Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

Versuch 3.3 - Dichte- und Dickenmessung

U. J. Schrewe, Mai 2007

1. Grundlagen

Beim Durchgang von monoenergetischer Röntgen- und γ-Strahlung durch eine Materieschicht der Dicke *x* gilt das exponentielle Schwächungsgesetz:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \tag{1}$$

Der Exponent der *e*-Funktion kann in unterschiedlicher Weise ausgedrückt werden.

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} = I_0 \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\cdot(\rho x)} = I_0 \cdot e^{-n_T\, \sigma_{ges}\, x} = I_0 \cdot e^{-n_{\square}\, \sigma_{ges}\, x} \tag{2}$$

mit:

$I(x)$ Strahlungsintensität hinter einer Materieschichtdicke *x*

I_0 Strahlungsintensität vor Materieschicht

μ Schwächungskoeffizient (Einheit: $1\ cm^{-1}$)

$\frac{\mu}{\rho}$ Massenschwächungskoeffizient (Einheit: $1\ cm^2 g^{-1}$)

ρ Dichte (Einheit: $1 g\ cm^{-3}$)

$\rho\, x$ Flächenmasse (Einheit: $1 g\ cm^{-2}$)

n_T Zahl der Atome pro Volumeneinheit (Einheit: $1\ cm^{-3}$)

$n_{\square}$ Zahl der Atome pro Masseneinheit (Einheit: $1\ g^{-1}$)

$\sigma_{ges} = \sum_j \sigma_j$ Gesamtwirkungsquerschnitt pro Atom

(Einheit: $1\ cm^2$ oft auch $10^{-24}\ cm^2 = 1$ barn),
Summe aller Teilwirkungsquerschnitte für Photoeffekt, Compton-effekt, kohärente Streuung, Paarbildung.....usw.

Für praktische Anwendungen der Schwächungsmessung ist es sinnvoll, die Intensität I in Abhängigkeit den drei Variablen, Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ, Dichte ρ und Schichtdicke *x*, zu betrachten:

$$I\left(\frac{\mu}{\rho}, \rho, x\right) = I_0 \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\cdot \rho \cdot x}$$

Eine Änderung der Intensität I um den Betrag dI schätzt man mit Hilfe des totalen Differentials der Funktion $I(\mu/\rho, \rho, x)$ ab:

Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

$$dI = \frac{\partial I\left(\frac{\mu}{\rho},\rho,x\right)}{\partial\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} d\left(\frac{\mu}{\rho}\right) + \frac{\partial I\left(\frac{\mu}{\rho},\rho,x\right)}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial I\left(\frac{\mu}{\rho},\rho,x\right)}{\partial x} dx$$

Wenn die Dichte ρ und der Massenschwächungskoeffizient $\frac{\mu}{\rho}$ konstant sind, sind $d\rho = 0$ und $d\left(\mu/\rho\right) = 0$, und es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dI und dx.

$$dI = \frac{\partial I\left(\mu/\rho,\rho,x\right)}{\partial x} dx = -I\left(\mu/\rho,\rho,x\right)\cdot\frac{\mu}{\rho}\cdot\rho\cdot dx$$

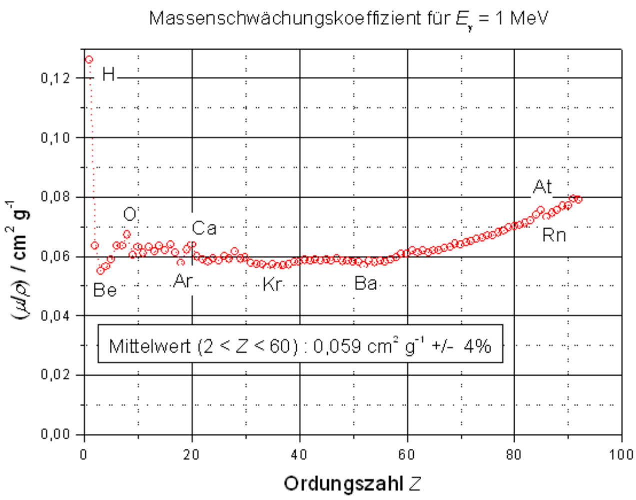
Die Intensitätsabnahme $-dI$ ist also bei kleinen Schichtdickenänderungen proportional zu dx. Diese Beziehung bildet das Grundprinzip einer Dickenmesseinrichtung.

