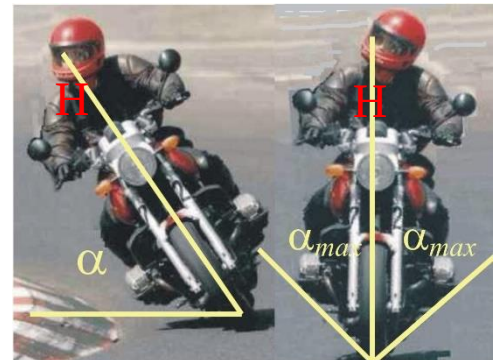


1. Motorräder fahren Kurven mit Schräglage (charakterisiert durch den Winkel α im Bild rechts), so dass die Resultierende aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft parallel zur Hochachse (**H**) verläuft. Bauartbedingt kann im Beispiel die Schräglage $\alpha_{\max} = 45^\circ$ nicht überschritten werden.
- a. Betrachten Sie eine gleichmäßig beschleunigte Motorradfahrt auf einer Kreisstrecke mit Radius $R = 62,5 \text{ m}$. In Abständen von 10 m und 40 m nach dem Start passiert das Motorrad Lichtschranken. Die Messung der Zeit zwischen den Messpunkten ergibt $\Delta t = 2 \text{ s}$.



- Wie groß ist die Bahnbeschleunigung? 5 ms^{-2}
- b. Nach welcher Fahrtstrecke auf dem Kreis wird die maximale Schräglage $\alpha_{\max} = 45^\circ$ erreicht? $62,5 \text{ m}$
- c. Welche Gesamtbeschleunigung a_{ges} hat das Motorrad in diesem Punkt? $11,2 \text{ ms}^{-2}$

Lösungen:

- 1a. Für eine gleichmäßige Beschleunigung gilt:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_B t^2$$

wobei

a_B die Bahnbeschleunigung bezeichnet.

Erster Messpunkt bei $s_1 = 10 \text{ m}$:

$$s_1 = s_1(t_1) = \frac{1}{2} a_B t_1^2 = 10 \text{ m}$$

Für $s_2 = 40 \text{ m}$ gilt:

$$s_2 = s_2(t_2) = \frac{1}{2} a_B t_2^2 = 40 \text{ m}$$

Die Wegdifferenz ist:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 30 \text{ m}$$

Setze:

$$t_2 = t_1 + \Delta t = t_1 + 2 \text{ s}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} a_B (t_1 + \Delta t)^2$$

Allgemeiner Lösungsweg (etwas umständlich):

Für die Differenz $s_2 - s_1$ gilt:

$$(s_2 - s_1) = \Delta s = a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B (\Delta t)^2$$

$$2 \cdot a_B t_1 \Delta t = 2 \cdot \Delta s - a_B (\Delta t)^2$$

Für t_1 gilt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_B}}$$

$$2 \cdot a_B \sqrt{\frac{2s_1}{a_B}} \Delta t = 2 \cdot \Delta s - a_B (\Delta t)^2$$

Quadrieren: $4 \cdot a_B^2 \cdot \frac{2s_1}{a_B} \cdot \Delta t^2 = 4 \cdot \Delta s^2 - 4 \cdot \Delta s \cdot a_B \cdot (\Delta t)^2 + a_B^2 \cdot (\Delta t)^4$

Umstellen: $a_B^2 (\Delta t)^4 - 8 \cdot a_B \cdot s_1 (\Delta t)^2 - 4 \cdot \Delta s \cdot a_B (\Delta t)^2 = -4 \cdot \Delta s^2$

Quadratische Ergänzung:

$$a_B^2 (\Delta t)^4 - 2 \cdot a_B \cdot (\Delta t)^2 \cdot (4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s) + (4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s)^2 = -4 \cdot \Delta s^2 + (4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s)^2$$

Umstellen: $(a_B \cdot \Delta t^2 - (4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s))^2 = -4 \cdot \Delta s^2 + 16 \cdot s_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot s_1 \cdot 2 \cdot \Delta s + 4 \cdot \Delta s^2$

$$(a_B \cdot \Delta t^2 - (4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s))^2 = 16 \cdot s_1^2 + 16 \cdot s_1 \cdot \Delta s$$

$$a_{B\pm} = \frac{1}{\Delta t^2} \left((4 \cdot s_1 + 2 \cdot \Delta s) \pm 4 \sqrt{s_1^2 + s_1 \cdot \Delta s} \right)$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$a_{B\pm} = \frac{1}{4s^2} \left((4 \cdot 10 + 2 \cdot 30)m \pm 4 \sqrt{(100 + 10 \cdot 30)m^2} \right)$$

$$a_{B\pm} = \frac{1}{4s^2} \left((40 + 60)m \pm 4 \sqrt{400m^2} \right)$$

$$a_B = 25 \pm 20$$

$$a_{B+} = (25 + 20)ms^{-2} = 45ms^{-2} \text{ scheidet aus}$$

Ergebnis: $a_{B-} = (25 - 20)ms^{-2} = 5ms^{-2}$

Vereinfachter Lösungsweg (durch Einsetzen von Zahlenwerten ohne Einheiten):

