Brückenkurs Physik

Skript zum Brückenkurs in

Physik

von

Prof. Dr. rer. nat. G. Haussmann

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Norm DIN 1304 Formelzeichen
[2] Gesetz über Einheiten im Messwesen, BGBl I 1985
[3] Internet-Präsenz der PTB Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig, 2010
[4] Leitfaden für den Gebrauch des Internationalen Einheitensystems
Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig, 1998
[5] DIN 1301-1: Einheiten, Einheitennamen, Einheitenzeichen 1993
[6] DIN 461: Graphische Darstellung in Koordinatensystemen 1973
[7] Dobrinski, Krakau, Vogel: Physik für Ingenieure
B.G. Teubner, Stuttgart

I Physikalische Größen, Einheiten und Diagramme

I.1 Physikalische Größen

Physikalische Größen:

In der Physik werden **physikalische Phänomene** behandelt.

Beispiele: - *Der Himmel ist blau.*
- *Ein Glas fällt zu Boden.*
- *Am Himmel bilden sich Wolken.*
- *Ein Flugzeug fliegt.*
- *Ein Auto fährt um die Kurve oder bremst.*
- *Ein Fahrradfahrer fährt und fällt nicht um.*
- *Ein Schiff schwimmt.*
- *In einer Glühlampe glimmt der Glühdraht.*
- *Wasser gefriert bei Frost zu Eis …usw.*

Physikalische Phänomene werden qualitativ und quantitativ durch **physikalische Größen** beschrieben. Zur kürzeren Bezeichnung physikalischer Größen existieren in der DIN 1304 [1] genormte Formelzeichen, die immer nur aus einem Zeichen bestehen. Damit wird vermieden, dass Formelzeichen aus mehreren Buchstaben als Produkt mehrerer Größen falsch gedeutet werden.

Beispiele: - *Weg s,*
- *Zeit t,*
- *Geschwindigkeit v,*
- *Kraft F,*
- *Drehmoment M*
- *Druck p,*
- *Dichte* ρ
- *Temperatur* ϑ,
- *Stromstärke I usw.*

Soll eine bestimmte Bedeutung eines Formelzeichens gekennzeichnet werden, so kann eine oder mehrere Zahlen bzw. ein oder mehrere Buchstaben als Index angehängt werden.

Beispiele: - *Anfangsgeschwindigkeit:* v_0, *(entspricht v(t=0)*
- *Kraft F in z-Richtung:* F_z,
- *Umgebungsdruck:* p_L
- *Länge l bei einer Temperatur von 20 °C:* l_{20}
- *Brückenspannung:* U_B *usw.*

Größengleichungen:

Physikalische Zusammenhänge verschiedener Größen werden durch Größengleichungen beschrieben. Größengleichungen sind algebraische Gleichungen, in denen die Formelzeichen physikalische Größen oder mathematische Zeichen bedeuten. **Physikalische Größengleichungen** können algebraisch umgeformt werden und sind von der Wahl der Einheiten unabhängig.

Beispiele: - $v = \frac{s}{t}$
- $p = \frac{F}{A}$,
- $F = m \cdot a$,
- $p_S = \rho \cdot g \cdot h$ *usw.*

Wesentliche Aufgabe der Physik ist das Finden der Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen und die Entwicklung von Größengleichungen.

Werte physikalischer Größen:

Spezielle Werte physikalischer Größen zu einem bestimmten Zeitpunkt müssen durch Messungen ermittelt werden. Jeder spezielle Wert einer physikalischen Größe kann als Produkt aus Zahlenwert und Einheit dargestellt werden.
Ändert sich die Einheit, dann ändert sich auch der Zahlenwert.
Das Produkt aus Zahlenwert und Einheit bleibt jedoch immer konstant, es ist invariant gegenüber einem Wechsel der Einheit!

Beispiel: Geschwindigkeitsangaben in m/s bzw. km/h bzw. Umrechnung der Geschwindigkeiten

Die Angabe von Werten physikalischer Größen ohne physikalische Einheiten ist sinnlos.

Beispiel: Auto legt in 2 einen Weg von 180 zurück. Was bedeutet das?

Definition:

Der **spezielle Wert einer physikalischen Größe** ist das Produkt aus Zahlenwert (Maßzahl) und (Maß)Einheit.

Wert einer physikalische Größe = Zahlenwert * Einheit.

I.2 Physikalische Einheiten

Einheiten:

Einheiten verkörpern genormte Werte bestimmter physikalischer Größen. Die Benutzung des SI-Einheitensystems mit seinen 7 SI-Basiseinheiten und seinen Vorsätzen ist gesetzlich vorgeschrieben [2]. Aus diesen Basiseinheiten können alle anderen notwendigen Einheiten (in der Regel kohärent, d.h. mit Faktor 1) abgeleitet werden. Die Verkörperung von Einheiten ist eine anspruchsvolle wissenschaftliche Aufgabe und wird in Deutschland von der PTB (Physikalisch Technische Bundesanstalt) in Braunschweig wahrgenommen.

SI-Basiseinheiten:

In Tabelle 1.1 sind die Basiseinheiten des SI-Systems aufgelistet. Tabelle 1.3 enthält einige wichtige abgeleitete SI-Einheiten, die durch Multiplikation und Division aus den SI-Basiseinheiten gebildet werden können und von denen viele aus historischen Gründen besondere Namen und Einheitenzeichen erhalten haben. Das Gesetz über Einheiten im Messwesen verpflichtet zur Verwendung der SI-Einheiten im geschäftlichen und amtlichen Verkehr [2]. Die Verkörperung von Einheiten bzw. des Vielfachen oder von Bruchteilen davon nennt man **Normale**.

Tabelle 1.1: Basiseinheiten des internationalen Maßsystems

Abkürzung	Name der Einheit	Phys. Größe	Definition über
m	Meter	Länge	Lichtgeschwindigkeit und Zeit
S	Sekunde	Zeit	Periodendauer einer EM-Welle
Kg	Kilogramm	Masse	Kg-Prototyp im BIPM*
A	Ampere	Stromstärke	Kraftwirkung zwischen parallelen elektrischen Leitern
K	Kelvin	Temperatur	Tripelpunkt des Wassers
mol	Mol	Stoffmenge	Atomzahl in 12 g ^{12}C
Cd	Candela	Lichtstärke	Strahlung des schwarzen Körpers

*BIPM: Bureau International des Poids et Mesure

Definitionen einiger wichtiger SI-Basiseinheiten (aus [3])

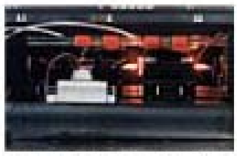
- Die Basiseinheit 1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht in Vakuum während der Dauer von 1/299792458 Sekunden durchläuft.
- Die Basiseinheit 1 Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.
- Die Basiseinheit 1 Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der Strahlung, die dem Energieübergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturen des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entspricht.
- Die Basiseinheit 1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser.

Die folgenden Abbildungen zeigen Details der Verkörperungen der SI-Basiseinheiten (Quelle [3]).

Meter:

Meter

Definition
Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/299 792 458) Sekunden durchläuft.



Jodstabilisierter Helium-Neon-Laser, das "Arbeitspferd" (Wellenlängen-normal) der PTB für die Realisierung des Meters

Realisierung
Ausgehend von der Definition gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Einheit der Länge darzustellen: Dabei arbeitet man mit Laufzeitmessungen oder bedient sich der Hilfe von Laserstrahlen.

Laufzeitmessungen eignen sich gut für astronomische Entfernungen. Beispielsweise misst man die Entfernung zwischen Erde und Mond, indem ein kurzer Puls eines leistungsstarken Laserstrahls auf den Mond gesendet und von einem dort aufgestellten Spiegel zurückreflektiert wird.

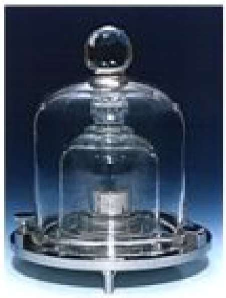
Über die Zeit, die der Laserpuls für die Strecke benötigt, lässt sich die Entfernung berechnen. Aber auch beim GPS (Global Positioning System) wird die Laufzeit von elektromagnetischer Strahlung gemessen.
Bei der zweiten Methode verwendet man die bekannten Wellenlängen von Lasern, um präzise Längenmessungen im Labormaßstab durchzuführen. In so genannten Laserinterferometern vergleicht man dazu die Wellenlängen des Lasers (~ 0,5 µm) mit der zu messenden Länge.

Kilogramm:

Kilogramm

Definition
Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

Realisierung
Das Kilogramm ist die einzige SI-Basiseinheit, die auch heute noch - wie vor rund 200 Jahren - durch einen Prototyp-Körper dargestellt wird. Das "Ur-Kilogramm" ruht unter einer doppelten "Käseglocke" in einem Labor des "Bureau International des Poids et Mesures" (*BIPM*) in Sèvres bei Paris.



Das nationale Kilogramm- Prototyp der Bundes- republik Deutschland in der PTB (*www.ptb.de*). Es besteht aus einer Platin-Iridium-Legierung und wird etwa alle zehn Jahre mit dem internationalen Kilogramm-Prototyp in Sèvres bei Paris verglichen.

Die nationalen Metrologie-Institute besitzen Kopien davon. Jedes der nationalen Prototype (es heißt im Messwesen tatsächlich 'das' Prototyp) wird regelmäßig mit seinem internationalen Gegenstück verglichen.

Doch die verschiedenen Kilogramm-Prototype weichen zunehmend voneinander ab. Deshalb suchen die Wissenschaftler intensiv nach einem Weg, auch die Einheit der Masse auf eine Fundamentalkonstante zurückzuführen.

Eine Möglichkeit bietet die Avogadro-Konstante N_A. Sie gibt an, wie viele Teilchen in einem Mol eines Stoffes vorhanden sind. Beim häufigsten Kohlenstoffnuklid ^{12}C hat ein Mol die Masse von 12 g.

Könnte man die Atome sehr genau auszählen (es sind etwa $6{,}022 \cdot 10^{23}$), dann hätte man auch ein genaues Maß für die Masse. Doch dieses Auszählen muss noch genauer werden, ehe das Kilogramm neu definiert werden kann. Dieses Thema beschäftigt in der PTB Wissenschaftler aus verschiedenen Gebieten in einem gemeinsamen Projekt.

Sekunde:

Sekunde

Definition
Die Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Realisierung
Die Definition weist schon auf die Methode hin, mit der die Sekunden dargestellt werden können: In einer Atomuhr werden Caesium-Atome mit Hilfe einer elektromagnetischen Strahlung dazu gebracht, von einem Energieniveau in ein anderes zu wechseln. Dieser Übergang funktioniert bei einer ganz bestimmten Frequenz (Periodendauer) der Strahlung besonders gut.

Die primäre Atomuhr CS2 der PTB liefert die Sekundenintervalle der gesetzlichen Zeit (MEZ bzw. MESZ) , mit denen - über einen Langwellen-sender in Mainflingen bei Frankfurt - alle Funkuhren in Deutschland gesteuert werden.

