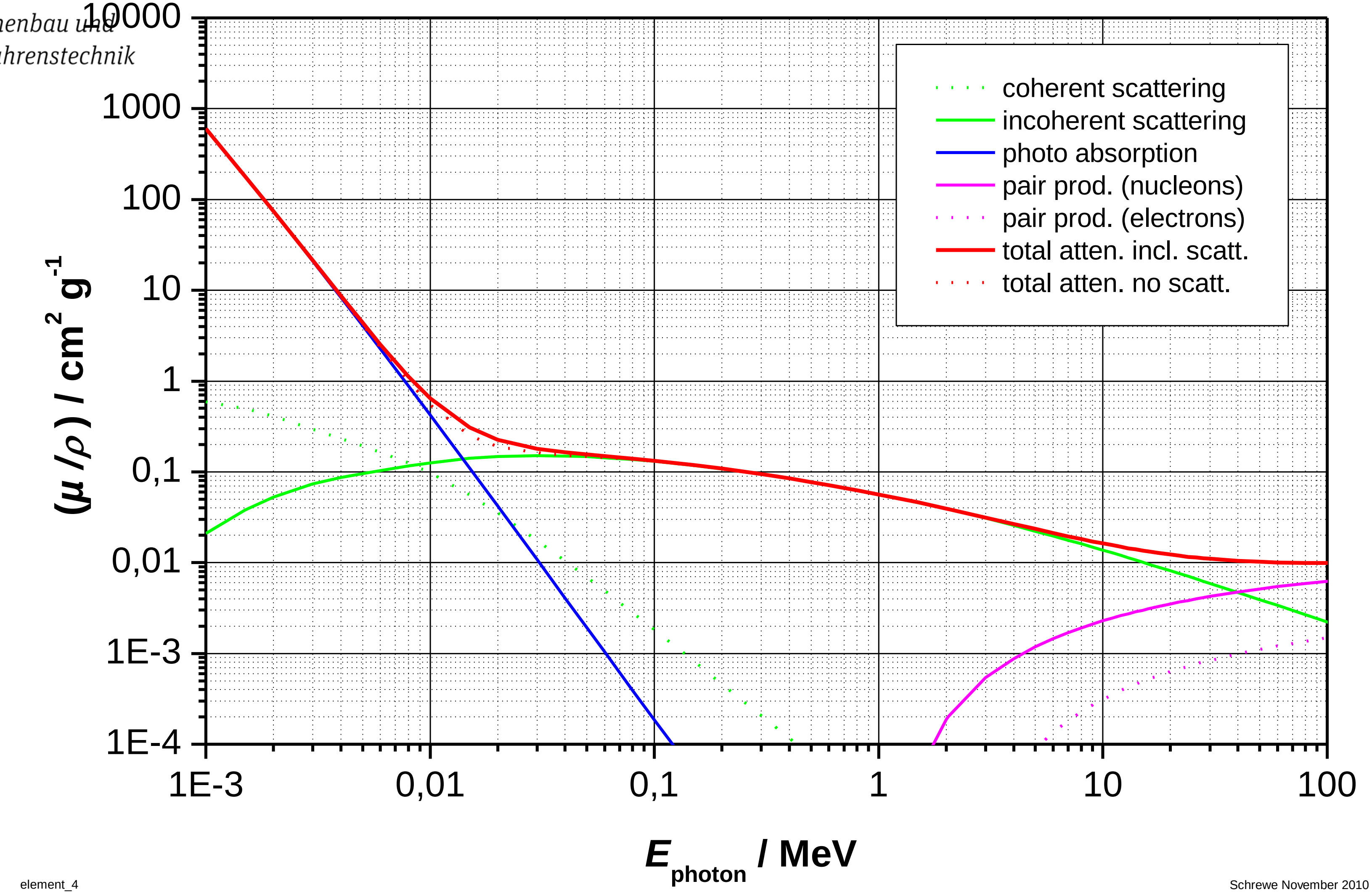
https://www.nist.gov/pml/x-ray-mass-attenuation-coefficients