Hält man hingegen die Dicke x und den Massenschwächungskoeffizient $\frac{\mu}{\rho}$ konstant, zum Beispiel, indem man die Strahlungsschwächung in einer Rohrleitung mit konstantem Durchmesser misst, die mit einem Medium konstanter Zusammensetzung gefüllt ist, gilt $d\left(\mu/\rho\right) = 0$ und $dx = 0$, und es folgt:

$$dI = \frac{\partial I\left(\mu/\rho,\rho,x\right)}{\partial\rho} d\rho = -I\left(\mu/\rho,\rho,x\right)\cdot\frac{\mu}{\rho}\cdot x\cdot d\rho$$

Auf diese Weise kann man die Dichte des Mediums messen, sofern vorraussetzungsgemäß der Massenschwächungskoeffizient $\frac{\mu}{\rho}$ in dem untersuchten Material während der Messung konstant bleibt. Bei γ-Energien um 1 MeV ist diese Vorraussetzung unabhängig von der Ordnungszahl des Mediums gut erfüllt, wie in Abb. 1 erkennbar.

Abb. 1 Der Massenschwächungskoeffizient $\left(\mu/\rho\right)$ für γ-Strahlung der Energie von 1 MeV. Zur besseren Orientierung wurden die chemische Bezeichnungen einiger Elemente eingetragen.



Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

In der Praxis ist sogar der gesamte Energiebereich der "harten γ-Strahlung" $0{,}5 MeV < E_{\gamma} > 5\, MeV$ nach entsprechender Kalibrierung gut für Dichtemessungen geeignet, da der Massenschwächungskoeffizient für Elemente mit $Z > 3$ nur wenig von der Ordnungszahl Z abhängt.

Man betrachte eine Dickenmesseinrichtung genauer: Günstige Bedingungen zur Bestimmung einer unbekannten Schichtdickenänderung dx sind dann gegeben, wenn die durch dx erzeugte Intensitätsänderung dI besonders groß ist. Zur Charakterisierung der Empfindlichkeit der Messung definiert man deshalb die dimensionslose Größe "Sensitivity-Funktion S" (neben der englischen kann man auch die deutsche Bezeichnung Empfindlichkeits- oder Kontrastfunktion verwenden) als Quotient aus der relativen Intensitätsänderung und der Schichtdickenänderung in folgender Form:

$$S(x) = -\frac{dI/I_0}{dx/x} = \frac{\dfrac{-I(\mu/\rho, \rho, x)\cdot \dfrac{\mu}{\rho}\cdot \rho \cdot dx}{I_0}}{\dfrac{dx}{x}} = e^{-\mu x}\cdot \mu\, x \qquad (3)$$

Das Maximum $x_{\max}$ der Sensitivity-Funktion $S(x)$ erhält man als Nullstelle der Ableitung der Funktion. Es gilt $S'(x_{\max}) = 0$

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-\mu x}\mu\, x\right) = -\mu \cdot e^{-\mu x}\cdot \mu\, x + e^{-\mu x}\cdot \mu = \mu \cdot (1-\mu\, x)\cdot e^{-\mu x}$$

Die Nullstelle der Ableitung liegt bei:

$$x_{\max} = \frac{1}{\mu}$$

Folgerung: **Bei $x_{\max} = 1/\mu$ kann eine Schichtdickenänderung besonders empfindlich gemessen werden, da die relative Schichtdickenänderung dx/x eine größtmögliche Messwertanzeigenänderungen $-dI/I$ bewirkt.**