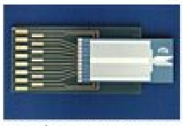
Durch Abzählen der richtigen Zahl von Perioden (siehe Zahl oben) gewinnt man die Sekunde ausgesprochen präzise. Die Sekunde kann von allen SI-Basiseinheiten am genauesten realisiert werden: Die primäre Atomuhr CS2 der PTB weicht in einem Jahr nur um eine millionstel Sekunde von der "idealen" Sekunde ab.

Aus den einzelnen Sekunden fügt sich die Zeitskala zusammen. Die Zeit, die in der PTB realisiert wird, heißt Koordinierte Weltzeit (Coordinated Universal Time) mit dem Zusatz PTB: UTC(PTB). UTC(PTB) plus eine Stunde ist die Mitteleuropäische Zeit (MEZ), UTC(PTB) plus zwei Stunden die Mitteleuropäische Sommerzeit (MESZ).

Ampere:

Ampere

Definition
Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.



Josephson-Spannungs-Normal zur Bewahrung und Weitergabe der Spannungseinheit. Etwa 14000 Josephson-Elemente sind hier in Reihe geschaltet und ergeben eine Spannung von maximal 14 V.

Quanten-Hall-Widerstands-Normal zur Bewahrung und Weitergabe der Widerstandseinheit.

Realisierung
Die Formulierungen "unendlich" und "...hervorrufen würde" zeigen es schon: Die Definition des Ampere ist keine "Bauanleitung" zur Realisierung der Stromstärke. Man behilft sich mit einer indirekten Methode und realisiert das Ampere über die Einheit der Spannung (Volt) und der Einheit des Widerstandes (Ohm).

Das Volt wird mit einer Spannungswaage realisiert: Auf den einen Balken der Waage wirkt eine unbekannte "elektrische" Kraft. Sie wird mit der Kraft auf bekannte Gewichtsstücke verglichen. Das Ohm wird von einem Berechenbaren Kondensator abgeleitet. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich das Ampere als Volt/Ohm.

Reproduzierung der elektrischen Einheiten
Die derzeit genauesten Methoden, um die elektrischen Einheiten zu reproduzieren, bedienen sich zweier Quanteneffekte: Das Volt wird mit dem Josephson-Effekt reproduziert, das Ohm mit dem Quanten-Hall-Effekt. Beide Einheiten sind über diese Quanteneffekte mit Naturkonstanten verknüpft.

Auch das Ampere lässt sich mit einer Naturkonstanten verknüpfen, nämlich der Elementarladung. Dazu werden mit Hilfe der Dünnschichttechnologie so kleine Strukturen hergestellt, dass zwischen ihnen nur noch einzelne Elektronen tunneln können (Single Electron Tunneling, SET). Die dabei auftretenden Stromstärken sind extrem klein und es bedarf noch großer Anstrengungen, um mit Hilfe von SET das Ampere zu reproduzieren.

Kelvin:

Kelvin

Definition
Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Dieser Kryostat in der PTB in Berlin-Charlottenburg dient seit Ende 2000 als nationales Normal für die tiefsten messbaren Temperaturen. Die neue internationale Tieftemperaturskala, die gleichzeitig in Kraft getreten ist, reicht bis zu 0,9 µK herunter, also sehr nah an den absoluten Nullpunkt heran.

Realisierung
Nur bei einer einzigen Temperatur liegt Wasser in allen drei Aggregatzuständen (fest, flüssig und gasförmig) gleichzeitig vor: bei 273,16 K (oder 0,01 °C). Diese Temperatur kann man mit Hilfe einer Tripelpunktzelle realisieren. Das ist ein Quarzglasgefäß, das einem geschlossenen Reagenzglas ähnelt. In ihm kühlt man hochreines Wasser so weit ab, bis es den Tripelpunkt erreicht hat. Dieser Gleichgewichtspunkt ist geeigneter zur Darstellung der Temperatur als der früher übliche Eispunkt (der Punkt, an dem Wasser gefriert), denn der ist abhängig vom Luftdruck und der gelösten Sauerstoffmenge - Faktoren, die als nicht genau wiederholbar gelten.

Mit Hilfe des Tripelpunkts werden Thermometer kalibriert, die als Normalgeräte zur Weitergabe der Einheit der Temperatur dienen. Weil aber kein Thermometer die gesamte Temperaturspanne abdecken kann, benötigt man weitere solcher Fixpunkte. Jeder zeigt die Eigenschaften oder vielmehr einen Gleichgewichtspunkt bestimmter Moleküle oder Atome an: beispielsweise den Punkt, an dem flüssiges Helium gasförmig wird (bei 3 bis 5 K) oder den Punkt, an dem Kupfer zu schmelzen beginnt (mit 1357,77 K an der Spitze dieser Reihe).

Der Unterschied zwischen Kelvin und Celsius
Die Kelvin-Skala ist im Grunde nichts anderes als die Celsius-Temperaturskala mit verschobenem Nullpunkt. -273,15 °C entspricht 0 K. Damit hat die Kelvin-Skala den Vorteil, dass es keine negativen Temperaturen gibt. Die Abstände innerhalb der Skalen aber sind gleich: Ein Kelvin-Schritt entspricht einem Celsius-Schritt.

SI-Vorsätze:

Es existieren Vorsätze zur Kennzeichnung des dezimalen Vielfachen bzw. der dezimalen Teile von Einheiten. Diese erlauben es, sehr große und sehr kleine Zahlenwerte zu vermeiden. Sie werden direkt vor den Namen der Einheit gesetzt. Tabelle 1.2 zeigt einige der wichtigsten SI-Vorsätze [4].

Tabelle 1.2: SI-Vorsätze

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^1	Hekto	h	10^{-1}	Dezi	d
10^3	Kilo	k	10^{-2}	Zenti	c
10^6	Mega	M	10^{-3}	Milli	m
10^9	Giga	G	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{15}	Peta	P	10^{-12}	Piko	p

Beispiele zu Einheiten mit Vorsätzen

- *1 Megavolt = 1 MV = 10^6 V*
- *1 Hektopascal = 1 hPa = 10^2 Pa*
- *1 Pikosekunde = 1 ps = 10^{-12} s*
- *1 Kilometer = 1 km = 10^3 m*
- *1 Mikrometer = 1 µm = 10^{-6} m*

Abgeleitete SI-Einheiten:

Diese werden durch Multiplikation und Division aus den SI-Basiseinheiten kohärent mit dem Faktor 1 gebildet. Für viele abgeleitete SI-Einheiten wurden besondere Namen und Einheitenzeichen festgelegt. Tabelle 1.3 zeigt einige wichtige abgeleitete SI-Einheiten.

Tabelle 1.3: Einige wichtige aus den SI-Einheiten abgeleitete Einheiten

Abkürzung	Formel	Name der Einheit	Phys. Größe
N	1 kgm/s^2	Newton	Kraft
J	1 Nm	Joule	Arbeit/Energie
W	1 J/s	Watt	Leistung
V	1 W/A	Volt	el. Spannung
C	1 As	Coulomb	el. Ladung
Hz	1/s	Hertz	Frequenz
Pa	1 N/m^2	Pascal	Druck
Bar*	10^5 Pa*	Bar	Druck

* nicht kohärent wegen Faktor # 1

Einheiten außerhalb des SI-Einheitensystems:

Einheiten außerhalb des SI-Einheitensystems können in drei Gruppen eingeteilt werden [4]:

- Einheiten, die gemeinsam mit SI-Einheiten benutzt werden
  z.B. Minute, Stunde, Liter u.ä.
- Einheiten, die vorübergehend neben den SI-Einheiten beibehalten werden
  z.B. Seemeile, Angström, Hektar, Rem u.a.
- Einheiten, die nicht mehr verwendet werden sollten
  z.B. Pond, Zentner, PS u.a., siehe Tab. 1.4

Bemerkungen:

- Die SI-Einheiten sind in folgenden Normen festgelegt:
  Nationale deutsche Norm: ⇒ DIN 1301 Teil 1 bis Teil 3 [5]
  Internationale Norm: ⇒ ISO 1000
- Die Definition der SI-Einheiten und weitere Informationen zum Thema Einheiten findet man z.B. in einem Faltblatt der PTB oder im Internet [3].

Tabelle 1.4: Alte Einheiten

Name	Phys. Größe	SI-Einheit
Meile (Mile)	Länge	m
Zoll (Inch)	Länge	m
Pfund	Masse	kg
Zentner	Masse	kg
Pond, Kilopond	Kraft	N
PS	Leistung	W, kW
atm, atü	Druck	Pa, bar
Torr, mmHg-Säule	Druck	Pa, bar
Fahrenheit	Temperatur	K

Wichtiger Hinweis:

Physikalische Größen und die zugehörigen Einheiten sind streng zu trennen.

Es ist sinnvoll, die Einheit einer physikalischen Größe zu bezeichnen, indem man das zugehörige physikalische Formelzeichen zwischen eckige Klammern stellt.

Beispiele:

- *Physikalische Größe Zeit, Formelzeichen t, SI-Einheit:* $[t] = 1\ s$
- *Physikalische Größe Kraft, Formelzeichen F, SI-Einheit:* $[F] = 1\ N = 1\ kgms^{-2}$
- *Physikalische Größe Arbeit, Formelzeichen W, SI-Einheit:* $[W] = 1\ J = 1\ Nm = 1\ kgm^2\ s^{-2}$

I.3 Diagramme

Beschreibung physikalischer Zusammenhänge kann erfolgen

- in verbal sprachlicher Formulierung,
  (z.B. Längenausdehnung eines Körpers verhält sich proportional zur Temperatur)
- in mathematisch analytischer Beschreibung in Form einer physikalischen Größengleichung,
- als Interpretation durch eine Computersimulation oder
- als grafische Darstellung in Diagrammen.

Alle Diagramme benötigen eine eindeutige Beschriftung insbesondere der Achsen. Zugehörige Regeln findet man in der DIN 461 [6]. Insbesondere müssen die Achsen beschriftet werden mit

- Achsenbezeichnungen in Worten oder Formelbuchstaben
  (bei quantitativer Darstellung mit zugehöriger Maßeinheit),
- Maßzahlen, wenn es sich um eine quantitative Darstellung handelt sowie
- Pfeile an oder neben den Achsenenden.

Die Achsbezeichnung kann als Formelbuchstabe oder in Worten angeben werden. Die Achsbeschriftung sollte in der Regel waagerecht erfolgen, da sie dann besser lesbar ist.

Für die Angabe der Maßeinheit an den Achsen gibt es mehrere Möglichkeiten:

1. Angabe der Einheit in eckigen Klammern (*z.B. U [V]*),
   ⇒ praktikabel, aber nicht mehr normgerecht
2. Angabe der Einheit zwischen der letzten und vorletzten Maßzahl an der Achse;
   ⇒ normgerecht, aber nicht immer praktikabel;
3. Angabe der Einheit abgetrennt vom Formelzeichen der phys. Größe durch einen Schrägstrich (*z.B. U/V*) ;
   ⇒ normgerecht, aber Vorsicht: Verwechslungsgefahr mit einer Division
4. Angabe der Einheit durch Verbindung von Formelzeichen und Einheit mit dem Wörtchen „in" (*z.B. U in V*)
   ⇒ praktikabel und normgerecht

Für die Angabe der Maßeinheit an den Achsen werden die Möglichkeiten 1 und 4 empfohlen. Insbesondere Möglichkeit 4 ist normgerecht und zeichnet sich durch große Klarheit aus.