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

μ/ρ- Daten

Beryllium

Be: Z = 4, ρ = 1,848 g cm^{-3}

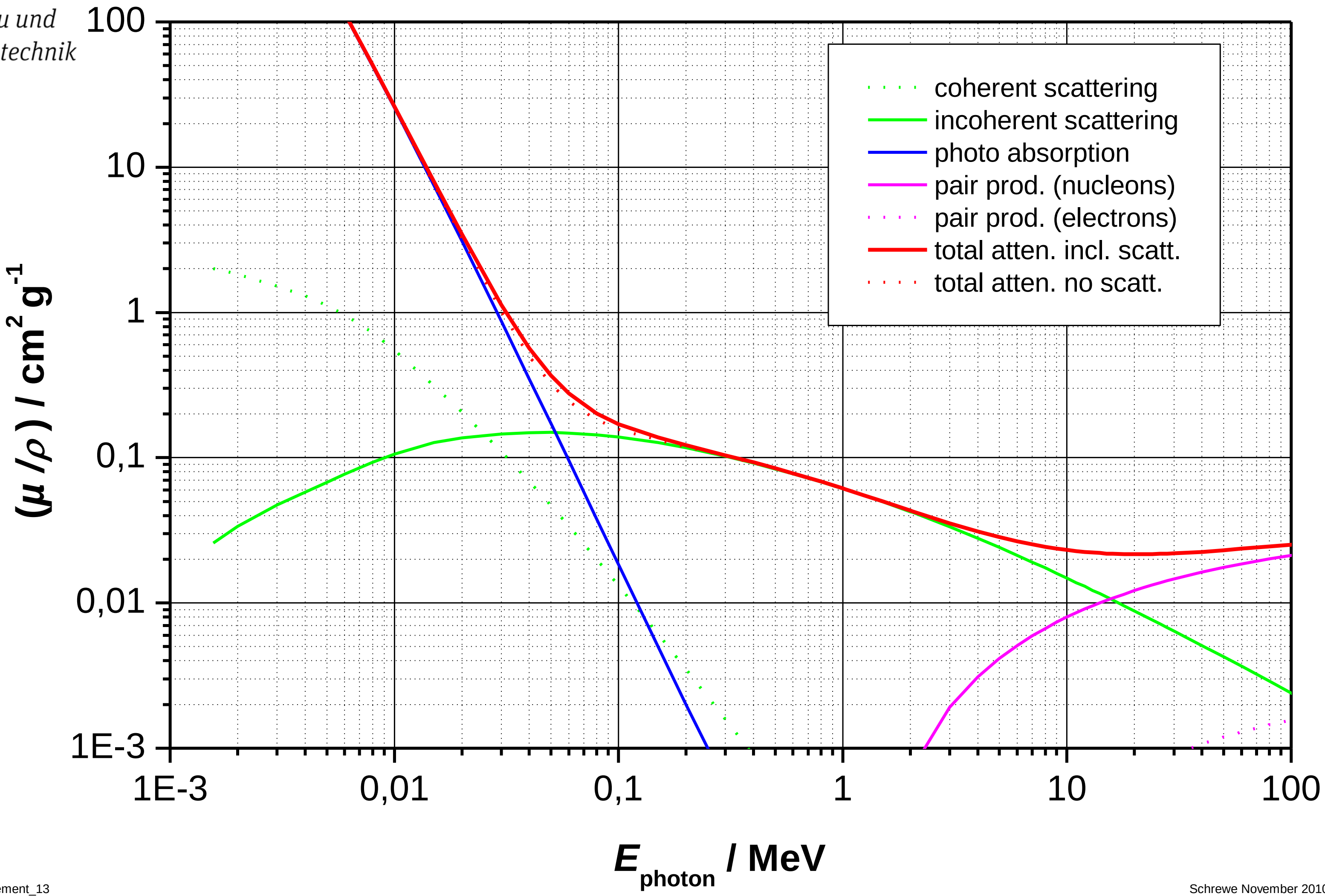


HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

μ/ρ- Daten

Aluminium

Al: *Z* = 13, ρ = 2,699 g cm^{-3}

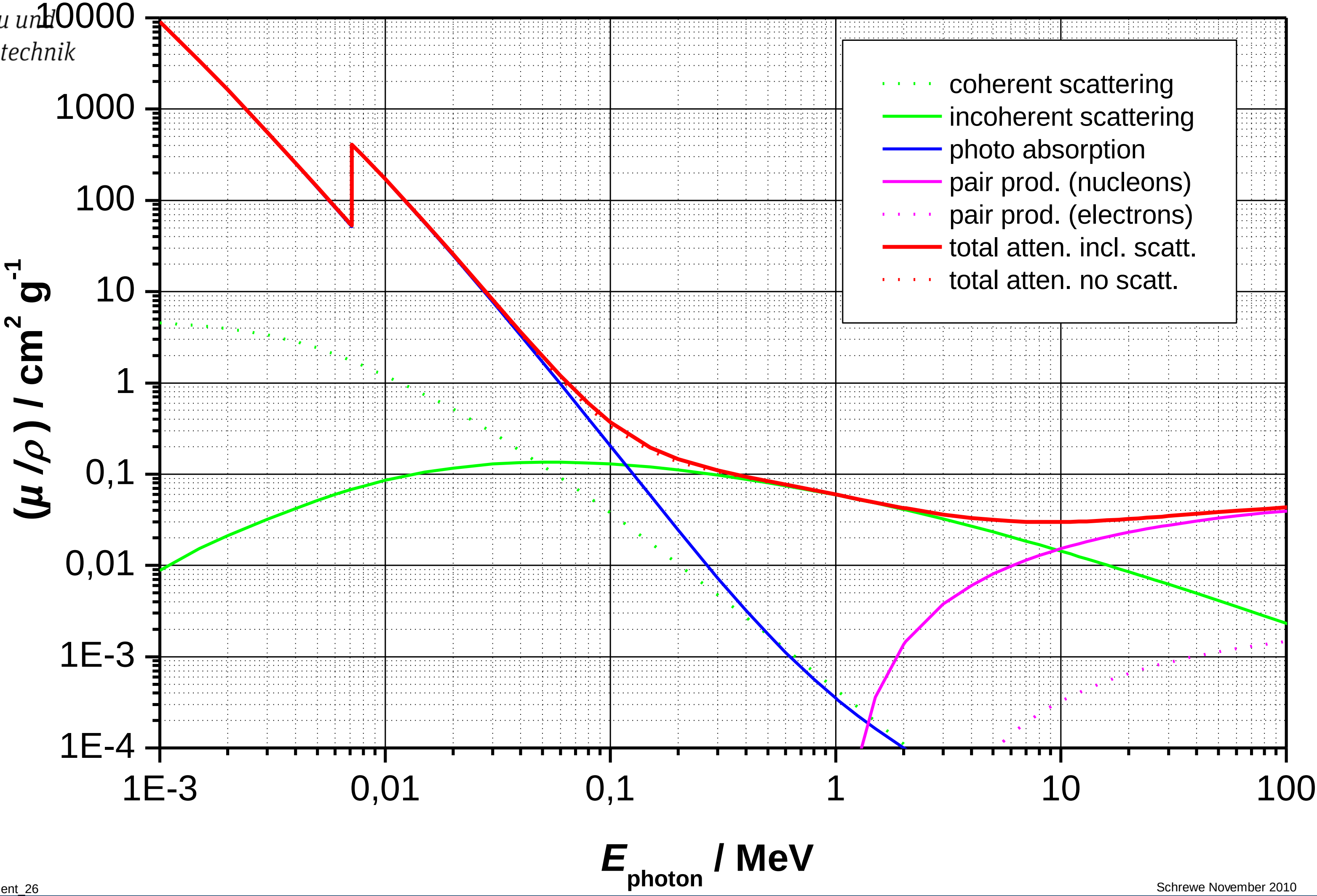


HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

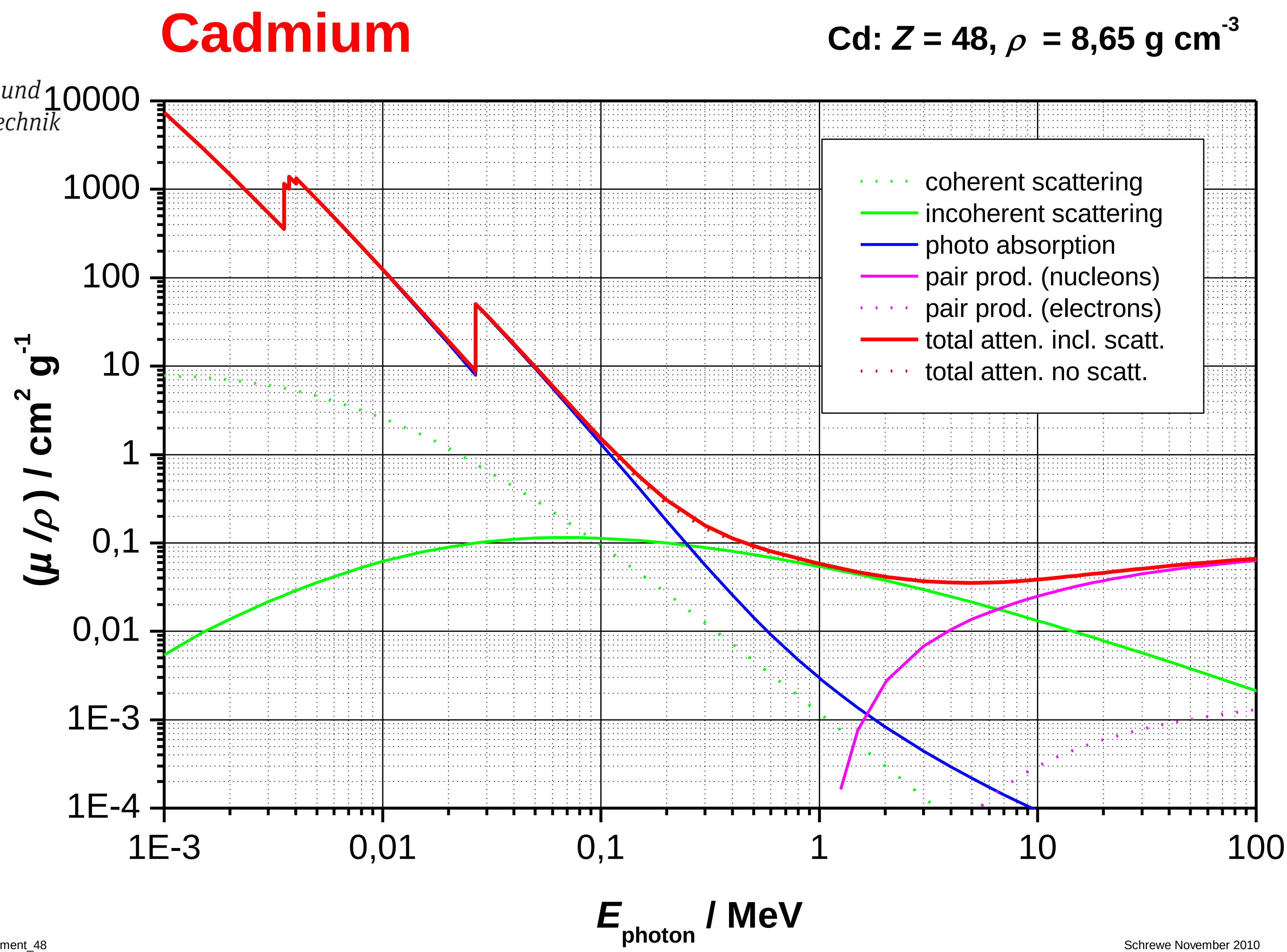
μ/ρ- Daten

Iron

Fe: Z = 26, ρ = 7,874 g cm^{-3}



μ/ρ- Daten


Cadmium
Cd: Z = 48, ρ = 8,65 g cm^{-3}
coherent scattering
incoherent scattering
photo absorption
pair prod. (nucleons)
pair prod. (electrons)
total atten. incl. scatt.
total atten. no scatt.
(μ/ρ) / cm^2 g^{-1}
10000
1000
100
10
1
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-3
0,01
0,1
1
10
100
E_{photon} / MeV
element_48
Schrewe November 2010