Für die Differenz $s_2 - s_1$ gilt: $(s_2 - s_1) = \Delta s = a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B (\Delta t)^2$

Einsetzen von Zahlenwerten: $30 = a_B t_1 \cdot 2 + \frac{1}{2} a_B \cdot 4$

Für t_1 gilt: $t_1 = \sqrt{\frac{20}{a_B}}$

$$15 = a_B \sqrt{\frac{20}{a_B}} + a_B$$

Quadrieren: $(15 - a_B)^2 = 225 - 30a_B + a_B^2 = a_B^2 \cdot \frac{20}{a_B} = 20a_B$

Quadratische Ergänzung: $a_B^2 - 50a_B + 25^2 = -225 + 625 = 400$

$$(a_B - 25)^2 = 400 = 20^2$$

$$a_{B\pm} = +25 \pm 20$$

$$a_{B+} = +25 + 20 = 45 \text{ scheidet aus}$$

Ergebnis: $a_{B-} = +25 - 20 = 5$

1b. Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{\max} = 45^\circ$ ist die Zentrifugalkraft gleich der Gewichtskraft.

Es gilt: $F_{zf} = m \frac{v_{\max}^2}{R} = m g = F_g$

Es folgt:

$$v_{\max} = \sqrt{Rg} = \sqrt{62,5 \text{ m} \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

Zeit zum Erreichen von $v_{\max}$:

$$t_{\max} = \frac{v_{\max}}{a_B} = \frac{25 \text{ m s}^{-1}}{5 \text{ m s}^{-2}} = 5 \text{ s}$$

Fahrtstrecke:

$$s_{\max} = \frac{1}{2} a_B t_{\max}^2 = \frac{1}{2} 5 \text{ m s}^{-2} (5 \text{ s})^2 = 62,5 \text{ m}$$

1c. Gesamtbeschleunigung:

$$a_{\text{ges}} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2}$$

Radialbeschleunigung = Zentripetalbeschleunigung = - Zentrifugalbeschleunigung

Zentrifugalbeschleunigung:

$$|a_R| = |a_{zf}| = \frac{v_{\max}^2}{R} = 10 \text{ m s}^{-2}$$

Gesamtbeschleunigung:

$$a_{\text{ges}} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} \text{ m s}^{-1} = 11,2 \text{ m s}^{-2}$$

1. Auf einer ebenen Kreisbahn mit Durchmesser von 200 m wird ein Motorrad getestet. Die Testfahrt erfolgt zunächst gleichmäßig beschleunigt bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit und anschließend gleichförmig. Zur Kontrolle der Beschleunigung befinden sich Lichtschranken im Abstand von 10 m und 22,5 m nach dem Start zur Messung der Zeitdifferenz Δt .

a. Wie groß ist Δt , wenn die Bahnbeschleunigung $a_B = 5 \text{ m s}^{-2}$ beträgt?

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

b. Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$, die dadurch gegeben sein soll, dass das Motorrad eine Schräglage von 45° erreicht hat?

$$v_{\max} = 31,62 \text{ m s}^{-1}$$

c. Der Weg bis zum Erreichen von $v_{\max}$ sei $S_{\max}$. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung nach der Wegstrecke $S_{\max}/2$ und welche Schräglage hat das Motorrad an diesem Punkt?

$$a_{\text{ges}} = 7,07 \text{ m s}^{-2}, \varphi = 27^\circ$$

d. Welche Zeit benötigt das Motorrad für die ersten fünf Runden?

$$t_{\text{ges}} = 102,5 \text{ s}$$

Lösungen:

1a. Für Lichtschranke 1 gilt:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_B t_1^2 \quad (*)$$

Für Lichtschranke 2 gilt:

$$s_2 = \frac{1}{2} a_B t_2^2$$

mit

$$\Delta t = t_2 - t_1 \text{ und } t_2 = t_1 + \Delta t$$

und

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 12,5 \text{ m}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} a_B t_2^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2 = \frac{1}{2} a_B (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B \Delta t^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2$$

$$\frac{1}{2} a_B \Delta t^2 + a_B t_1 \Delta t = \Delta s$$

$$\Delta t = \pm \sqrt{t_1^2 + \frac{2 \Delta s}{a_B}} - t_1$$

aus (*) folgt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20m}{5ms^{-2}}} = \sqrt{4}s = +2s$$

(nur pos. Lös. möglich)

$$\Delta t = \pm \sqrt{t_1^2 + \frac{2\Delta s}{a_B}} - t_1$$

$$\Delta t = \pm \sqrt{4s^2 + \frac{2 \cdot 12,5m}{5ms^{-2}}} - 2s$$

$$\Delta t = \pm \sqrt{4s^2 + 5s^2} - 2s = (\pm 3 - 2)s$$

nur pos. Lösung möglich:

$$\Delta t_1 = +1s$$

Es geht einfacher, wenn man gleich mit Zahlen rechnet.