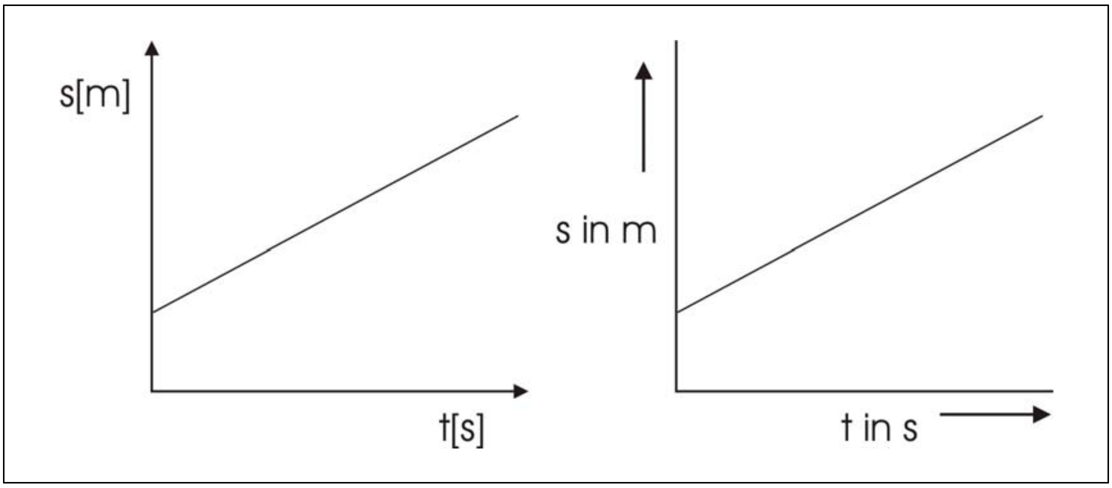


Bild 1.1: Diagramme mit korrekter Achsbeschriftung
links: Möglichkeit 1, praktikabel, aber nicht normgerecht
rechts: Möglichkeit 4, normgerecht und klar ⇒ die beste Darstellungsform

Weitere Informationen findet man in der Norm DIN 461 [6].

II Kinematik der geradlinigen Bewegung

II.1 Vorbemerkung zur Beschreibung von Bewegungen in der Kinematik

Zur Beschreibung von Bewegungen im Rahmen der Kinematik benötigt man

- einen Bezugspunkt im Raum,
- die Möglichkeit, spezielle Werte der physikalischen Größe Weg (bzw. Längen) zu ermitteln und
- die Möglichkeit, spezielle Werte der physikalischen Größe Zeit zu bestimmen.

Konzept des Massenpunkts:

In den folgenden Abschnitten wird die Bewegung eines **Massenpunkts** beschrieben. Dieser Massenpunkt besitzt eine Masse, aber keine Ausdehnung. Daher müssen die folgenden Betrachtungen als idealisiert gedeutet werden, denn ein solcher Massenpunkt existiert in der realen Welt nicht.

Die Rechtfertigung für diesen Einstieg in die Kinematik (und Dynamik) liefert die Tatsache, dass jede beliebige Bewegung eines **ausgedehnten Körpers** zusammengesetzt werden kann

- aus der Bewegung des Schwerpunkts (=Massenmittelpunkt) und
- aus der Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt.

Festlegung:

Die Beschreibung von Bewegungen bezieht sich auf die als ruhend angenommene Erdoberfläche, obwohl die Erde eine komplizierte Bewegung im Raum ausführt.

Wegmessung (Längenmessung):

- Durchführung der Wegmessung durch Vergleich der zu messenden Strecke mit einer Längeneinheit und Angabe des Verhältnisses zwischen Länge und Längeneinheit.
- Als Längeneinheit der Längenmessung dient die Einheit Meter:

1 Meter	=	1 m

Zeitmessung:

- Der Zeitbegriff ist wegen der Einsteinschen Relativitätstheorie kompliziert. Wir benutzen eine aus Erfahrung gegebene physikalische Größe, da Probleme erst dann eintreten, wenn sich die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit c nähert.
- Durchführung der Zeitmessung durch Abzählen von Perioden periodischer physikalischer Vorgänge in der zu messenden Zeit.
- Als Zeiteinheit der Zeitmessung dient die Einheit Sekunde:

1 Sekunde	=	1 s

II.2 Geschwindigkeit

Geschwindigkeit ist eine Kombinationsgröße zur Beschreibung einer Bewegung.

Definition:

Unter der **Geschwindigkeit** versteht man den Quotienten aus zurückgelegtem Weg und benötigter Zeit.

$$\boxed{Geschwindigkeit = \frac{zurückgelegter\ Weg}{benötigte\ Zeit}}$$

Physikalische Gleichung mit Formelbuchstaben nach DIN 1304 [1]:

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad \text{(Gl. 2.1)}$$

Einheit der Geschwindigkeit: $[v] = 1\,\frac{m}{s}$

Beispiel: Ein Auto legt in t = 2 h einen Weg von s = 180 km zurück.

Es hat sich damit mit einer Geschwindigkeit von $v = \frac{180\,km}{2\,h} = 90\,\frac{km}{h}$ *bewegt*

Die Gleichung 2.1 stellt eine physikalische Größengleichung dar die jederzeit algebraisch umgeformt werden kann.

Beispiel: Aus $v = \frac{s}{t}$ folgt $s = v \cdot t \Rightarrow s = 90\,\frac{km}{h} \cdot 2\,h = 180\,km$

Der spezielle Wert einer physikalischen Größe ist von der Wahl der Einheit unabhängig.

Beispiel:

Vergleich von Geschwindigkeiten eines Zugs mit einem 100 m-Läufer

- ICE fährt Strecke Hannover-Göttingen (s = 99 km) in 32 Minuten.
- 100 m-Läufer läuft 100 m in 9,9 s.

ICE:

$$v_{ICE} = \frac{99\,km}{32\,\text{min}} = \frac{99 \cdot 60\,km}{32\,h} = 185.63\,\frac{km}{h}$$

$$= \frac{99 \cdot 10^3\ m}{32 \cdot 60\ s} = 51.56\,\frac{m}{s} \qquad \Rightarrow \frac{v_{ICE}}{v_L} = \frac{185.63}{36.36} = 5.105$$

Läufer:

$$v_L = \frac{100\,m}{9.9\,s} = 10.1\,\frac{m}{s}$$

$$= \frac{100 \cdot 10^{-3}\ km}{9.9 \cdot 3600^{-1}\ h} = \frac{100 \cdot 3600\,km}{9.9 \cdot 1000\ h} = 36.36\,\frac{km}{h}$$

II.2.1 Durchschnittgeschwindigkeit

Vorbemerkung:

Bewegungen sind im allgemeinen Fall sehr komplexe Vorgänge. Zur Veranschaulichung des Bewegungsverlaufs dienen Diagramme.

Weg-Zeit-Diagramm:

Im Weg-Zeit-Diagramm wird der zurückgelegte Weg als Funktion der Zeit t dargestellt. Es ergibt sich bei positiver Geschwindigkeit ein Wegzuwachs, bei Geschwindigkeit Null stagniert dagegen die zurückgelegte Wegstrecke (zur Diagrammdarstellung siehe [6] und Abschnitt I.3).

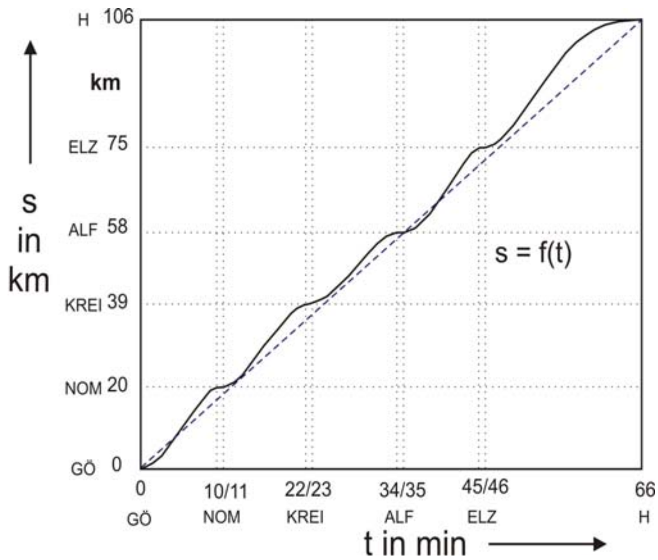


Bild 2.1: Weg-Zeit-Diagramm des Intercity zwischen Göttingen und Hannover

Beispiel:

Bild 2.1 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm des Intercity Göttingen-Hannover durch das Leinetal, wie es sich bis Dezember 2009 darstellte. Es ergibt sich folgender Fahrtverlauf:

Haltestelle	*An*	*Ab*	*s in km*	*t in min*
Göttingen		*10:49*	*0*	
Northeim	*10:59*	*11:00*	*20*	*10/11*
Kreiensen	*11:11*	*11:12*	*39*	*22/23*
Alfeld(Leine)	*11:23*	*11:24*	*58*	*34/35*
Hannover	*11:55*		*108*	*66*

Folgerung:

Der Weg nimmt nicht gleichmäßig mit der Zeit zu. An den Bahnhöfen hält der Zug einige Minuten, daher erhält man dort keinen Wegzuwachs. Die komplizierte Weg-Zeit-Linie kann durch eine Gerade durch Anfangs- und Endpunkt der Fahrt ersetzt werden, die eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit darstellt. Diese Geschwindigkeit entspricht der Durchschnitts-geschwindigkeit.

Definition:

Unter der Durchschnittsgeschwindigkeit versteht man den Quotienten aus dem gesamten zurückgelegten Weg und der gesamten benötigter Zeit.

$$\boxed{Durchschnittsgeschwindigkeit = \frac{gesamter\ Weg}{gesamte\ benötigte\ Zeit}}$$

Physikalische Gleichung mit Formelbuchstaben nach DIN 1304 [1]::

$$\boxed{\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}}} \qquad \text{(Gl. 2.2)}$$

Beispiel:

Der Intercity Göttingen – Hannover fährt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von

$$\bar{v} = \frac{108\ km}{66\ \min} = \frac{108 \cdot 60\ km}{63\ h} = 98.18\ \frac{km}{h}$$

aber: Momentangeschwindigkeiten erreichen Werte bis v_{max} = 160 km/h

II.2.2 Momentangeschwindigkeit

Es wird die Antwort auf die Frage gesucht:
Wie schnell ist der Zug zu einem bestimmten Zeitpunkt?

Veranschaulichung des Problems der Momentangeschwindigkeit an einem Ausschnitt des Weg-Zeit-Diagramms in Bild 1.1

Gedankenexperiment:

t = 0, Stopuhr läuft los, s = 0

$t = t_1 \quad \rightarrow \quad s = s_1$

$t = t_2 = t_1 + \Delta t \quad \rightarrow \quad s = s_2 = s_1 + \Delta s$ usw.