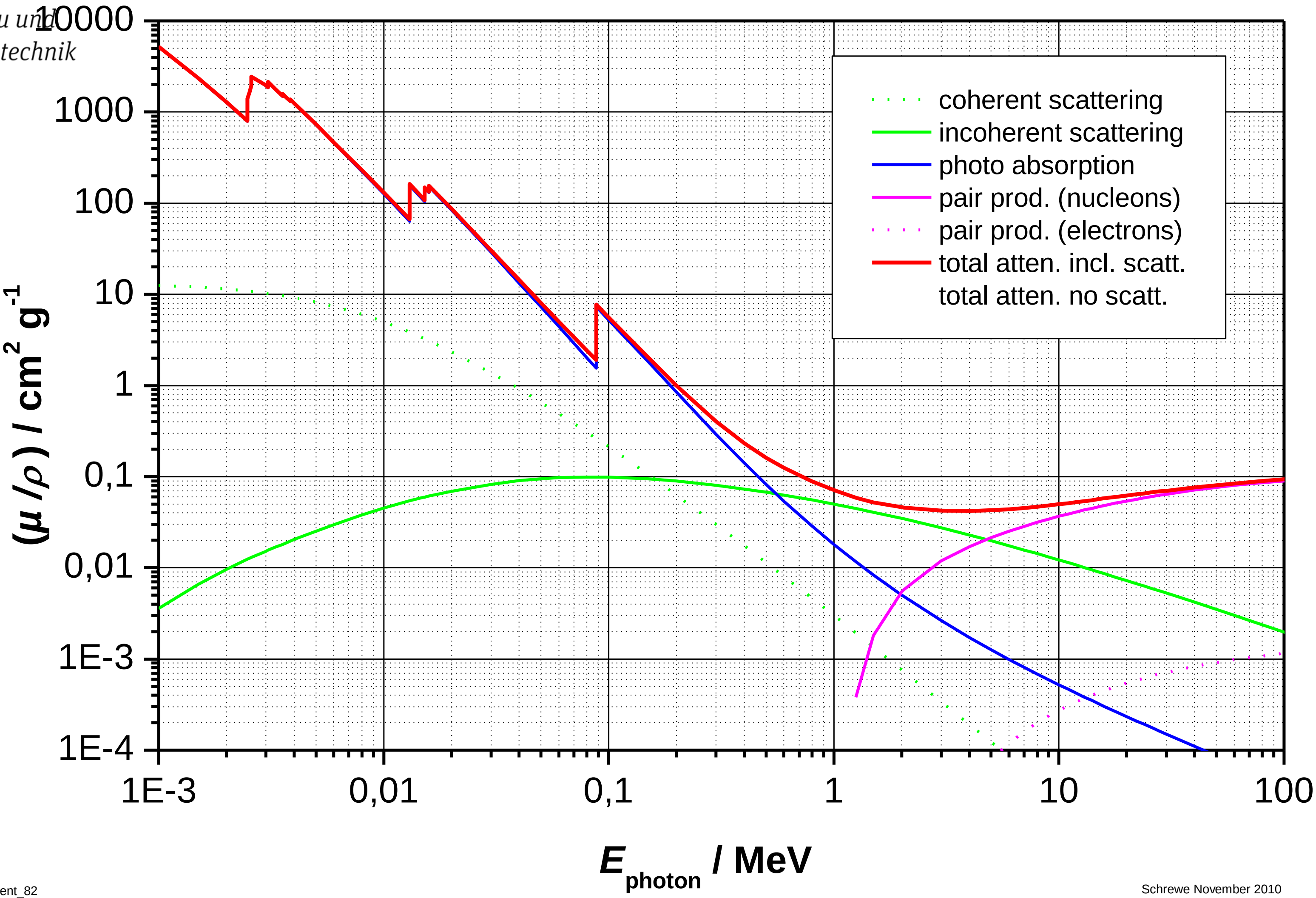
HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