Bei dieser Betrachtung ist allerdings noch nicht berücksichtigt, dass eine Messwertanzeigenänderung $-dI/I$ nicht nur Folge einer Schichtdickenänderung dx/x sein kann, sondern auch auf Grund der statistischen Schwankung der Intensität auftritt. Ursache des statistischen Verhaltens ist die Tatsache, dass in der Strahlungsmesstechnik die gemessene Intensität I im allgemeinen durch Zählung von N Einzelereignissen in einer bestimmten Messzeit T gewonnen wird Nach Poisson unterliegen diese N Einzelereignisse einer statistischen Schwankung mit einer Standardabweichung $\sigma = \sqrt{N}$. Man beachte, dass im vorliegenden Versuch nicht die vom Messgerät angezeigte Zählrate $n = \dfrac{N}{T}$ des gleitenden Mittelwertes,

Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

sondern die in einem bestimmten Zeitintervall T gewonnenen Einzelereignisse N den statistischen Gesetzen folgen.

Unter Berücksichtigung des statistischen Charakters des Messvorgangs ergibt sich folgende Betrachtung: Das Schwächungsgesetz (1) kann in die folgende Form umgestellt werden:

$$I_0 = I \cdot e^{+\mu x}$$

Nach Einsetzen von I_0 kann die Sensitivity-Funktion $S(x)$ in Gl (3) ausgedrückt werden als:

$$S(x) = -\frac{dI/I_0}{dx/x} = -\frac{dI/I}{dx/x} \cdot e^{-\mu x} = e^{-\mu x} \cdot \mu x\,.$$

Daraus ergibt sich die Beziehung: $$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\mu x} \cdot \frac{-dI}{I}\,. \qquad (4)$$

<u>Interpretation:</u> Die Gleichung (4) drückt aus, dass eine relative Schichtdickenänderung $\frac{dx}{x}$ proportional ist zur gemessenen relativen Intensitätsänderung $\frac{-dI}{I}$ ist, und dass die Proportionalitätskonstante $\frac{1}{\mu x}$ dem Kehrwert des Exponenten im Schwächungsgesetz Gl. (1) entspricht.

Da die N Ereignisse nach Poisson eine statistische Unsicherheit von $\sqrt{N}$ besitzen, kann die durch eine Dickenänderung erzeugte Intensitätsänderung nur dann erkannt werden, wenn sie größer ist, als die rein statistische Intensitätsschwankung $\left(\pm\frac{dI}{I}\right)_{stat} = \pm\frac{\sqrt{N}}{N}$.

Es gilt: $$\left(\frac{dI}{I}\right)_{stat} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{\sqrt{N_0\, e^{-\mu x}}}{N_0\, e^{-\mu x}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\mu x}}{e^{-\mu x}} = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu x}}{\sqrt{N_0}}$$

Die statistische Schwankung $\left(\pm\frac{dI}{I}\right)_{stat}$ bedingt die Existenz eines kleinsten nachweisbaren Werts für die relative Intensitätsschwankung, und dies bewirkt, dass auch für die nachweisbare Schichtdickenänderung ein kleinster Wert $\delta(x) = \left|\frac{dx}{x}\right|_{\min}$ existiert.

Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

$$\delta(x) = \left|\frac{dx}{x}\right|_{\min} = \frac{1}{\mu x} \cdot \left|\frac{-dI}{I}\right|_{stat} = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu x}}{\mu x \cdot \sqrt{N_0}} \tag{5}$$

Die Nullstelle der Ableitung der Funktion $\delta(x)$ entspricht der optimalen Schichtdicke x_{opt}, da bei x_{opt} die kleinste relative Schichtdickenänderung gemessen werden kann, die unter Berücksichtigung statistischer Gesetzmäßigkeiten möglich ist. Die Ableitung von $\delta(x)$ lautet:

$$\delta'(x) = \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{N_0}} \left(\frac{\frac{1}{2}\mu \cdot e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{x} - \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \cdot x}}{x^2} \right) = \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{N_0}} \left(\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{x} \right) \right)$$