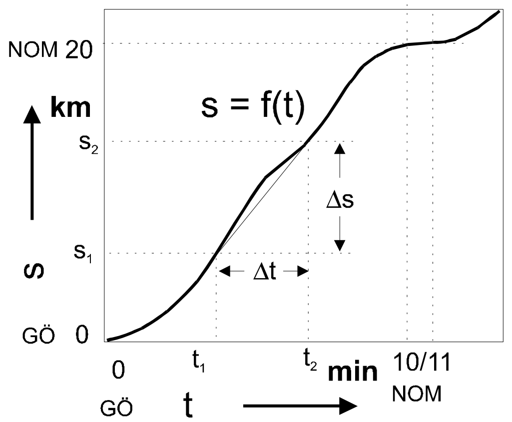


Bild 2.2: Ausschnitt aus dem Weg-Zeit-Diagramm in Bild 1.1 zwischen Göttingen und Northeim

$$\bar{v}_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ist die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $\Delta t = t_2 - t_1$.

Das Intervall Δt wird immer kleiner gewählt

→ Δs wird immer kleiner, und

→ Δs/Δt nähert sich im Grenzübergang dem Wert derTangentensteigung

Definition:

Als **Momentangeschwindigkeit** definiert man den Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_{\Delta t} = \Delta s / \Delta t$ im Zeitintervall Δt für den Grenzübergang $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad \text{(Gl. 2.3)}$$

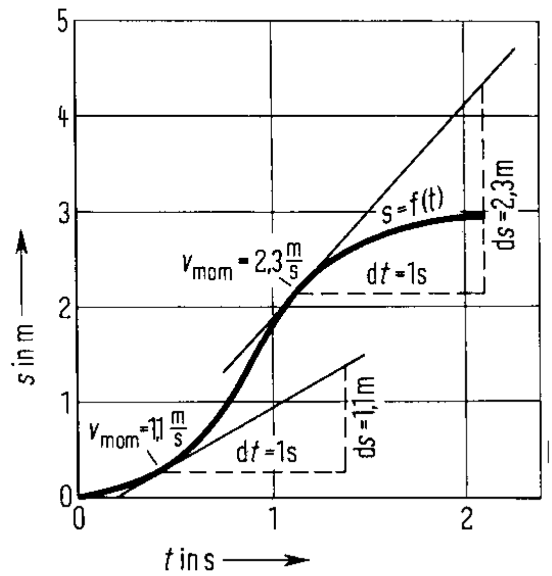


Bild 2.3: Momentangeschwindigkeit als Tangente des Graphen s = f(t) (aus [7])

Mathematik:

Die Momentangeschwindigkeit entspricht dem Differentialquotienten der Funktion s = f(t) bzw. der Tangentensteigung des Graphen der Funktion s(t).

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \qquad \text{(Gl. 2.4)}$$

Hinweis: Keine Angst vor Differentialen! Während man Delta-Größen wie $\Delta s = s_2 - s_1$ als Differenzen in Diagrammen darstellen kann, sind Differentiale ds nichts anderes als extrem kleine Differenzen Δs, die im Grenzübergang nicht mehr darstellbar sind. Differentiale dienen der Linearisierung von Funktionen in einer kleinen Umgebung (ε-Umgebung) eines Arbeitspunkts (Tangente!).

VERSUCH:
Luftkissenfahrbahn:Demonstration der Weg-Zeit-Diagramme und der Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme am Beispiel einer Bewegung mit sich ändernden Geschwindigkeiten.

II.3 Gleichförmige Bewegung

Definition:

Eine Bewegung heißt **gleichförmig**, wenn die Momentangeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt konstant ist.

Folgerung:

Aus v = s/t = const folgt s ~ t. Der Proportionalitätsfaktor ist die Geschwindigkeit.

$$\boxed{s = v \cdot t \quad \text{bei } v = const} \qquad \text{(Gl. 2.5)}$$

Folgerungen:

1. Eine solche Bewegung kann ausschließlich bei „fliegendem Start" beobachtet werden. Die Beschleunigungsphase wird dabei vernachlässigt.
2. Das Weg-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade (siehe Bild 2.4).
3. Die Geschwindigkeit ist die Geradensteigung im s(t)-Diagramm.
4. Eine konstante Momentangeschwindigkeit bedeutet für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\boxed{\bar{v} = v = const} \qquad \text{(Gl. 2.6)}$$

Das Geschwindigkeitsdiagramm v = f(t) beschreibt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit über einen Bewegungsvorgang.

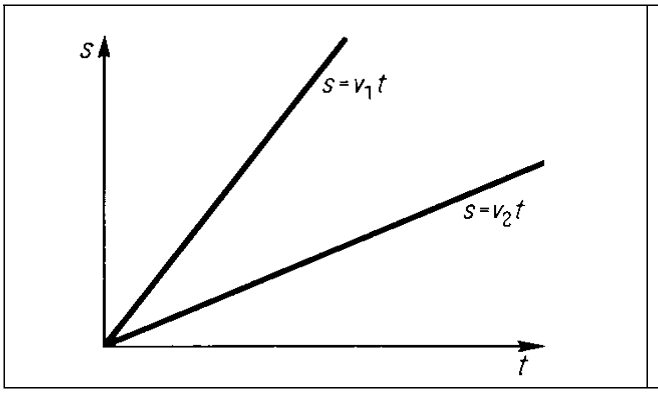


Bild 2.4: Weg-Zeit-Kurve s = f(t) einer gleichförmigen Bewegung (aus [7])

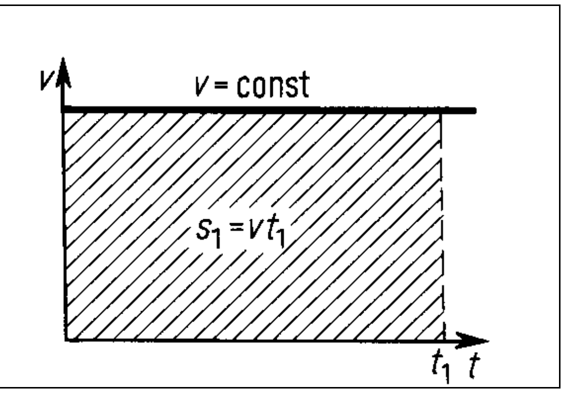


Bild 2.5: Geschwindigkeits-Zeit-Kurve v = f(t) einer gleichförmigen Bewegung (aus [7])

Folgerungen:

1. Das v-t-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade mit Steigung 0.
2. Wegen s = v·t entspricht der nach der Zeit t_1 zurückgelegte Weg $s(t_1)$ der Fläche unter dem Graphen der Funktion v = f(t) bis zum Zeitpunkt $t = t_1$.

II.4 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Definition:

Eine Bewegung heißt **ungleichförmig**, wenn sich der Betrag der Momentangeschwindigkeit mit der Zeit ändert.

Beispiele:

- *Beschleunigungs- und Bremsvorgänge*
- *Freier Fall*

Definition:

Eine Bewegung heißt **gleichmäßig beschleunigt**, wenn sich die Momentangeschwindigkeit linear mit der Zeit ändert, d.h. es muss gelten $v \sim t$.

VERSUCH:	Luftkissenfahrbahn: Demonstration der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der schräg gestellten Luftkissenbahn. Dabei Aufzeichnung • Weg-Zeit-Diagramm • Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm • Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

Definition:

Unter der **Beschleunigung** versteht man den Quotienten aus der Änderung der Momentangeschwindigkeit und der dafür benötigten Zeit.

$$\boxed{Beschleunigung = \frac{\text{Änderung der Momentangeschwindigkeit}}{\text{benötigte Zeit}}}$$

Die Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt ist definiert als:

$$\boxed{\bar{a}_{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \text{(Gl. 2.7)}$$

Definition:

Die **Momentanbeschleunigung** entspricht dem Differentialquotienten der Funktion v = f(t) bzw. der Tangentensteigung des Graphen der Funktion v(t).

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}} \qquad \text{(Gl. 2.8)}$$

Da die Geschwindigkeit v zugleich als Differentialquotient ds/dt definiert ist kann man schreiben:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}} \qquad \text{(Gl. 2.9)}$$

Einheit der Beschleunigung: $[a] = 1 \ \frac{m}{s^2}$

VERSUCH: freier Fall:

Messung der Fallzeit aus verschiedenen Höhen und Berechnung der Fallbeschleunigung nach dem Modell der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

Zusammenfassung des Versuchs und der damit zusammenhängenden Überlegungen:

Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Die Geschwindigkeit v nimmt proportional zur Zeit t zu.

Definition:

Die Beschleunigung beim freien Fall ist eine in der Physik häufig benutzte Größe. Sie wird als **Fallbeschleunigung g** bezeichnet.

Der Zahlenwert der Fallbeschleunigung beträgt auf Meereshöhe $g = 9.81 \ \frac{m}{s^2}$.

Bemerkungen:

1. Die Beschleunigung stellt die Steigung in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dar.
2. Bei gleichmäßig beschleunigten Bewegungen ist die Momentanbeschleunigung konstant, d.h. es gilt $\bar{a} = a = const$

Aus der Ruhe gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

Es ergeben sich folgende Formeln:

a) Funktion v(t)
Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit

$\boxed{v = a \cdot t \quad \text{mit} \quad a = \text{const}}$ (Gl. 2.10)

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0, t_1]$ beträgt

$$\bar{v} = \frac{v(t_1)}{2}$$

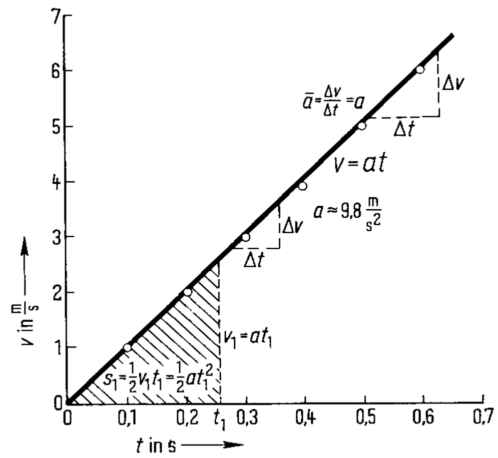


Bild 2.6: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm der aus der Ruhe gleichmäßig beschleunigten Bewegung (aus [7])