μ/ρ- Daten

Lead

Pb: *Z* = 82, ρ = 11,35 g cm^{-3}

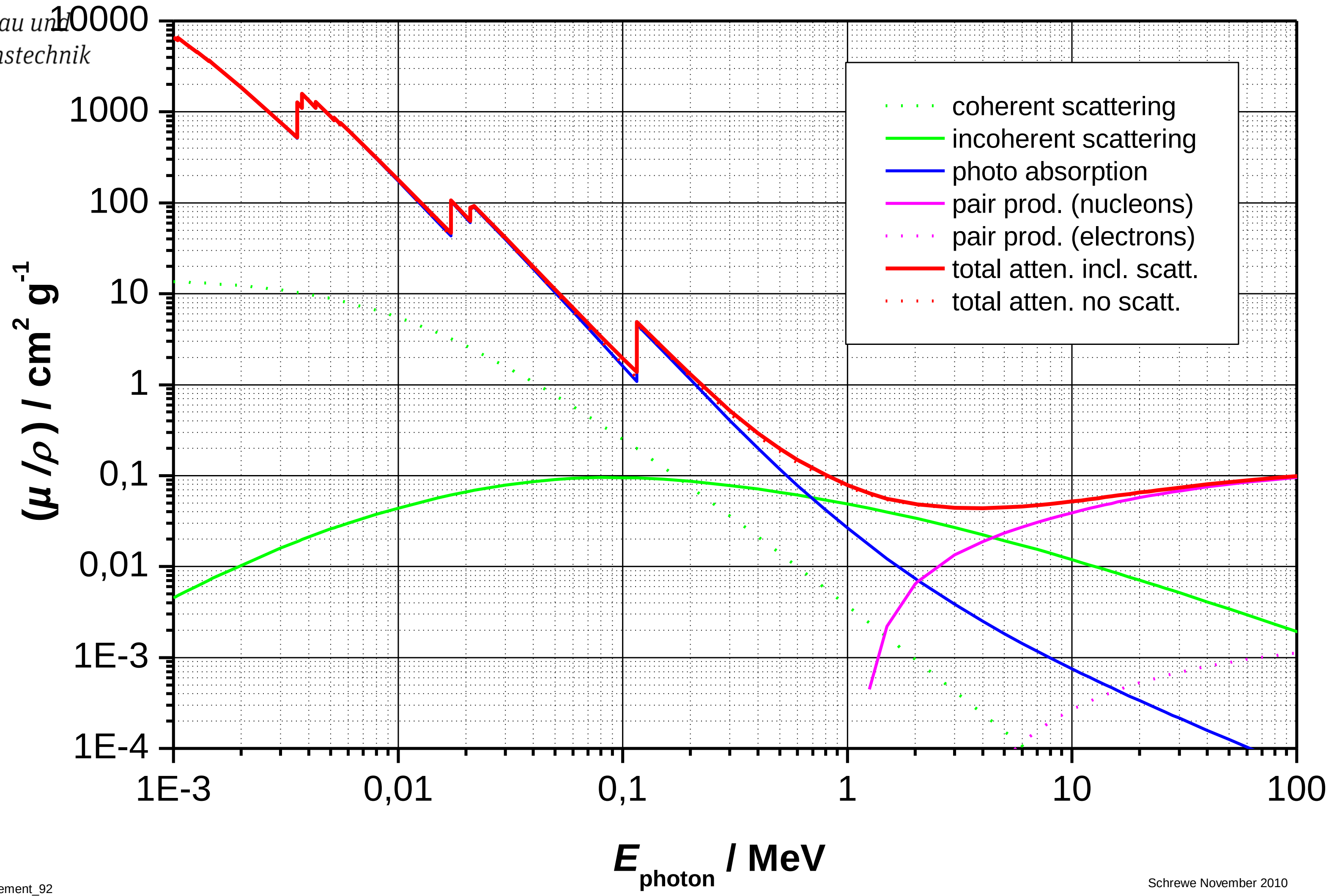


HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

μ/ρ- Daten

Uranium

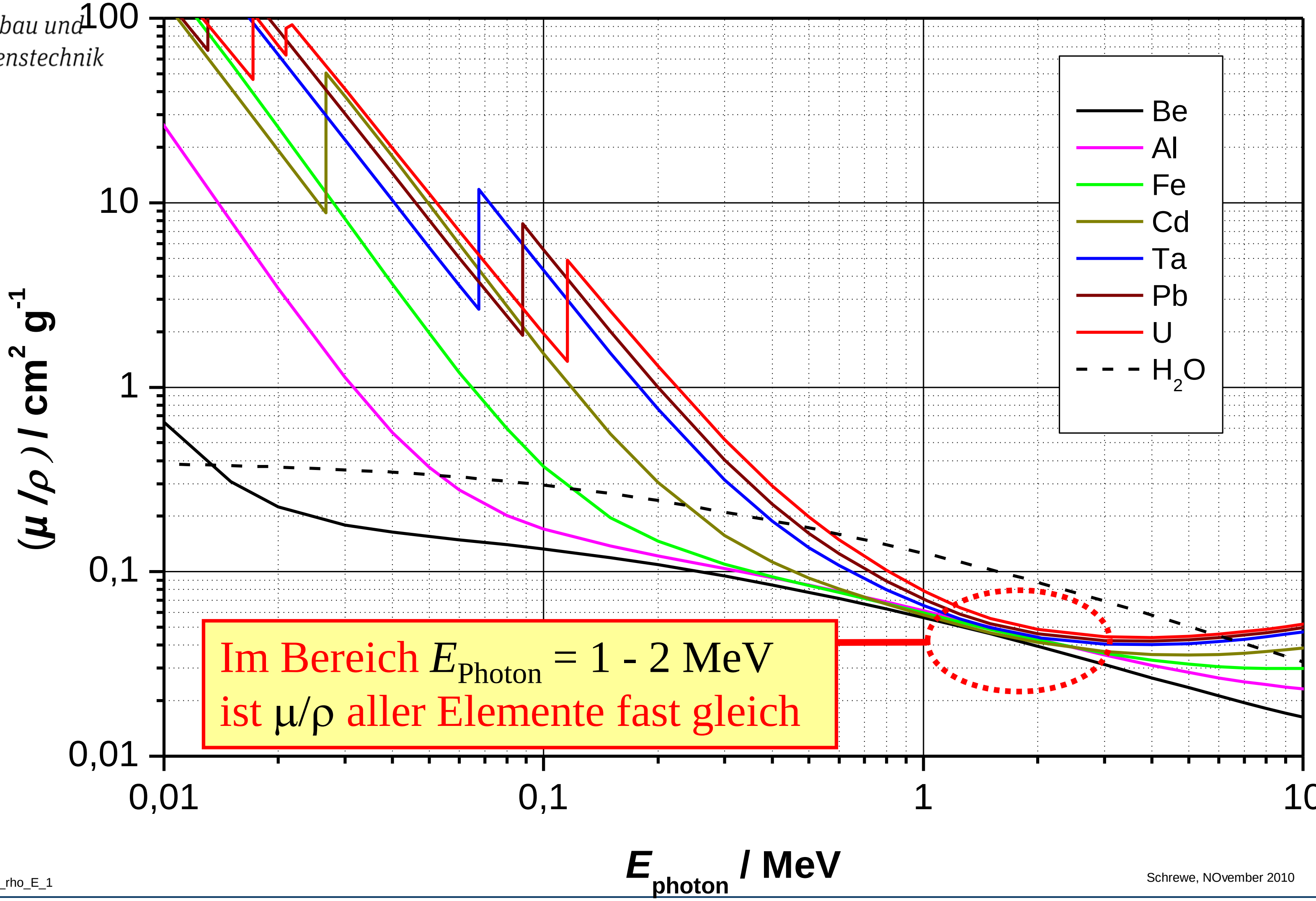
U: Z = 92, ρ = 18,96 g cm^{-3}



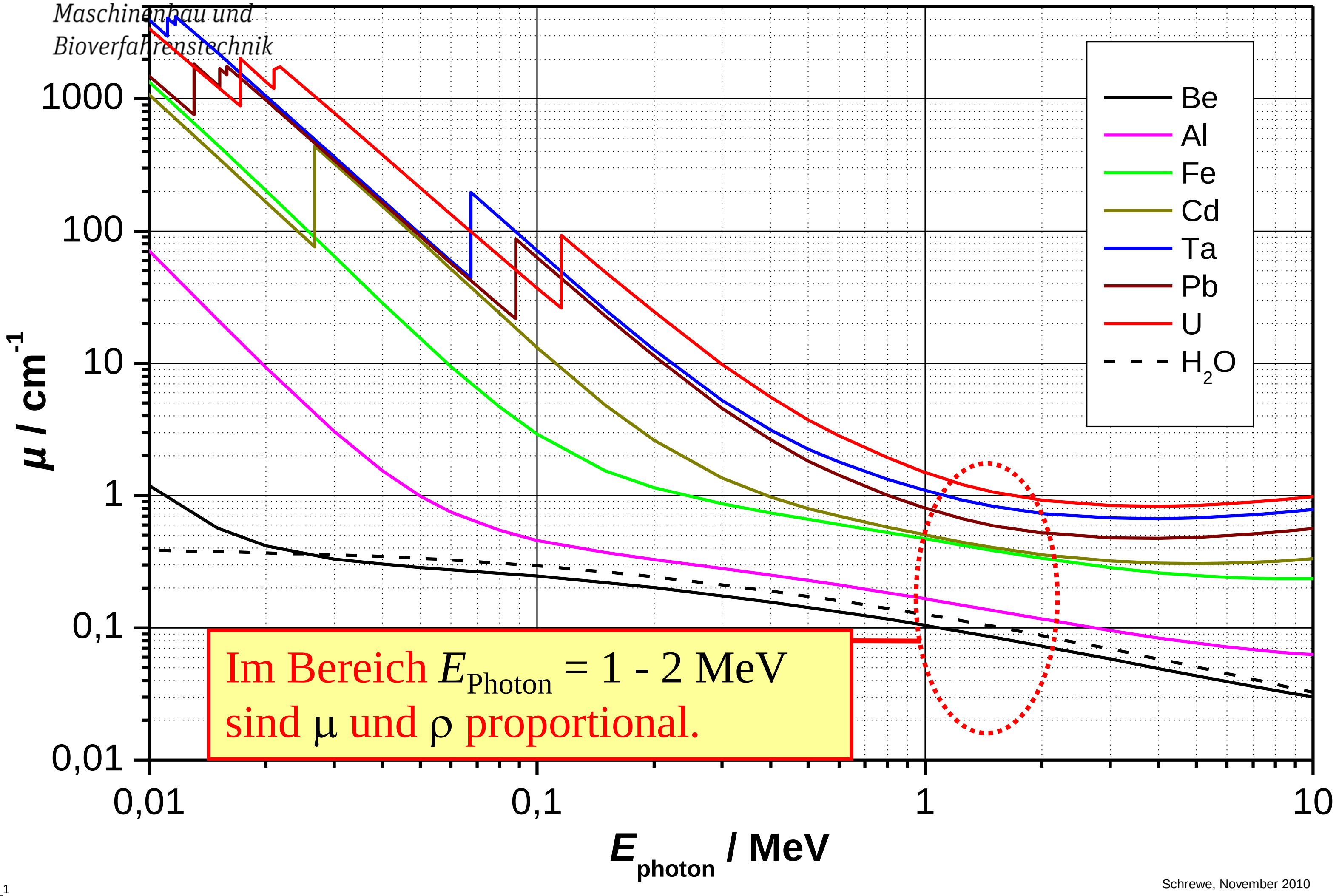
HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

μ/ρ- Daten

Mass attenuation coefficient μ/ρ for various materials



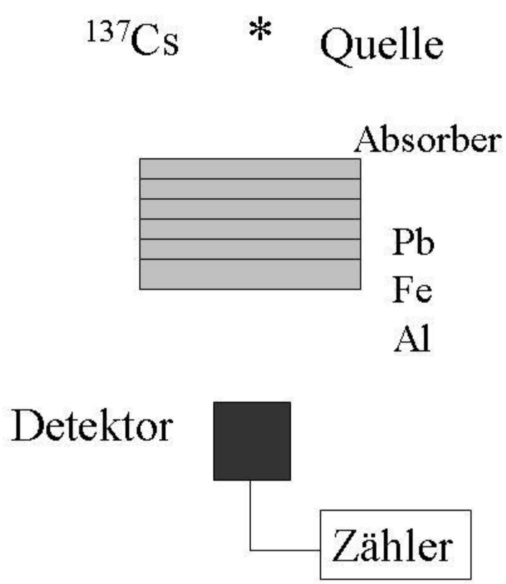
Attenuation coefficient μ for various materials



HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik

Dicken- und Dichtemessung

Bei der Dicken- bzw. Dichtemessung verwendet man im Prinzip gleiche Messverfahren: Gemessen wird die Strahlungsschwächung in einer Materieschicht der Dicke z. Die Schwächung $(I(z)/I_0)$ kann entweder der Dicke (wenn μ = konst.) oder der Dichte (wenn $(\mu/\rho)\cdot z$ = konst.) zugeordnet werden.



Schwächungsgesetz

$$\frac{I(z)}{I_0} = \exp(-\mu \cdot z) = \exp\left(-\frac{\mu}{\rho} \cdot z \cdot \rho\right)$$

Dickenmessung:

Wenn $\left({}^{\mu}\!/\!{}_{\rho}\right) \cdot \rho = \mu = konst.$ wird die Dicke z gemessen.

Dichtemessung:

Wenn $\left({}^{\mu}\!/\!{}_{\rho}\right) \cdot z = konst.$ wird die Dichte ρ gemessen.

HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

*Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik*

Messempfindlichkeit *S*

Dicken- oder Dichtemessungen basieren auf Schwächungsmessungen. Dickenänderungen von x auf $x + dx$ oder Dichteänderungen von ρ auf $\rho + d\rho$ ergeben Intensitätsänderungen von $-dI$.

Als Messempfindlichkeit S bezeichnet man die relative Änderung des Messsignals dI/I_0 geteilt durch die relative Änderung der Messgröße (dx/x oder $d\rho/\rho$).

$$S = -\frac{dI/I_0}{dx/x} = -\frac{dI/I_0}{d\rho/\rho} = \frac{\text{relative Änderung des Messsignals}}{\text{relative Änderung der Dicke / Dichte}}$$

Um auch bei kleinen Änderungen von Dicke/Dichte möglichst große Änderungen des Messsignals zu erhalten, muss S möglichst groß sein.