Die Nullstelle der Ableitung liefert die Lösung für x_{opt}:

$$x_{opt} = \frac{2}{\mu}$$

Setzt man das Ergebnis in die Gleichung (5) ein, so kann man den Wert der minimalen Schichtdickenänderung bestimmten:

$$\delta(x_{opt}) = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu x_{opt}}}{\mu x_{opt} \cdot \sqrt{N_0}} = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu \frac{2}{\mu}}}{\mu \frac{2}{\mu} \cdot \sqrt{N_0}} = \frac{e}{2} \frac{1}{\sqrt{N_0}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{N_0}}$$

Beispiel: Misst man in der Messzeit $T = 1\ s$ die Anzahl von $N = 10\,000$ Ereignissen, so beträgt der Wert der kleinsten nachweisbaren relativen Schichtdickenänderung 1,36%. Erhöht man die Messzeit um den Faktor 10 auf $T = 10\ s$, so werden $N = 100\,000$ Ereignisse gemessen, und die kleinste nachweisbare relative Schichtdickenänderung verringert sich auf auf 0,43%.

Folgerung: **Bei $x_{opt} = \frac{2}{\mu}$ kann die kleinste relative Schichtdickenänderung $\delta\left(x_{opt}\right) = \left(\frac{dx}{x}\right)_{\min} = \frac{1,36}{\sqrt{N_0}}$ gemessen werden, die unter Berücksichtigung der statistischen Gesetzmäßigkeiten für die Intensitätsmessung möglich ist.**

2. Aufgabenstellung der Versuchsdurchführung

1. Informieren Sie sich vor Versuchsbeginn über die Bedienung der Messelektronik der Dickenmesseinrichtung. Beachten Sie insbesondere die Seiten 28 bis 31 der Bedienungsanleitung. (Bild Versuchstand)

2. Bestimmen Sie die Zählratenanzeige $n_{anzeige}$ der Dichte- und Dickenmesseinrichtung als Funktion der Wasserschichtdicke *x*. Verwenden Sie hierzu den Wert, der als gleitender Mittelwert unter ***Code 180*** des Auswerterechners gespeichert wird. Es muss berücksichtigt werden, dass die Zählrate elektronisch mit dem konstanten ***Faktor*** $1/4$ ***untersetzt*** wird (überlegen Sie, was der Grund sein könnte). Die wahre Zählrate des NaJ-Detektors ist also $n_{gem} = 4 \cdot n_{anzeige}$.

3. Führen Sie unter Verwendung eines Teils, der unter Punkt 2 gewonnenen Messwerte, eine interne Kalibrierung des Gerätes durch. Beachten Sie, dass diese Kalibrierung nur für einem Teilbereich der verfügbaren Wasserschichtdicke Gültigkeit besitzt. Der Bereich sollte vorher in Abstimmung mit dem Versuchsbetreuer gewählt werden. Überprüfen Sie anschließend die gespeicherte interne Kalibrierung durch Vergleich mit einigen neuen Wasserschichtdicke aus dem Bereich. Notieren Sie die Parameter der Kalibrierfunktion des Auswerterechners in Ihrem Messprotokoll.

4. Bestimmen Sie (bei kleiner Wasserschichtdicke) ca. 20 mal die Anzahl N der Ereignisse im Zeitintervall $T = 1s$. Die Werte finden Sie unter ***Code 100*** im Auswerterechner der Messeinrichtung.

3. Aufgabenstellung zur Versuchsauswertung

1. Bestimmen Sie die Größe $\frac{n_{gem} - n_u}{n_0}$ als Funktion der Wasserschichtdicke x und tragen Sie den Logarithmus von $\frac{n_{gem} - n_u}{n_0}$ als Funktion von *x* graphisch auf. (n_{gem} bezeichnet die gemessene Zählrate, n_u die Untergrundzählrate, angenähert durch den Messwert bei der größten Wasserschicht dicke, n_0 die zur

Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

Wasserschicht $x = 0$ gehörende Zählrate. Bei allen Größen muss jeweils eine Untersetzung um den Faktor 4 berücksichtigt werden.)

2. Bestimmen Sie den Schwächungskoeffizienten μ aus der Steigung des nach optischem Eindruck linearen Teils der Messreihe.