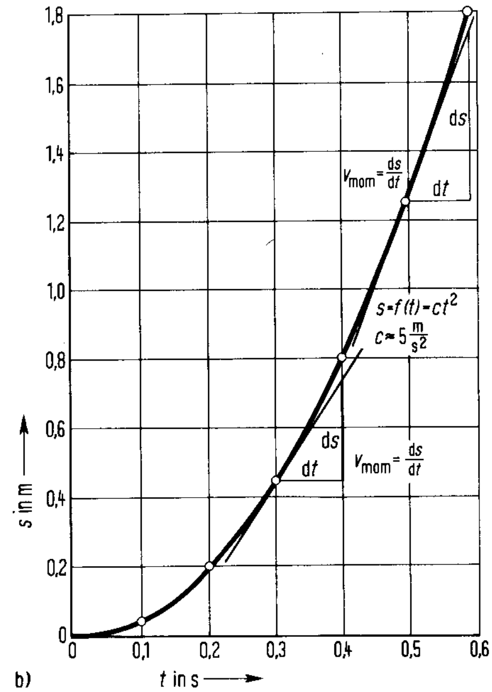


Bild 2.7: Weg-Zeit-Diagramm der aus der Ruhe gleichmäßig beschleunigten Bewegung (aus [7])

b) Funktion s(t)

Abhängigkeit des Wegs von der Zeit

Mit $s_1 = s(t_1) = \bar{v} \cdot t_1 = \frac{v_1}{2} t_1$ und $v_1 = a \cdot t_1$ folgt $s_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2$ (Gl. 2.11)

Es folgt:

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad mit\ a = const}$$

Allgemeine gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Mit dem Anfangsweg $s_0 = s(t_0)$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_o = v(t_0)$ ergeben sich folgende Formeln:

a) Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, Funktion v(t)

$$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0 \qquad mit\ a = const} \quad \text{(Gl. 2.12)}$$

dabei bedeutet $a > 0$ eine beschleunigte und $a < 0$ eine verzögerte Bewegung.

b) Weg-Zeit-Gesetz, Funktion s(t)

Mit $s_1 = \left(\frac{a \cdot t_1}{2} + v_0\right) \cdot t_1$ folgt $s_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_1$

Allgemein gilt:

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad mit\ a = const}$$ (Gl. 2.13)

dabei bedeutet a > 0 eine beschleunigte und a < 0 eine verzögerte Bewegung.

Erläuterung der Zusammenhänge zwischen s(t), v(t) und a(t) mit der Differential- und Integralrechnung:

$$\Downarrow \quad s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad \Uparrow$$

$$\text{Differentiation} \Downarrow \quad v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_0 \quad \Uparrow \text{ Integration}$$

$$\Downarrow \quad a(t) = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = a \Uparrow$$

Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen, sondern auch für Bewegungen mit zeitabhängiger Beschleunigung.

Weg- Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme:

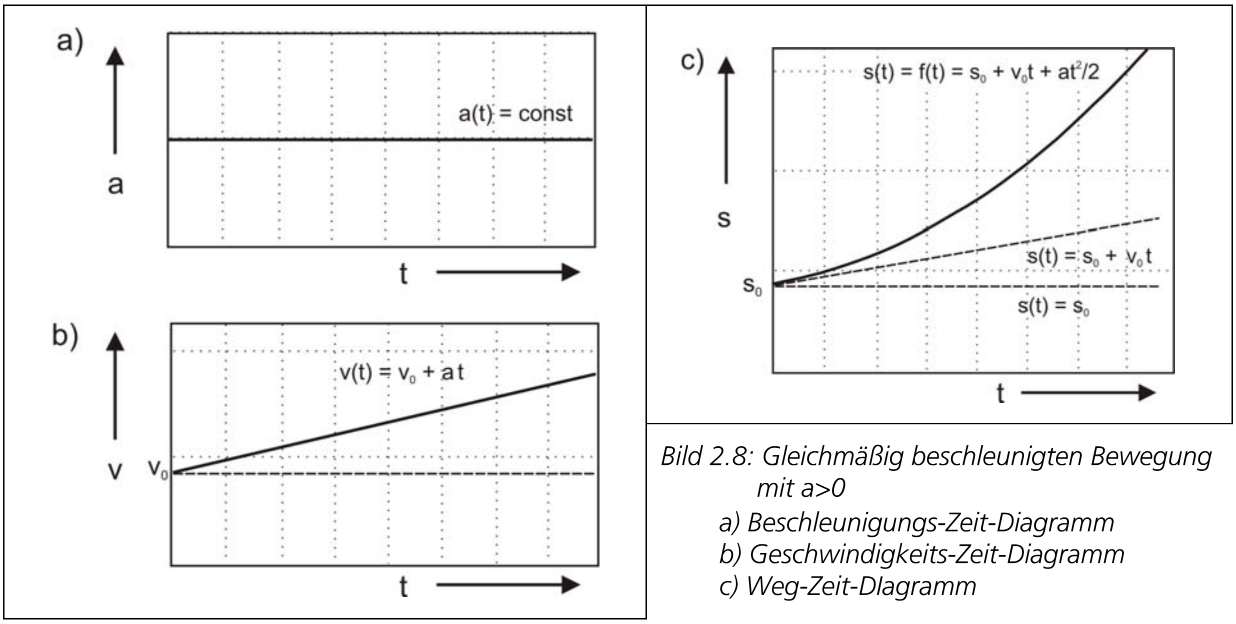


Bild 2.8: Gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit a>0
a) Beschleunigungs-Zeit-Diagramm
b) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm
c) Weg-Zeit-DIagramm

Zusammenfassung:

Es ergeben sich für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung folgende Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \ddot{s} = \dot{v} = a = const \\ v(t) &= a \cdot t + v_0 = \dot{s} \\ s(t) &= \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \end{aligned}}$$ (Gl. 2.14)

Beispiel:

Berechnung des Bremswegs s_B für den Fall negativer Beschleunigung (verzögerte Bewegung $a < 0$). Es sei t_B die Bremszeit, das heißt, dass das Fahrzeug nach Ablauf der Zeit t_B zum Stehen kommt. Damit ergibt sich als Bedingung für t_B: $v(t_B) = 0$.

Für eine verzögerte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt:

$$s_B = v_0 \cdot t_B + \frac{1}{2} a \cdot t_B^2 \quad und \quad v_B = v_{0B} + a \cdot t_B = 0 \quad mit\ a < 0$$

$\Rightarrow$ *Bremszeit*

$$t_B = \frac{v_0}{-a} > 0$$

$\Rightarrow$ *Bremsweg*

$$s_B = \frac{v_o^2}{-a} - \frac{v_o^2}{-2a} = \frac{v_o^2}{-2a} > 0$$

Damit erhält man für den Bremsweg

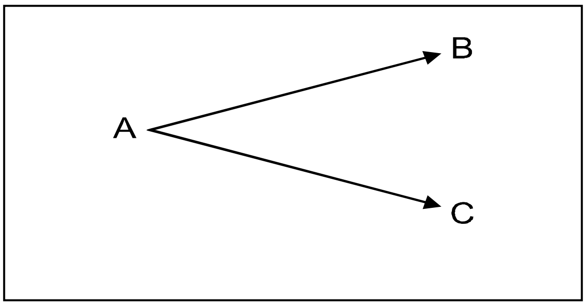
$$\boxed{s_B = -\frac{v_o^2}{2a}} \qquad \text{(Gl. 2.15)}$$

Es gilt $s_B > 0$, da $a < 0$!

III Vektoren und Wurfbewegungen

III.1 Richtung von Bewegungen

Bisher: Es wurden die Beträge der physikalischen Größen s, v und a betrachtet.
Jetzt: Zusätzlich kommen jetzt die Richtungen ins Spiel.



Die Wege von A nach B und von A nach C sind gleich lang.

Aber: Die Richtungen unterscheiden sich!

Definition:

Die physikalischen Größen Weg s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind **Vektoren** mit Betrag **und** Richtung.

Definition:

Physikalische Größen ohne Richtung (*z.B. Temperatur und Zeit*) nennt man **Skalare**.

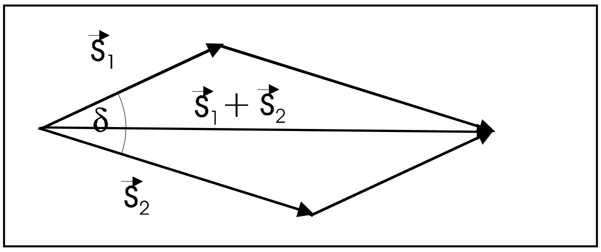
Schreibweise nach DIN 1303:

Vektoren schreibt man : $\vec{v}$
Beträge von Vektoren schreibt man: $v = |\vec{v}|$

In der Mathematik wird die Vektorenrechnung in der Vorlesung Mathematik 1 behandelt.

Für die Beschreibung von Wurfbewegungen genügt die Kenntnis der Vektoraddition und des Skalarprodukts:

Vektoraddition: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$
Skalarprodukt: $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = s_1 \cdot s_2 \cdot \cos(\vartheta)$ mit dem eingeschlossenen Winkel ϑ



Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{s}^{\,2} &= (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2 \\ &= \vec{s}_1^{\,2} + 2\,\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2^{\,2} \\ &= \vec{s}_1^{\,2} + \vec{s}_2^{\,2} + 2\,s_1\,s_2\cos(\vartheta)\end{aligned}$$

Dies ist exakt die Formel des Cosinus-Satzes (erweiterter Pythagoras für schiefwinklige Dreiecke), wenn man die Definition des Winkels ϑ als von den Vektoren eingeschlossenen Winkel berücksichtigt.

Folgerung:

Für den Betrag der Vektorsumme erhält man

$$\boxed{\vec{s} = \sqrt{\vec{s}_1^{\,2} + \vec{s}_2^{\,2} + 2\,s_1\,s_2\cos(\vartheta)}} \qquad \text{(Gl. 3.1)}$$

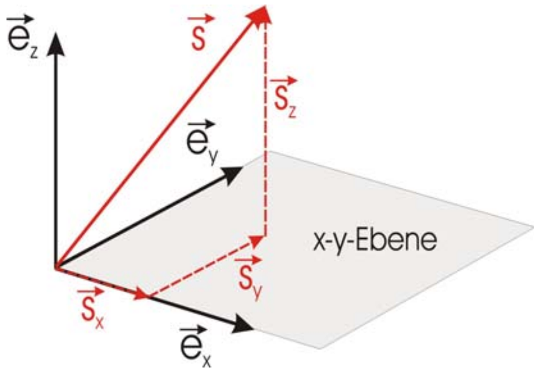
Darstellung von Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem

Wir benutzen zur Darstellung von Vektoren ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren zeigen in Richtung der Koordinatenachsen, die jeweils senkrecht aufeinander stehen. Zeigt man mit der rechten Hand ein solches rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem, so zeigt

- die x-Achse in Richtung des Daumens (Einheitsvektor $\vec{e}_x$),
- die y-Achse in Richtung des Zeigefingers (Einheitsvektor $\vec{e}_y$) und
- die z-Achse in Richtung des Mittelfingers (Einheitsvektor $\vec{e}_z$).