Maximale Empfindlichkeit

Schwächungsgesetz: $$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \qquad (1)$$

Ableitung von $I(x)$: $$\frac{dI}{dx} = -\mu \cdot I_0 \cdot \left(e^{-\mu \cdot x}\right) \qquad (2)$$

Einsetzen von (1) und (2): $$S(x) = -\frac{dI/I_0}{dx/x} = \mu \cdot x \cdot e^{-\mu \cdot x} \qquad (3)$$

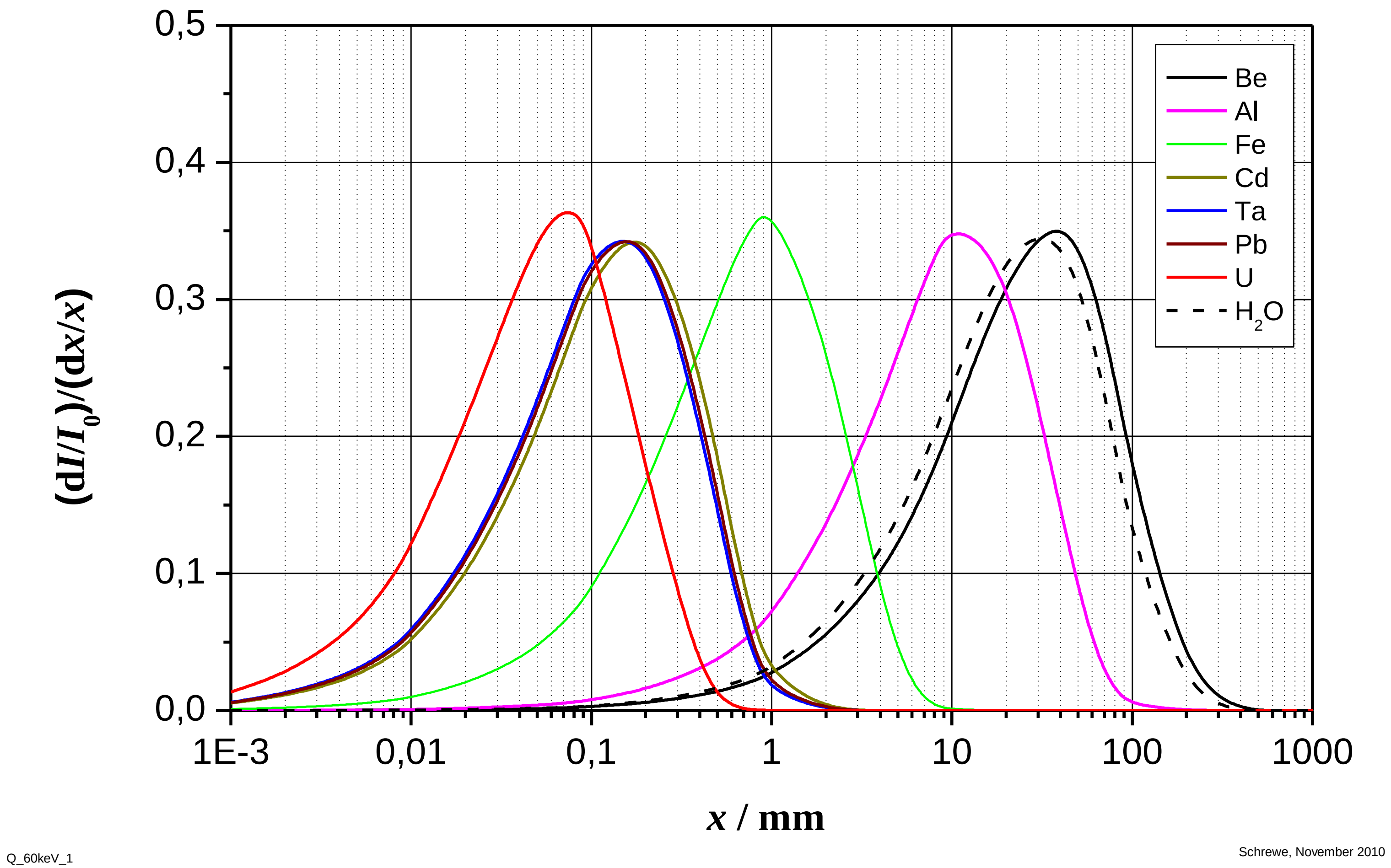
Zur Ermittlung des Maximums S_{max} der Funktion $S(x)$ in Gl. (3) bestimmt man die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx}\left(\left(\mu x\right) \cdot \left(e^{-\mu x}\right)\right) = \mu \cdot e^{-\mu x} + \left(\mu x\right)\left(-\mu\right) \cdot e^{-\mu x} = e^{-\mu x}\left(\mu - \mu^2 x\right) = 0$$

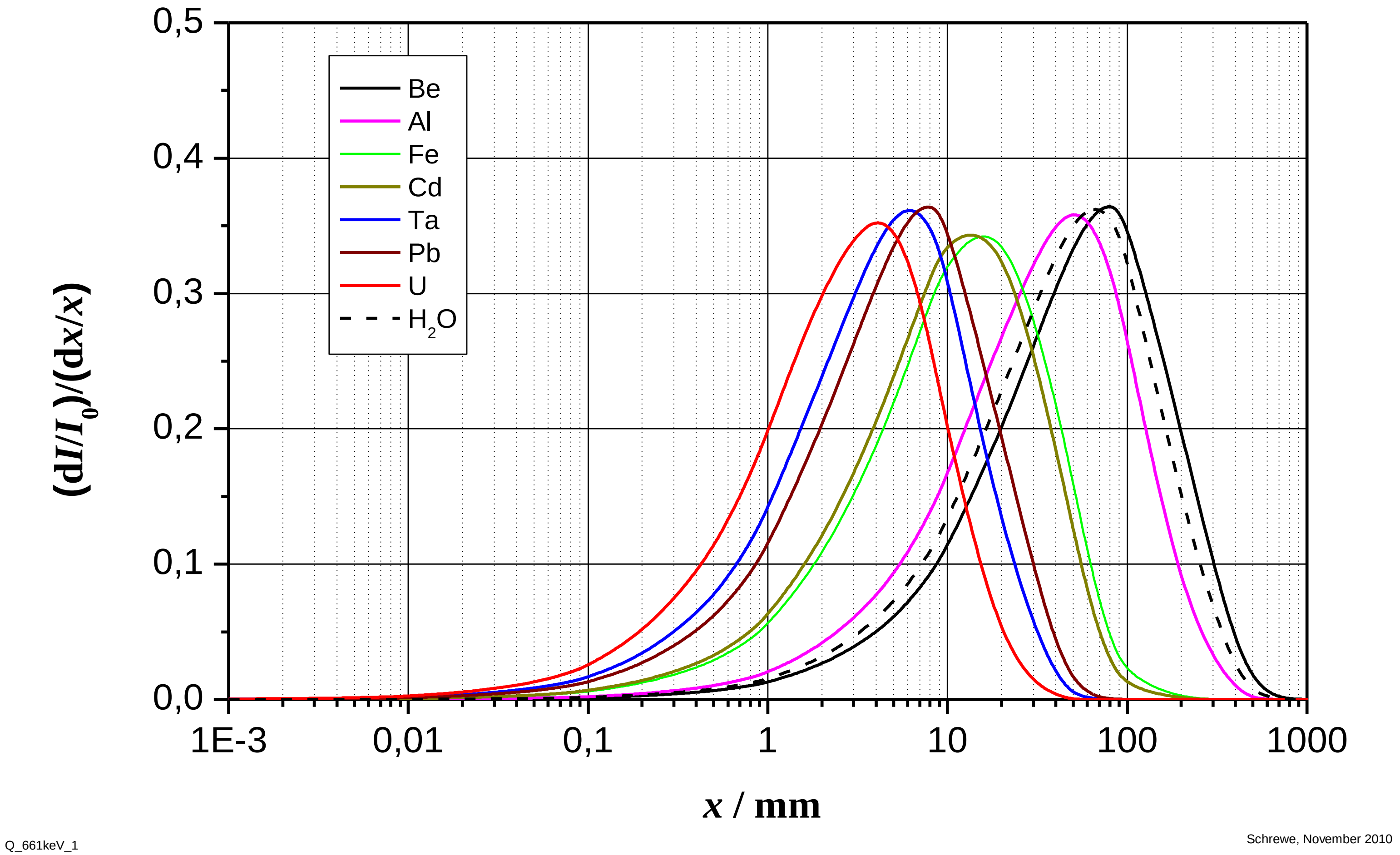
Lösung: Für $x_0 = 1/\mu$ erreicht $S(x_0)$ das Maximum S_{max},
d. h. die Messempfindlichkeit ist für $x_0 = 1/\mu$ optimal.

HOCHSCHULE HANNOVER

Sensitivity $(\mathrm{d}I/I_0)/(\mathrm{d}x/x)$ for E_{photon} = 60 keV (^{241}Am)