3. Berechnen Sie aus dem experimentellen μ-Wert den Massenschwächungskoeffizienten $\frac{\mu}{\rho}$. Vergleich Sie den Wert einem Literaturwert (Sie finden Literaturdaten zum Beispiel unter:
(http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab4.html).

4. Berechnen Sie den Gesamtwirkungsquerschnitt σ_{ges} und vergleichen Sie Ihren experimentellen Wert mit theoretischen Wirkungsquerschnittsdaten. Diese ergeben sich additiv aus den Daten für die Elemente unter Verwendung eines Gewichtsfaktors.
(Literatur: http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html)

5. Zeichnen Sie die Sensitivity-Funktion $S(x)$ nach Gleichung (3)

$$S(x) = e^{-\mu x} \cdot \mu x$$

zusammen mit den für x_i aus den Messdaten bestimmten Werten

$$S(x_i) = \left(\frac{dI / I_0}{dx / x} \right)_i^{Messdaten}$$

als Funktion von *x*. Näherungsweise kann man $S(x_i)$ aus jeweils zwei benachbarten Zählratenpaaren bestimmen:

$$S(x_i) = \left(\frac{dI / I_0}{dx / x} \right)_i^{Messdaten} \approx \frac{\left(n_{gem} - n_u\right)_{i+1} - \left(n_{gem} - n_u\right)_i}{\left(n_{gem} - n_u\right)_0} \cdot \frac{\frac{x_{i+1} + x_i}{2}}{x_{i+1} - x_i}$$

$$S(x_i) = \left(\frac{dI / I_0}{dx / x} \right)_i^{Messdaten} = \frac{\left(n_{gem,i+1} - n_{gem,i}\right)\left(x_{i+1} + x_i\right)}{2\left(n_{gem,0} - n_u\right)\left(x_{i+1} - x_i\right)}$$

und bestimmen Sie graphisch die Lage des Maximum. Vergleich Sie den Wert mit dem erwarteten Wert $x_{\max} = \frac{1}{\mu}$.

Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

6. Zeichnen Sie die Funktion $\delta(x) = \left(\frac{dx}{x}\right)_{\min}$ unter der Annahme einer Messintervallzeit von $T = 1s$. Die Anzahl der Ereignisse für den i-ten Messpunkt ergibt sich durch $N_i = \left(n_{gem,i} - n_u\right) \cdot T$.
Die kleinste nachweisbare relative Schichtdickenänderung für den Messpunkt i ist gegeben durch:

$$\delta(x_i) = \left(\frac{dx}{x}\right)_{\min,i} = \frac{1}{\mu \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_i}}.$$

Die Funktion $\delta(x) = \left(\frac{dx}{x}\right)_{\min} = \frac{e^{+\frac{1}{2}\mu x}}{\mu x \cdot \sqrt{N_0}}$ ergibt sich aus der zu $x = 0$ gehörenden Zählrate n_0 mit Hilfe von $N_0 = \left(n_0 - n_u\right) \cdot T$.

7. Prüfen Sie den angegeben Untersetzungsfaktor von $f = 4$, indem Sie die empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(N_j - \bar{N}\right)^2}$ mit der nach Poisson erwarteten Standardabweichung $\sigma = \sqrt{f \cdot n_{anzeige} \cdot T}$ mit $T = 1s$ vergleichen.

Auswertungsbeispiele:

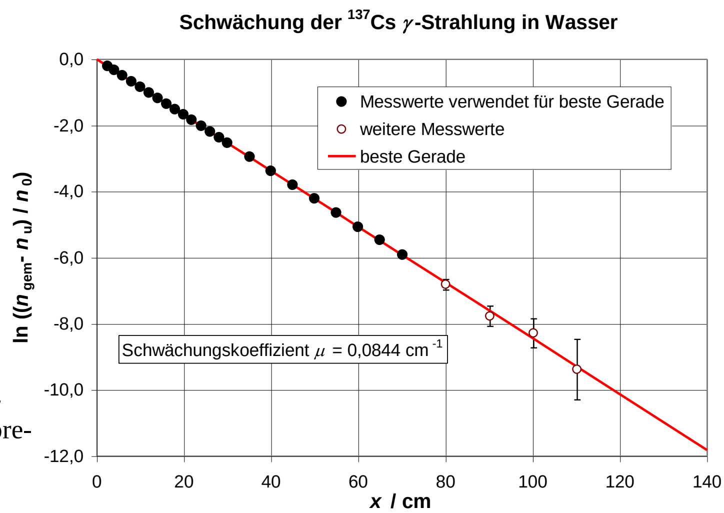


Abb. 1 Verlauf der Schwächung der γ-Strahlung von ^{137}Cs (E_γ = 0,661 MeV) in Wasser. Die gezeigten statistische Unsicherheitsmarken entsprechen einer angenommen Messzeit von T = 1s.

Labor für Radioökologie und Strahlenschutz
Prof. Dr. Ulrich J. Schrewe
Ricklinger Stadtweg 120, D-30459 Hannover
Tel.: 0511/ 9296-1359
Email: ulrich.schrewe@hs-hannover.de

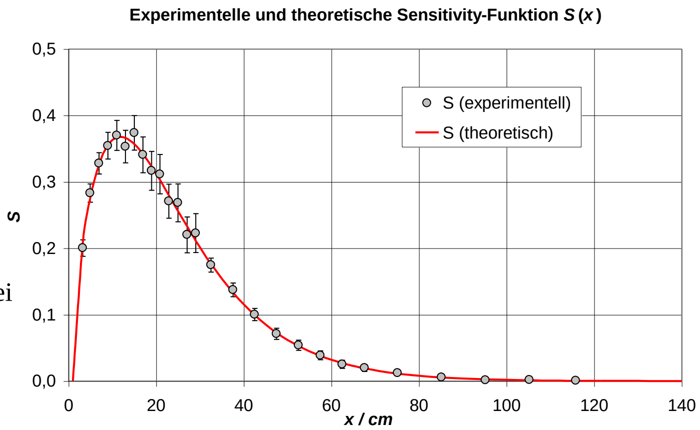


Abb. 2 Experimenteller und theoretischer Verlauf der Sensitivity-Funktion $S(x)$. Die gezeigten Unsicherheitsmarken entsprechen wie in Abb. 1 einer angenommenen Messzeit von T = 1s. Das Maximum der experimentellen Daten liegt bei $x_{\max} = (12 \pm 1)\,cm$. Der theoretisch erwartete Wert beträgt $x_{\max} = \frac{1}{\mu} = 11{,}8\,cm$

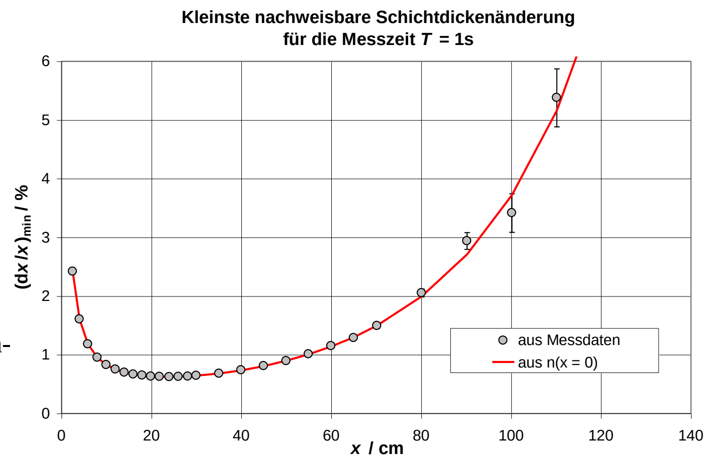


Abb. 3 Kleinste nachweisbare relative Schichtdickenänderung $\delta(x) = \left(\frac{dx}{x}\right)_{\min}$ für eine Messzeit von T = 1s. Die Punkte wurden für die einzelnen Messdaten bestimmt, die durchgezogene Linie ergibt sich aus der Intensität für $x = 0$ und der Annahme eines exponentiellen Schächungsgesetztes.