Jeder Vektor kann dann als Summe von Vektoren in x-, y- und z-Richtung geschrieben werden.

$$\vec{s} = \vec{s}_x + \vec{s}_y + \vec{s}_z = s_x \cdot \vec{e}_x + s_y \cdot \vec{e}_y + s_z \cdot \vec{e}_z$$



Ein solcher Vektor wird üblicherweise als Spaltenvektor dargestellt:

$$\vec{s} = s_x \cdot \vec{e}_x + s_y \cdot \vec{e}_y + s_z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \qquad \text{(Gl. 3.2)}$$

Damit führt das Problem der Vektoraddition auf eine Vektorgleichung, die einem algebraischen Gleichungssystem mit 3 Gleichungen entspricht:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x1} \\ s_{y1} \\ s_{z1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{x2} \\ s_{y2} \\ s_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x1} + s_{x2} \\ s_{y1} + s_{y2} \\ s_{z1} + s_{z2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s_x = s_{x1} + s_{x2} \\ s_y = s_{y1} + s_{y2} \\ s_z = s_{z1} + s_{z2} \end{matrix} \qquad \text{(Gl. 3.3)}$$

III.2 Ungestörte Überlagerung von Bewegungen

Physikalisches Prinzip der ungestörten Überlagerung von Bewegungen:

Komplexe Bewegungen eines Körpers können in Bewegungen zerlegt werden, die unabhängig voneinander durchlaufen werden und die sich überlagern, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Beispiel:

Schiff in strömendem Fluss (konstante Geschwindigkeiten)
(Rechenbeispiele siehe Aufgaben III.4 und III.5 im Aufgabenteil)

Die resultierende Geschwindigkeit des Schiffs ergibt sich durch vektorielle Überlagerung der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_{Strömung}$ der Flussströmung und der Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_{Schiff}$ des Schiffs.

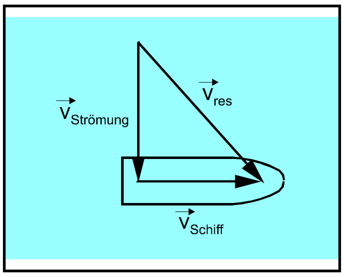


Bild 3.1: Schiff in Flussströmung (konstante Geschwindigkeiten)

Man erhält: $\vec{v}_{Res} = \vec{v}_{Schiff} + \vec{v}_{Strömung}$

Merksatz:

Man kann Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mit Vektoren derselben physikalischen Größe überlagern, d.h. vektoriell addieren. Es gilt

Überlagerung von Vektoren = vektorielle Addition

Wir benutzen zur Zerlegung komplexer Bewegungen das rechtshändige kartesische Koordinatensystem, die unabhängigen Bewegungen zeigen in Richtung dieses Koordinatensystems. Wir behandeln die ungestörte Überlagerung von Bewegungen am Beispiel von Wurfbewegungen. Und beschränken uns dabei auf 2 unabhängige Bewegungsrichtungen, die waagerechte Bewegung in x-Richtung und die senkrechte Bewegung in z-Richtung.

VERSUCH „Waagerechter Wurf“:

Kugel 1: Durch die waagerechte Anfangsgeschwindigkeit v_{0x} erhält sie eine konstante waagerechte Geschwindigkeit v_{0x} durch die nach unten gerichtete Fallbeschleunigung g erhält sie eine linear mit der Zeit zunehmende senkrechte Geschwindigkeitskomponente v_z.

Kugel 2: Unterliegt ausschließlich dem freien Fall und der Beschleunigung durch die Fallbeschleunigung g.

Ergebnis des Versuchs:

Beide Kugeln treffen gleichzeitig auf dem Fußboden auf. Die waagerechte und die senkrechte Bewegung beeinflussen sich gegenseitig nicht

Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Betrag der Geschwindigkeit v_w.

Folgerung aus dem Versuch:

Wurfbewegungen können als Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen waagerechten Bewegung in x-Richtung $\vec{s}_x = \vec{v}_{0x} \cdot t$ und einer gleichmäßig beschleunigten senkrechten Bewegung $\vec{s}_z = v_{0z} + \frac{1}{2}\vec{a}_z \cdot t^2$ in z-Richtung dargestellt werden. Es gelten die Vektorgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{s}(t) &= \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \end{aligned}} \qquad \text{(Gl. 3.4)}$$

III.3 Waagerechter Wurf

- x-Richtung: Da Reibungseinflüsse nicht betrachtet werden, bleibt die waagerechte Bewegung erhalten. Es handelt sich um eine gleichförmige Bewegung.
- y-Richtung: kann vernachlässigt werden, da jede Wurfbewegung mit einem geeigneten Koordinatensystem als 2-dimensionale Bewegung darstellbar ist.
- z-Richtung: Es wirkt in z-Richtung die Fallbeschleunigung senkrecht nach unten. Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, d.h. die senkrechte Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu.
- Die Auftragung des v_x-v_y-Diagramms mit der Zeit t als Parameter ist in 2-dimensionaler darstellung in Bild 3.2 dargestellt, das entsprechende s_x-s_y-Diagramm findet man in Bild 3.3.

Die kinematischen Größen in vektorieller Darstellung
(waagerechter Weg s_W in Bild 1.12 entspricht s_x, senkrechter Weg s_S nach unten entspricht s_z):

- Beschleunigung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y \text{ vernachlässigt} \\ a_z = -g \end{matrix}$$

- Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_x = v_0 \\ v_y \text{ vernachlässigt} \\ v_z = -gt \end{matrix}$$

Der Körper befindet sich während der Wurfbewegung auf der parabelförmigen Wurfbahn. Die Geschwindigkeitsvektoren liegen in jedem Punkt tangential zur Wurfbahn.

Folgerung:

Die Geschwindigkeit ändert sich beim waagerechten Wurf nach Betrag und Richtung.

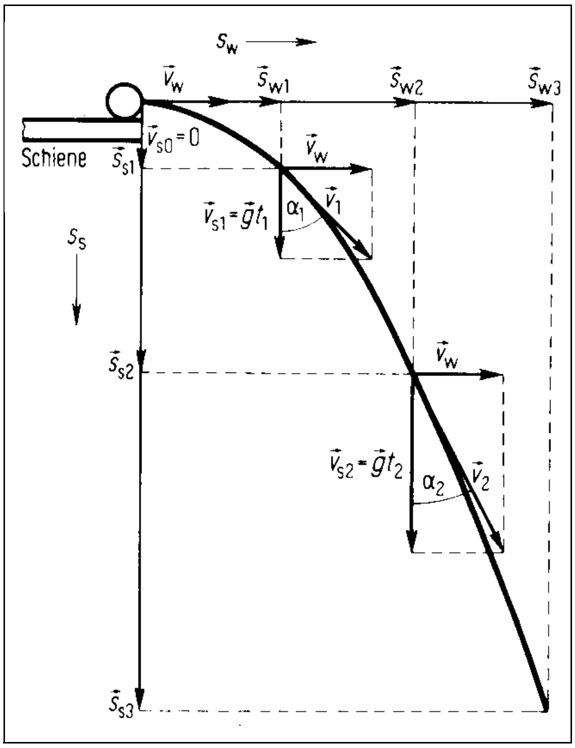


Bild 3.2: v-t-Diagramm des waagerechten Wurfs als Beispiel für ungestörte Überlagerung von Geschwindigkeiten (aus [7])

- Beschleunigung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y \text{ vernachlässigt} \\ a_z = -g \end{matrix}$$

- Weg

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s_x = v_0 \cdot t \\ s_y \text{ vernachlässigt} \\ s_z = -\frac{1}{2} g t^2 \end{matrix}$$

Der Körper befindet sich während der Wurfbewegung jeweils an der Spitze des Vektors $\vec{s}(t)$.

Folgerung:

Der Ortsvektor $\vec{s}(t)$ des geworfenen Körpers dreht sich mit fortschreitender Zeit immer mehr in die senkrechte Richtung, der Betrag wächst mit der Zeit.

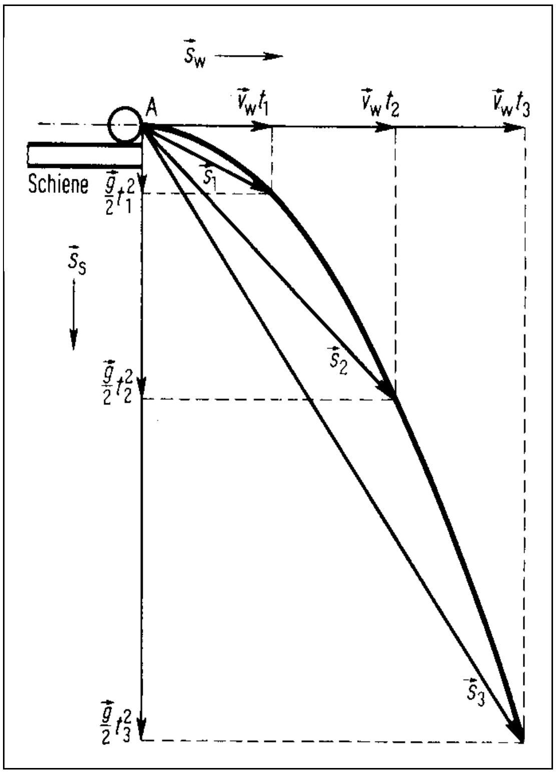


Bild 3.3: Waagerechter Wurf in vektorieller Darstellung durch Zerlegung in eine waagerechte und eine senkrechte Bewegungskomponente (aus [7])

Zusammenfassung der Formeln für den waagerechten Wurf:

Wegvektor in normaler Vektorschreibweise:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{s}_x(t) &= \vec{v}_{0x}\cdot t = v_{0x}\cdot t\cdot\vec{e}_x\\ \vec{s}_z(t) &= \tfrac{1}{2}\vec{g}\cdot t^2 = -\tfrac{1}{2}g\cdot t^2\cdot\vec{e}_z\\ \vec{s}(t) &= \vec{s}_x(t)+\vec{s}_z(t) = v_{0x}\cdot t\cdot\vec{e}_x + \tfrac{1}{2}g\cdot t^2\cdot\vec{e}_z\end{aligned}} \qquad \text{(Gl. 3.5a)}$$

Wegvektor in Spaltenvektorschreibweise:

$$\boxed{\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t)\\ s_z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t\\ -\tfrac{1}{2}g\cdot t^2\end{pmatrix}} \qquad \text{(Gl. 3.5b)}$$

Resultierender Geschwindigkeitsvektor in Spaltenschreibweise:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t)\\ v_z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\\ -g\cdot t\end{pmatrix}} \qquad \text{(Gl. 3.6)}$$

Beispiel: Waagerechter Wurf einer Kugel

Ausgangspunkt: Kugel (punktförmig) wird mit v_{0x} = 3 m/s horizontal weggeschleudert.