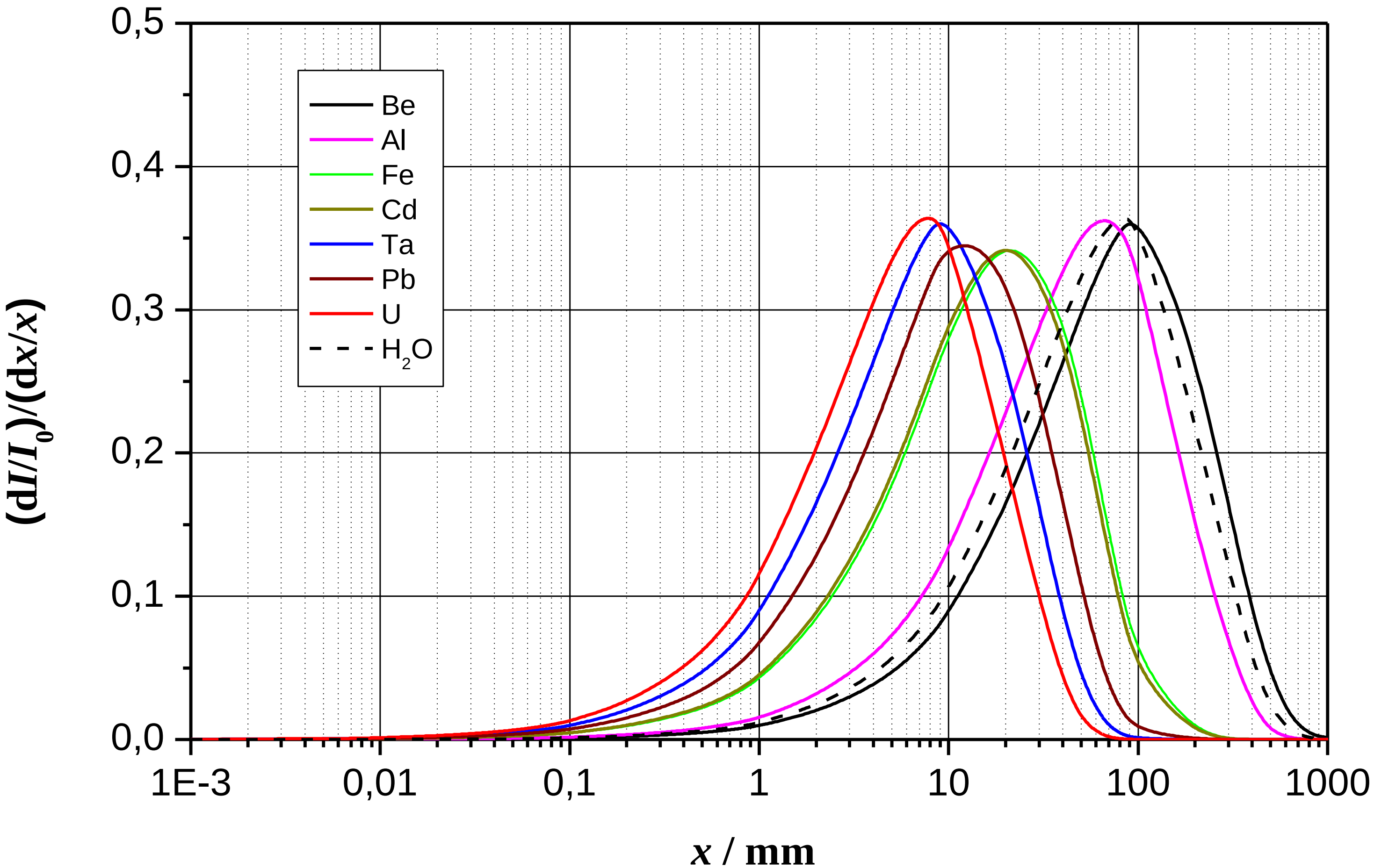


Sensitivity $(dI_0/I)/(dx/x)$ for E_{photon} = 661 keV (^{137}Cs)



HOCHSCHULE
HANNOVER

Sensitivity $(\mathrm{d}I/I_0)/(\mathrm{d}x/x)$ for E_{photon} = 1173 keV (^{60}Co)

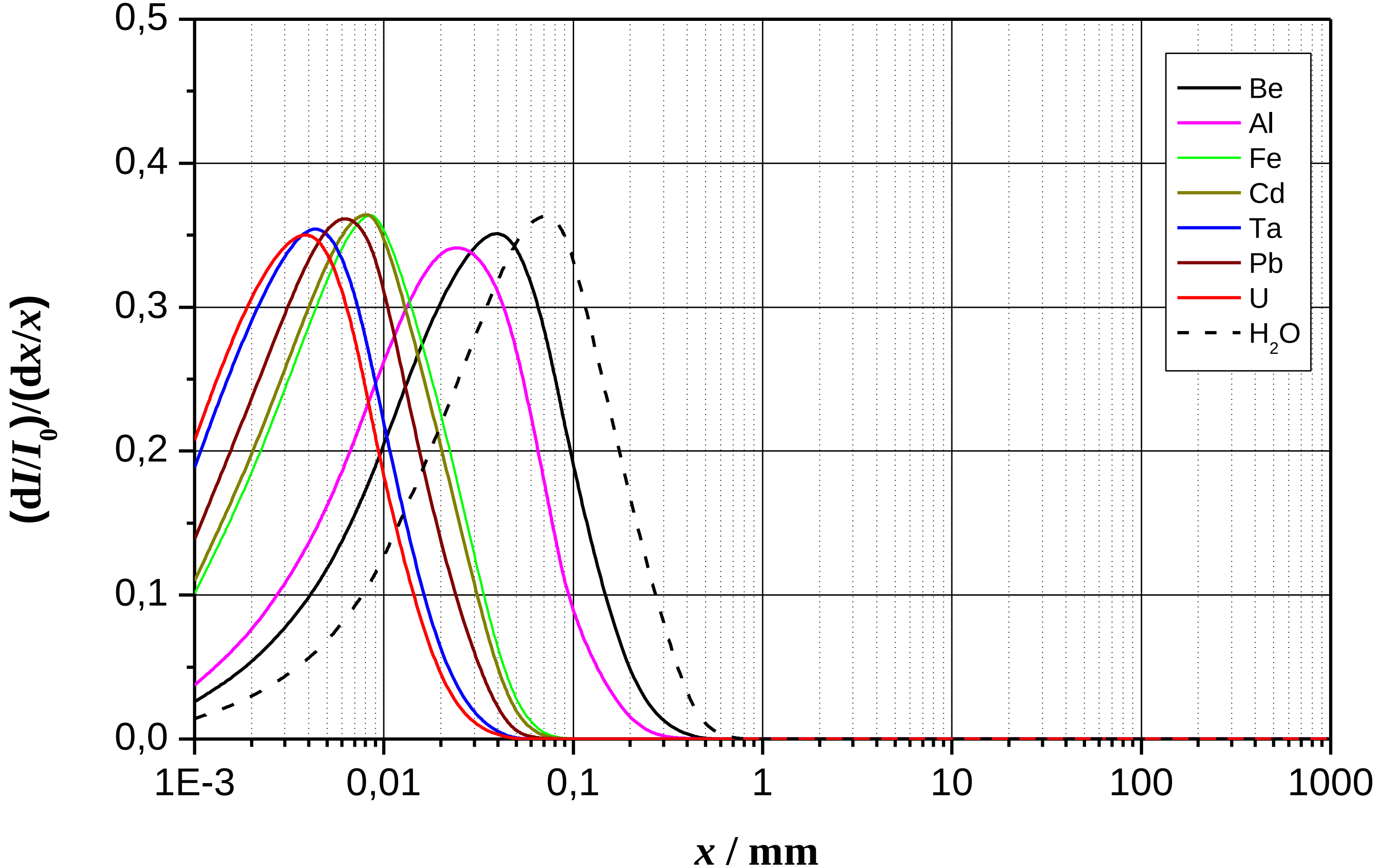


Q_1173keV_1

Schrewe, November 2010

HOCHSCHULE
HANNOVER

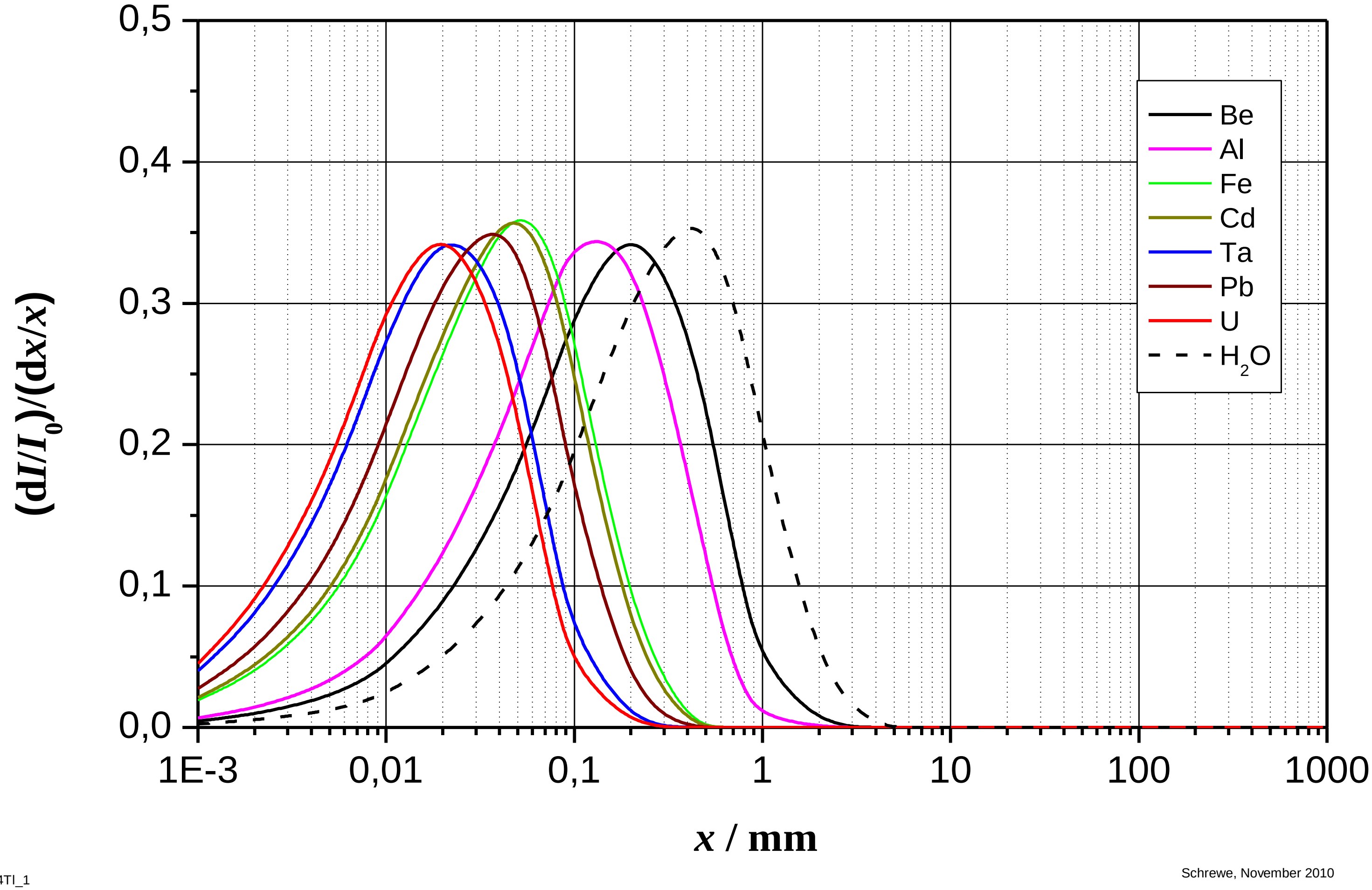
Sensitivity $(dI/I_0)/(dx/x)$ for $E_ß$ = 224,6 keV (^{147}Pm)



Q_147pm_1

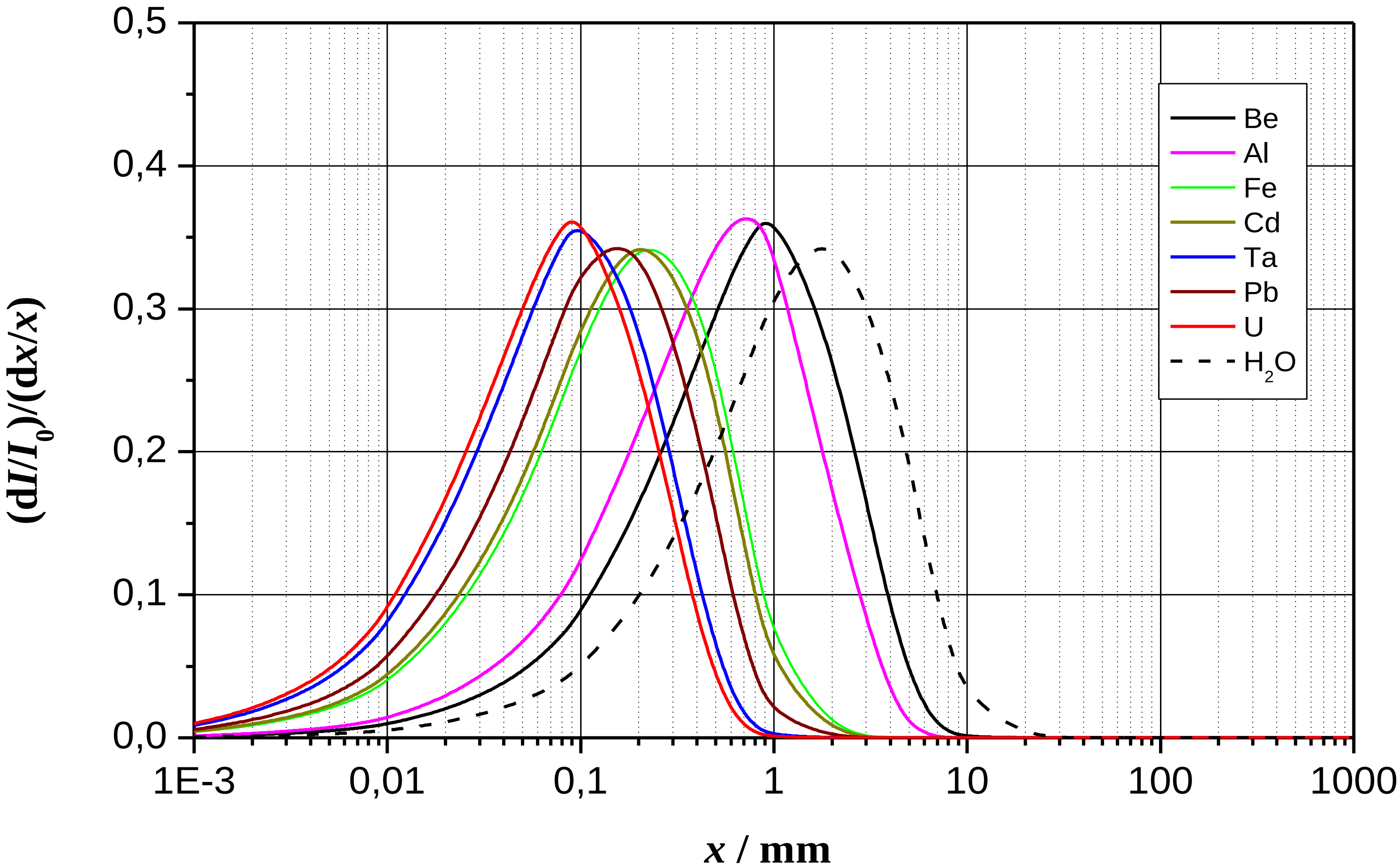
Schrewe, November 2010

Sensitivity $(dI/I_0)/(dx/x)$ for $E_ß$ = 346.9 keV (^{204}Tl)



HOCHSCHULE
HANNOVER

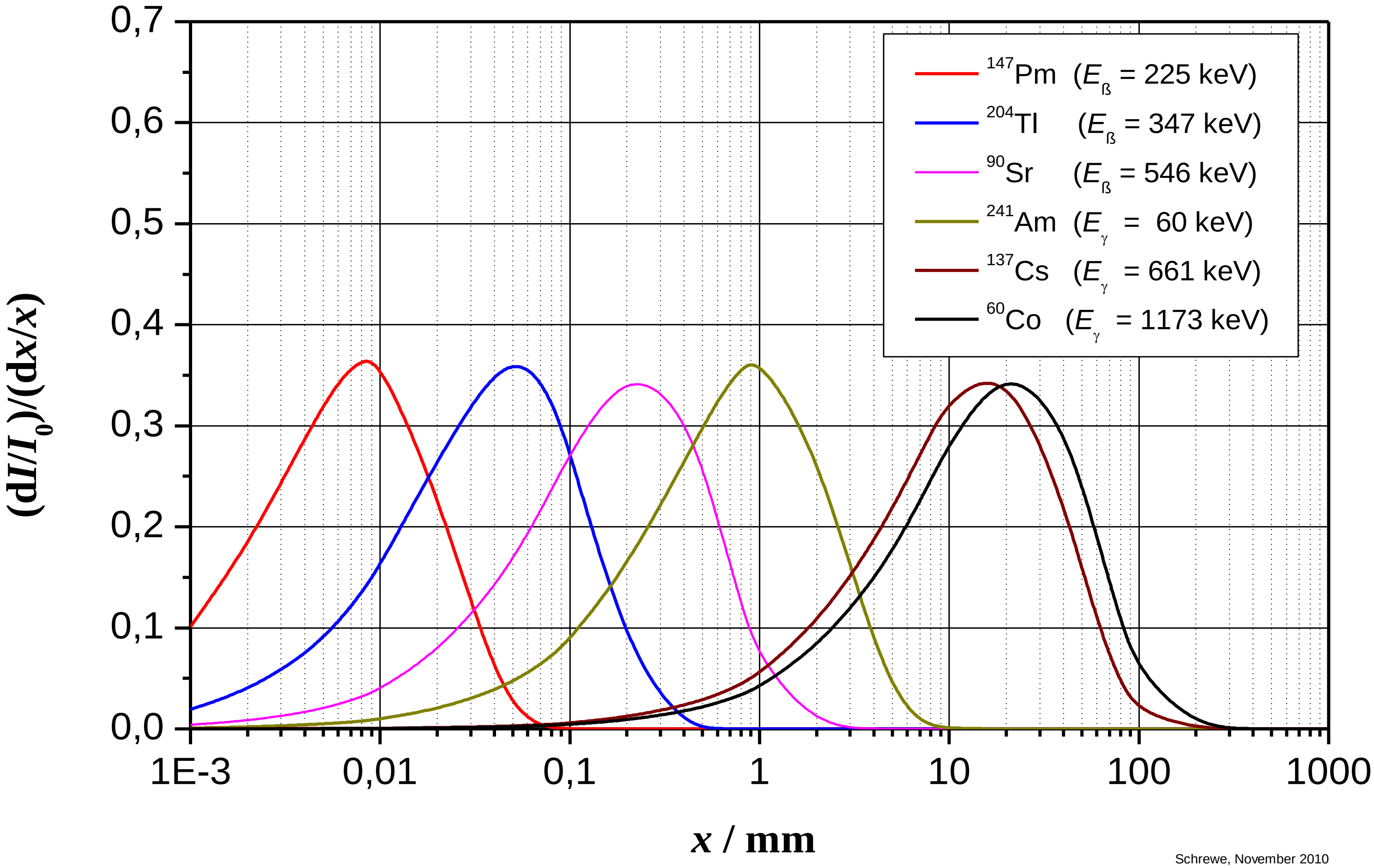
Sensitivity $(\mathrm{d}I/I_0)/(\mathrm{d}x/x)$ for $E_ß$ = 546 keV (^{90}Sr)



Q_90Sr_1

Schrewe, November 2010

Sensitivity $(\mathrm{d}I/I_0)/(\mathrm{d}x/x)$ for Fe and various types of radiation



Q_Fe_1

Dicken- und Dichtemessung

Die verschiedenen Funktionen $S(x)$ in der vorherigen Abbildung zeigen, dass man zur optimalen Dicken- oder Dichtemessung stets ein geeignetes radioaktives Isotop auswählen kann.