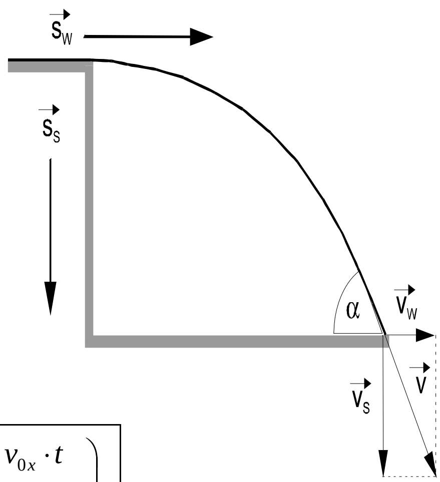
Gesucht sind:

a) Aufprallzeit t_A der Kugel auf den Fußboden, der 1,25 m tiefer liegt (s_{zA} = - h = -1,25 m)

b) Wurfweite w der Kugel

c) Betrag der Momentangeschwindigkeit beim Aufprall

d) Aufprallwinkel α



Lösung: s-t-Diagramm

a) $\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t)\\ v_z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\\ -g\cdot t\end{pmatrix}}$ $\boxed{\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t)\\ s_z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t\\ -\tfrac{1}{2}g\cdot t^2\end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{s}(t_A) = \begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t_A\\ -\tfrac{1}{2}g\cdot t_A{}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w\\ -h\end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &v_{0x}\cdot t_A w\\ &-\tfrac{1}{2}g\cdot t_A{}^2 = -h\end{aligned}}$$

b) $h = \dfrac{1}{2}gt_A^2 \Rightarrow t_A = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \Rightarrow t_A = 0{,}5\,s \qquad w = v_{0x}\cdot t_A = 1{,}5\,m$

c) $$\left.\begin{aligned} v_z(t_A) &= -g\cdot t_A = -4{,}91\frac{m}{s}\\ v_x(t_A) &= 3\frac{m}{s}\end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{4{,}9^2 + 3^2}\frac{m}{s} = 5{,}75\frac{m}{s}$$

d) $$\tan(\alpha) = \frac{v_x}{v_z} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_x}{v_z}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan(0{,}61) = 31{,}42°$$

IV Kinematik der Drehbewegung

IV.1 Gleichförmige Kreisbewegung

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunkts Mp auf einer Kreisbahn mit dem Radius r. Auf der Kreisbahn legen wir folgende kinematische Größen fest (siehe Bild 3.1):

- s: zurückgelegter Weg auf der Kreisbahn
- v: Bahngeschwindigkeit auf der Kreisbahn
- a_t: Bahnbeschleunigung auf der Kreisbahn
- φ: Winkel, der vom Radiusvektor überstrichen wird

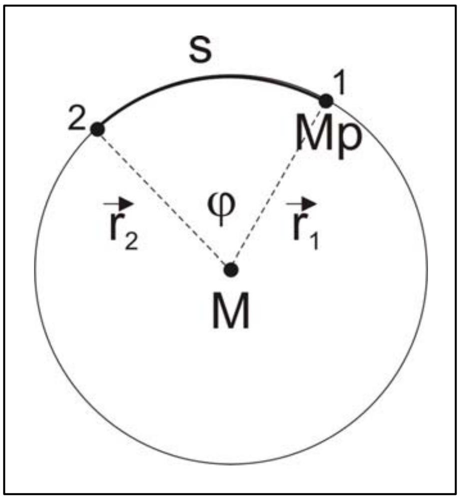


Bild 4.1: Bewegung eines Massenpunkts auf einer Kreisbahn

Zusammenhang zwischen s und φ:

Bei einer Bewegung einmal um den Kreis wird der Weg $s_U = U = 2\pi r$ zurückgelegt. Der überstrichene Winkel beträgt $\varphi_U = 360°$. Nimmt man jedoch den Winkel im Bogenmaß, so erhält man in diesem Fall $\varphi_U = 2\pi$ rad. Zur Kennzeichnung des Winkels im Bogenmaß wird häufig die Pseudo-Einheit rad benutzt. Damit ergibt sich $s_U = U = 2\pi r = \varphi_U \cdot r \Rightarrow \varphi_U = U/r$.

Für **beliebige zurückgelegte Wege** auf der Kreisbahn gilt:

$$\frac{s}{U} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \frac{s}{r} = \varphi$$

Damit erhält man folgenden Beziehungen zwischen dem auf der Kreisbahn zurückgelegten Weg s und dem überstrichenen Winkel φ:

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r} \text{ bzw. } s = \varphi \cdot r} \qquad \text{(Gl. 4.1)}$$

Die Beziehungen 3.1 gelten nur, wenn der Winkel φ im Bogenmaß eingesetzt wird. Bei Benutzung der Winkel in Winkelgraden ergibt sich bei der Anwendung von 3.1 Unsinn!

Zusammenhang zwischen Winkeln im Gradmaß und im Bogenmaß:

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- Ganzkreis: φ = 360° = 2π rad = 6,2832 rad
- Halbkreis: φ = 180° = π rad = 3,1416 rad
- Viertelkreis: φ = 90° = π/2 rad = 1,5708 rad
- Achtelkreis: φ = 45° = π/4 rad = 0,7854 rad

Allgemeine Umrechnungsformel:

- **φ in rad = (φ in °)·π/180**
- **φ in ° = (φ in rad)·180/π**

Definition:

Der **Betrag der Bahngeschwindigkeit** ist das Verhältnis aus dem auf der Kreisbahn zurückgelegten Weg s und der dafür benötigten Zeit.

Definition:

Der **Momentanwert des Betrags der Bahngeschwindigkeit** ist festgelegt als Differentialquotient aus Weg auf der Kreisbahn und Zeit.

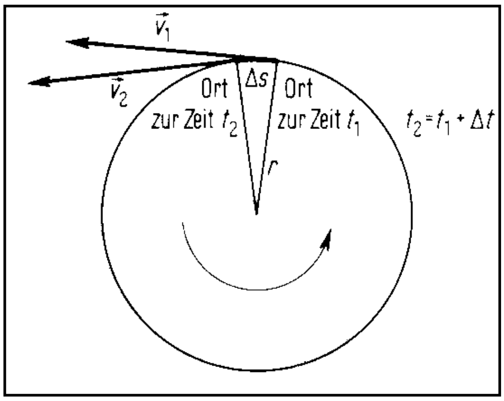


Bild 3.2: Bahngeschwindigkeit eines Massenpunkts auf einer Kreisbahn (aus [7])

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \qquad \text{(Gl. 4.2)}$$

Definition:

Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** ist der Momentanwert des Betrags der Bahngeschwindigkeit konstant, d.h. es gilt

$$v = \dot{s} = const$$

Bemerkung:

- Bei der geradlinig gleichförmigen Bewegung gilt:
  $\Rightarrow$ der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ist nach Betrag und Richtung konstant
- Bei der gleichförmigen Kreisbewegung gilt:
  $\Rightarrow$ der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ ist konstant, die Richtung ändert sich jedoch ständig und liegt immer tangental zur Kreisbahn.

Folgerung:

Da sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ständig ändert, handelt es sich bei der gleichförmigen Kreisbewegung trotz konstanten Betrags der Geschwindigkeit um eine beschleunigte Bewegung!

Definition:

Die **verallgemeinerte Definition der Beschleunigung** als Vektor lautet:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}} \qquad \text{(Gl. 4.3)}$$

Da sich bei der gleichförmigen Kreisbewegung nur die Richtung, jedoch nicht der Betrag der Geschwindigkeitsvektors ändert, ist ein Beschleunigungsvektor gesucht, der den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert.

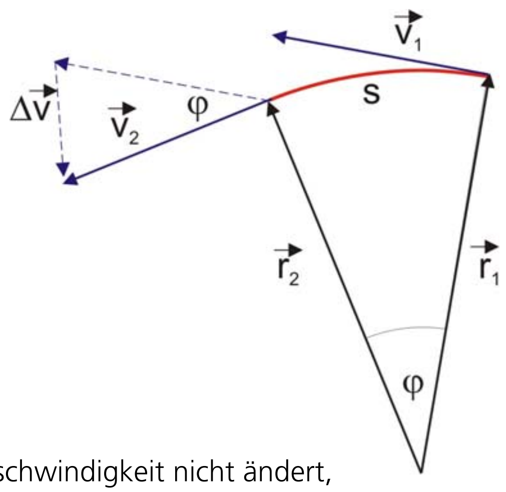
Definition:

Die **Radialbeschleunigung** $\vec{a}_r$ ist definiert als:

$$\boxed{\vec{a}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad bei \; v = const} \qquad \text{(Gl. 4.4)}$$

Folgerung:

Es sind jetzt Betrag und Richtung der Radialbeschleunigung zu bestimmen.



- Betrag
  Für differentielle Zeiten dt (extrem kleine Δt) gilt

$$\frac{ds}{r} = \frac{dv}{v} \Rightarrow dv = \frac{ds \cdot v}{r} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{ds \cdot v}{dt \cdot r} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow a_r = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

- Richtung
  Eine solche Beschleunigung, die den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, muss zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehen. Es gilt also:

$$\vec{a}_r \perp \vec{v}$$

  Da $\vec{a}_r$ immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor v steht, ist $\vec{a}_r$ immer radial auf den Kreismittelpunkt gerichtet (daher Radialbeschleunigung).

Zusammenfassung:

Die Radialbeschleunigung $\vec{a}_r$ der Kreisbewegung

$\Rightarrow$ ist immer radial auf den Kreismittelpunkt gerichtet,

$\Rightarrow$ steht immer senkrecht auf $\vec{v}_r$, d.h. es gilt immer $\vec{a}_r \perp \vec{v}$ und

$\Rightarrow$ hat den Betrag $a_r = \dfrac{v^2}{r}$

Es gilt also

$$\boxed{|a_r| = a_r = \frac{v^2}{r}} \qquad \text{(Gl. 4.5)}$$

VERSUCH:
- Demonstration der gleichförmigen Kreisbewegung am Winkelrad
- Kugel + Faden

Beispiel:

Eine Astronautenschleuder zum Training von Astronauten besitzt einen Radius von r =5 m. Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit v, wenn eine Radialbeschleunigung von 8g erzeugt werden soll?

$$8g = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{8gr} = 19.81\frac{m}{s}$$

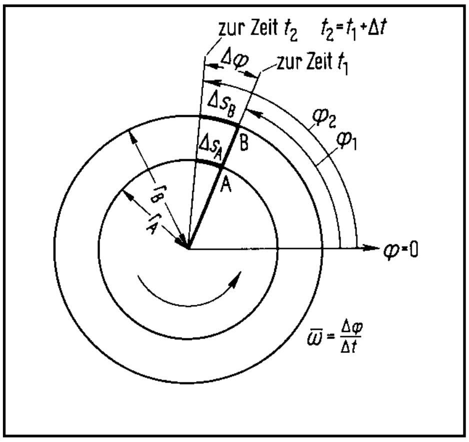


Bild 3.2: Kreisbewegung und Winkelgeschwindigkeit (aus [7])

Problem:

Die Bahngeschwindigkeit ist eine radiusabhängige Größe, d.h. verschiedene Punkte einer rotierenden Scheibe besitzen unterschiedliche Bahngeschwindigkeiten

$r_A > r_B \quad \Rightarrow \Delta s_{AA} > r_B \quad \Rightarrow \quad v_A > v_B$

Abhilfe:

Es müssen radiusunabhängige Größen definiert werden, die unabhängig vom radialen Abstand vom Mittelpunkt die Kreisbewegung beschreiben.

Für alle nachfolgenden Formeln ist eine gleichförmige Kreisbewegung unterstellt, d.h. es gilt die Beziehung n = const.

Definition:

Die **Drehzahl n (Drehfrequenz n)** ist definiert als Quotient aus der Zahl der Umdrehungen N und der benötigten Zeit t:

$$\boxed{n = \frac{N}{t}} \qquad \text{(Gl. 4.6)}$$

Bemerkungen:

1. Da es sich um eine auf die Zeit bezogene physikalische Größe handelt, müsste die Drehzahl eigentlich Drehfrequenz heißen.
2. Die Einheit der Drehzahl ist [m] = 1/s = 1 Hz.
3. Für gleichförmige Kreisbewegungen gilt n = const.

Definition:

Die Umdrehungsperiode T ist diejenige Zeit, die für ein Durchlaufen der Kreisbahn gebraucht wird.

Folgerungen:

1. Mit der Umdrehungsperiode T folgt für die Drehzahl n

$$\boxed{n = \frac{1}{T}} \qquad \text{(Gl. 4.7)}$$

2. Für den Zusammenhang zwischen Drehzahl n und Bahngeschwindigkeit v gilt, falls die Drehzahl n = const

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n \quad bei\ n = const} \qquad \text{(Gl. 4.8)}$$

Beispiel:

Eine LP dreht sich mit einer Drehzahl von n = 33 1/s. Die Bahngeschwindigkeit v in einem radialen Abstand von r = 10 cm vom Mittelpunkt beträgt

$$v = 2\pi r n = 2\pi\, 0.1\, m \cdot \frac{33}{60}\frac{1}{s} = 0.345 \frac{m}{s}$$

Vorbemerkung:

Als radiusunabhängige physikalische Weggröße dient derjenige Winkel, den der Strahl vom Kreismittelpunkt zum Massenpunkt überstreicht. Dieser Strahl wird auch Fahrstrahl genannt.

Definition:

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist definiert als das Verhältnis des überstrichenen Winkels $\Delta\varphi$ zur benötigten Zeit Δt. Die momentane Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}} \qquad \text{(Gl. 4.9)}$$

Folgerungen:

1. Die physikalische Größe Winkelgeschwindigkeit ist unabhängig vom Radius der Kreisbahn.
2. Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist $[\omega]$ = rad/s, wobei der Winkel im Bogenmaß eingesetzt werden muss.
3. Für die gleichförmige Kreisbewegung gilt $\omega = \overline{\omega} = const$
4. Zusammenhang zwischen Drehzahl n und Winkelgeschwindigkeit ω, falls die Drehzahl n = const :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \;\; b\,ei\,n = const} \qquad \text{(Gl. 4.10)}$$

5. Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit ω:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \qquad \text{(Gl. 4.11a)}$$

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \text{(Gl. 4.11b)}$$

6. Zusammenhang zwischen Radialbeschleunigung a_r und Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$ (Gl. 4.12)

Zusammenfassung:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$ (Gl. 4.13a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \frac{v}{r}$$ (Gl. 4.13b)

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n = \frac{v}{r}$$ (Gl. 4.13c)

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$ (Gl. 4.13d)

IV.2 Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

Beispiel:

Die Kurbelwelle eines Motors ändert ihre Drehzahl vom Stillstand bis zur Enddrehzahl.

Definition:

Bei einer ungleichförmigen Kreisbewegung ändern sich Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

Definition:

Die momentane Bahnbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung) ist festgelegt als das Verhältnis aus der Änderung der Bahngeschwindigkeit und der benötigten Zeit

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}}$$ (Gl. 4.14)

Die Richtung der Bahnbeschleunigung $\vec{a}_t$ ist tangential zur Kreisbahn und damit immer senkrecht zu $\vec{a}_r$.

Definition:

Die momentane Winkelbeschleunigung ist festgelegt als das Verhältnis aus der Änderung der Winkelgeschwindigkeit und der benötigten Zeit

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}}$$ (Gl. 4.15)

Folgerungen:

1. Wegen $\omega = \frac{v}{r}$ und r = const gilt : $\boxed{\alpha = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{r}}$ (Gl. 4.16)
2. Einheit der Winkelbeschleunigung: [α] = rad/s^2 (Winkel muss im Bogenmaß eingesetzt werden).
3. Für den Zusammenhang zwischen Winkelbeschleunigung α und Bahnbeschleunigung a_t gilt :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad \text{(Gl. 4.17)}$$

Zusammenfassung:

Die Bahnbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung) $\vec{a}_t$ der Kreisbewegung

- ist immer tangential zur Kreisbahn gerichtet,
- steht immer parallel zu $\vec{v}$,
  d.h. es gilt immer $\vec{a}_t \uparrow\uparrow \vec{v}$ oder $\vec{a}_t \uparrow\downarrow \vec{v}$,
- steht immer senkrecht auf $\vec{a}_r$,
  d.h. es gilt immer $\vec{a}_t \perp \vec{a}_r$ und
- hat den Betrag $a_r = r\,\alpha$

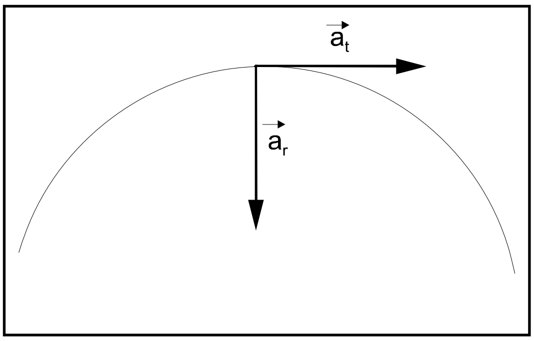


Bild 4.4: Zerlegung der Beschleunigung $\vec{a}$ in die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ und die Radialbeschleunigung $\vec{a}_t$

Zusammenhang zwischen den Bahngrößen und den Winkelgrößen:

Die Beziehung zwischen dem auf der Kreisbahn zurückgelegten Weg und dem überstrichenen Winkel (im Bogenmaß) lautet (siehe 4.1):

$$\boxed{s = r\varphi} \quad \text{(Gl. 4.18)}$$

Die Beziehung zwischen der Bahngeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit lautet (siehe Gl. 4.10):

$$\boxed{v = r\omega} \quad \text{(Gl. 4.19)}$$

Die Beziehung zwischen der Tangentialbeschleunigung und der Winkelbeschleunigung lautet (siehe Gl. 4.16):

$$\boxed{a_t = r\alpha} \quad \text{(Gl. 4.20)}$$

Damit ergibt sich insgesamt folgende Merkregel:

Bahngröße = Winkelgröße • Radius
Winkelgröße = Bahngröße / Radius

Definition:

Eine Kreisbewegung heißt **gleichmäßig beschleunigt**, wenn die Momentanwerte der Winkel- und Bahnbeschleunigung konstant sind. Dann gilt

$$a_t = const \ und \ \ \alpha = const$$

Folgerungen:

1. In Analogie zu den Gesetzen der geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt für die Abhängigkeit der Bahn- und Winkelgeschwindigkeit von der Zeit v ~ t und ω ~ t.

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a_t t \\ \omega(t) &= \omega_0 + \alpha \cdot t \end{aligned}}$$ (Gl. 4.21a, 4.21b)

2. Aus Gleichung 4.18b folgt durch Division durch 2π

$$\boxed{\frac{\omega(t)}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t}$$ (Gl. 4.22)

$$\boxed{n(t) = n_0 + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t}$$ (Gl. 4.23)

3. Befindet sich er Körper zur Zeit t = 0 in Ruhe, so gilt für die Anfangsbedingungen (Integrationskonstanten) $v_0 = \omega_0 = n_0 = 0$
4. In Analogie zu den Gesetzen der geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt für die Abhängigkeit der auf der Kreisbahn zurückgelegten Weg s und dem vom Radiusvektor überstrichenen Winkel φ :

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a_t t^2 \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \end{aligned}}$$ (Gl. 4.24a) (Gl. 4.24b)

5. Aus Gleichung 4.20b folgt durch Division durch 2π: $\frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{\varphi_0}{2\pi} + \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot t + \frac{\alpha}{4\pi} \cdot t^2$

$$\boxed{N(t) = N_0 + n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4\pi} \cdot t^2}$$ (Gl. 4.25)

Zusammenfassung:

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetze	Weg-Zeit-Gesetze
$v(t) = v_0 + a_t \cdot t$ $\omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t$ $n(t) = n_0 + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t$	$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$ $N(t) = N_0 + n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4\pi} \cdot t^2$

Beispiel:

Ein Motor beschleunigt aus dem Stillstand heraus gleichförmig und macht dabei innerhalb einer Zeit von t = 10 s N = 250 Umdrehungen. Wie groß ist die Drehzahl nach 10 s?

Lösung: *Wegen $n_0 = 0$ gilt :* $N(t) = \frac{\alpha}{4\pi} t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi N}{t} = 10\pi \frac{1}{s^2}$

$$\Rightarrow n = \frac{\alpha}{2\pi} t = 50 \frac{1}{s}$$

φ(t) - und ω(t)-Diagramme

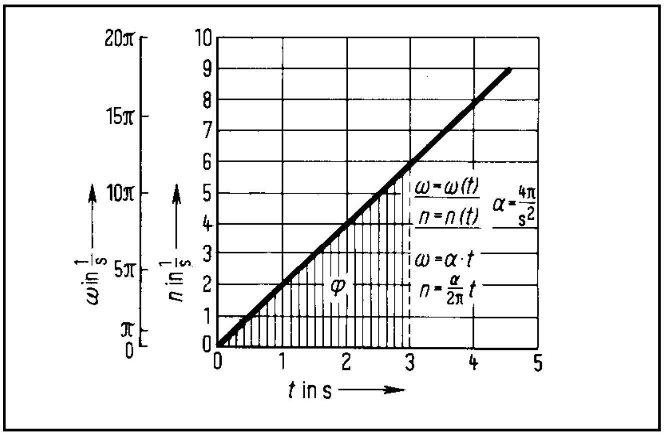


Bild 4.5: ω(t)-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung (aus [7])

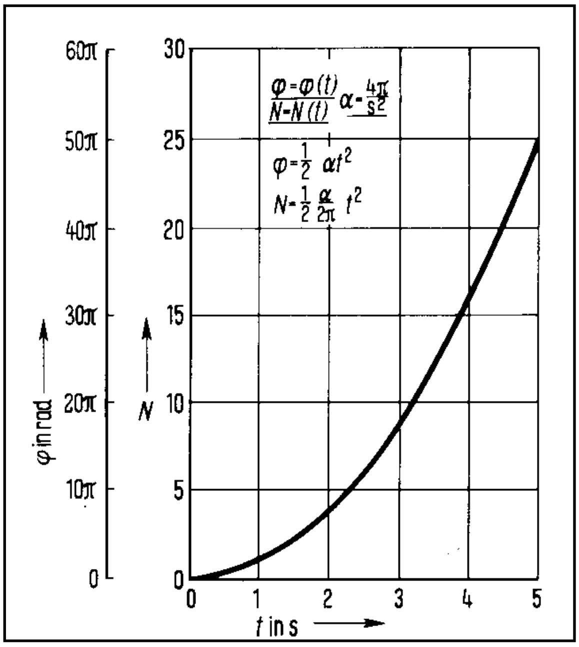


Bild 4.6: φ(t)-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung (aus [7])