Mit den radiologischen Messverfahren zur Dicken- und Dichtemessung kann man insgesamt einen Dicken- und Dichtebereich von mehr als fünf Größenordnung abdecken.

Man findet praktisch für alle industriell relevanten Messprobleme radioaktive Quellen mit geeigneten Strahlenarten.
Radiologische Dicken- und Dichtemessverfahren sind in der industriellen Messtechnik sehr weit verbreitet.

Kleinste messbare Dichte- bzw. Dickenänderung

Die Messung kleiner Dichte- oder Dichteänderungen wird durch die Zählstatistik begrenzt, da $I \sim N$ ist und nach Poisson gilt: $N \pm \sqrt{N}$

Der kleinsten messbaren Dicken- oder Dichteänderung entspricht die kleinste relative Intensitätsänderung: $\left(dI/I\right)_{\min} = \sqrt{N}/N$

Empfindlichkeit: $$S = -\frac{\mathrm{d}I/I_0}{\mathrm{d}x/x} = \mu \cdot x \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

Ersetze I_0 durch: $$I_0 = \frac{I}{e^{-\mu \cdot x}} = I \cdot e^{+\mu \cdot x}$$

Es folgt: $$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}I/I}{\mu \cdot x}$$

wobei $\mathrm{d}I/I$ die gemessene relative Intensitätsänderung ist, die durch eine relative Dickenänderung $\mathrm{d}x/x$ in der Probe verursacht wird.

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Kleinste messbare Dichte- bzw. Dickenänderung

Die statistisch kleinste messbare Intensitätsänderung ist:

$$\left(\frac{\mathrm{d}I}{I}\right)_{\min} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{\sqrt{N_0 \cdot e^{-\mu x}}}{N_0 \cdot e^{-\mu x}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{e^{-\mu \cdot x}} = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{\sqrt{N_0}}$$

Für die kleinste messbare relative Dickenänderung folgt:

$$\delta(x) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)_{\min} = -\frac{\left(\frac{\mathrm{d}I}{I}\right)_{\min}}{\mu \cdot x} = -\frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{\mu \cdot x \cdot \sqrt{N_0}}$$

Für die kleinste messbare relative Dichteänderung gilt ähnliches.

Kleinste messbare Dichte- bzw. Dickenänderung

Als optimale Schichtdicke x_{opt} bezeichnet man die Dicke, bei der die Funktion der kleinsten messbaren relativen Dickenänderung $\delta(x)$ ein Minimum erreicht. Man bestimmt die Nullstelle der 1. Ableitung der Funktion $\delta(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mu \cdot \sqrt{N_0}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{x}\right)$$

Ableitung der Funktion $\delta(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mu \cdot \sqrt{N_0}}\left(\frac{\frac{1}{2}\mu \cdot e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{x} - \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{x^2}\right) = -\frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{\mu \cdot \sqrt{N_0}}\left(\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{x}\right)\right)$$

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Optimale Dicke x_{opt}

Die erste Ableitung der Funktion $\delta(x)$ ist Null, wenn:

$$\frac{\mu}{2} - \frac{1}{x_{opt}} = 0$$

Für die optimale Schichtdicke erhält man:

$$x_{opt} = \frac{2}{\mu}$$

Statt den Schwächungskoeffizienten μ kann man die Halbwerts-dicke $d_{1/2} = \ln 2/\mu$ verwenden. Es gilt dann:

$$x_{opt} = \frac{2}{\ln 2} \cdot d_{1/2} = 2{,}88 \cdot d_{1/2}$$

Bei x_{opt} erreicht die minimale Schichtdickenänderung ihren kleinsten Wert.

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Auflösung bei optimaler Dicke

Um die Auflösung bei optimaler Schichtdicke zu bestimmen, berechnet man $\delta(x_{\mathrm{opt}})$ für unterschiedliche Zählraten:

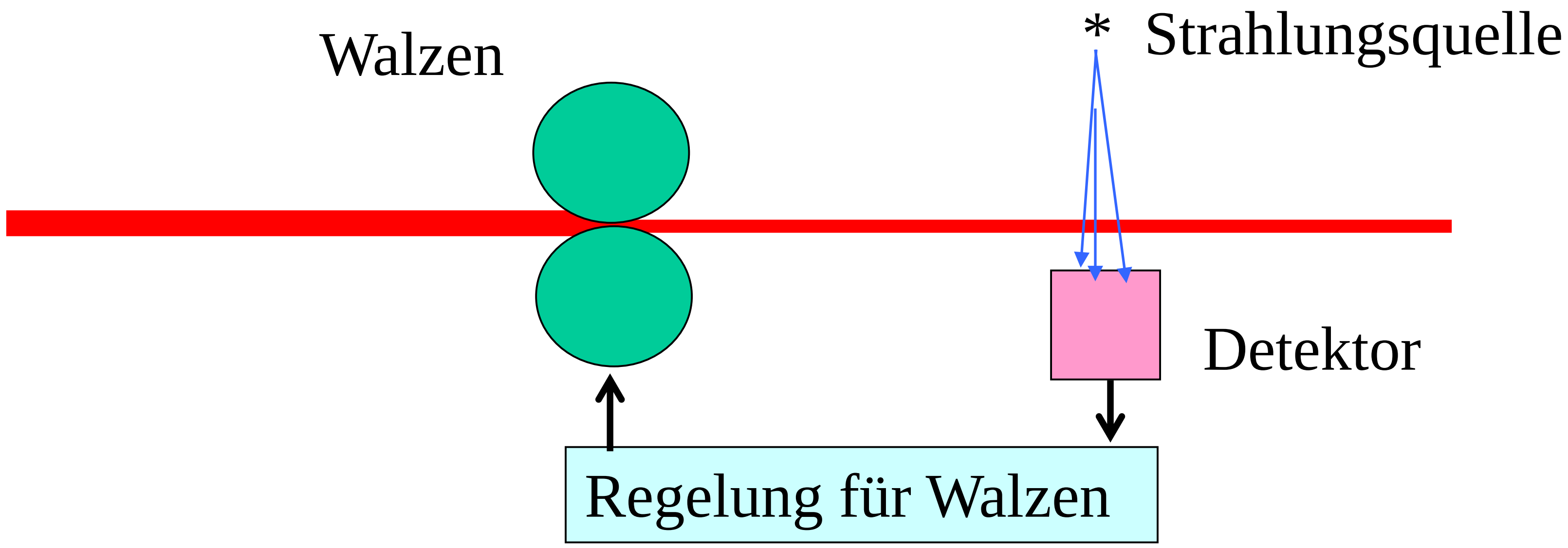
$$\delta(x_{opt}) = -\frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x_{opt}}}{\mu \cdot x_{opt} \cdot \sqrt{N_0}} = -\frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot \frac{2}{\mu}}}{\mu \cdot \frac{2}{\mu} \cdot \sqrt{N_0}} = -\frac{e}{2 \cdot \sqrt{N_0}} = -\frac{1,36}{\sqrt{N_0}}$$

N_0	$\sqrt{N_0}$	$\delta\left(x_{opt}\right) = \frac{e}{2\sqrt{N_0}}$
10	3,16	43%
100	10,00	13,6%
1000	31,60	4,30%
10000	100,00	1,36%

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS
Fakultät II
Maschinenbau und Bioverfahrenstechnik

Anwendungsbeispiel

Um in Fall einer industriellen Anwendung (z. B. beim Walzen von Blech) die Dicke x (oder besser: die Flächenmasse $\rho \cdot x$) auf besser als 1,4 % konstant halten zu können, müssen im Detektor mindestens $N = 10000$ Ereignisse im Messintervall ΔT gemessen werden.



Optimum thickness x_{opt} for various materials