Für Lichtschranke 1 gilt:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_B t_1^2 \quad t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20m}{5ms^{-2}}} = 2s$$

Für Lichtschranke 2 gilt:

$$s_2 = \frac{1}{2} a_B t_2^2 \quad t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{a_B}} = \sqrt{\frac{45m}{5ms^{-2}}} = 3s$$

Lösung:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3s - 2s = 1s$$

- 1b.** Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{\max} = 45^\circ$ ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung gleich dem Betrag der Erdbeschleunigung.

Es gilt:

$$\frac{v_{\max}^2}{R} = g$$

Es folgt:

$$v_{\max} = \sqrt{Rg} = \sqrt{100m \cdot 10ms^{-2}} = 31,62 \frac{m}{s}$$

$$v_{\max} = 31,62 \frac{m}{s} = 114 \frac{km}{h}$$

1c. Zeit zum Erreichen von $v_{\max}$:

$$t_{\max} = \frac{v_{\max}}{a_B} = \frac{31,62ms^{-1}}{5ms^{-2}} = 6,32s$$

Gesamte Fahrtstrecke bis $v_{\max}$:

$$s_{\max} = \frac{1}{2} a_B t_{\max}^2 = \frac{1}{2} 5ms^{-2} (6,32s)^2 = 100m$$

Halbe Fahrtstrecke:

$$\frac{s_{\max}}{2} = 50m$$

Für $\frac{s_{\max}}{2}$ gilt:

$$\frac{s_{\max}}{2} = \frac{1}{2} a_B t_{\max/2}^2 = \frac{v^2(s_{\max/2})}{2 \cdot a_B}$$

Geschwindigkeit bei $\frac{s_{\max}}{2}$:

$$v(s_{\max/2}) = \sqrt{2a_B \frac{s_{\max}}{2}} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 50} \frac{m}{s} = 22,36 \frac{m}{s}$$

Die Gesamtbeschleunigung ist die Vektorsumme von Radial- und der Tangentialbeschleunigung.

Radialbeschleunigung:

$$a_R = \frac{[v(s_{\max/2})]^2}{R} = \frac{500m^2s^{-2}}{100m} = 5ms^{-2}$$

Tangentialbeschleunigung:

$$a_t = a_B = 5 \text{ m s}^{-2}$$

Gesamtbeschleunigung:

$$a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} \text{ m s}^{-2} = 7,07 \text{ m s}^{-2}$$

Schräglage: Winkel φ gegen die Senkrechte mit Gegenkathete a_R und Ankathete a_t

$$\tan \varphi = \frac{5 \text{ m s}^{-2}}{10 \text{ m s}^{-2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 27^\circ$$

1d. Zeit für die ersten fünf Runden:

Gesamtlänge von fünf Runden:

$$s_{ges} = 5 \cdot (\pi \cdot D) = 3142 \text{ m}$$

Weg für Beschleunigung

$$s_a = s_{max} = 100 \text{ m} \text{ in } t_a = t_{max} = 6,32 \text{ s}$$

Weg für gleichförmige Bewegung:

$$s_v = s_{ges} - s_a = (3142 - 100) \text{ m} = 3042 \text{ m}$$

Zeit für gleichförmige Bewegung:

$$t_v = \frac{s_v}{v_{max}} = \frac{3042 \text{ m}}{31,62 \text{ m s}^{-1}} = 96,2 \text{ s}$$

Zeit für fünf Runden:

$$t_{ges} = t_a + t_v = (6,32 + 96,20) \text{ s} = 102,5 \text{ s}$$

1. Beim Testlauf einer Maschine wird deren Drehzahl in 5 Minuten gleichmäßig von Null auf 4500 Umdrehungen pro Minute erhöht. Anschließend bleibt die Drehzahl 300 s lang konstant und wird dann wieder gebremst. Auch der Abbremsvorgang ist gleichmäßig beschleunigt: Pro Sekunde nimmt die Drehzahl um $\Delta n = 2,5 \text{ s}^{-1}$ ab.

a. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung in der Anlaufphase?

$$\alpha_1 = 1,571 \text{ s}^{-2}$$

b. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung in der Abbremsphase?

$$\alpha_3 = -15,71 \text{ s}^{-2}$$

c. Welche Gesamtzeit erfordert der Testlauf.

$$t_{ges} = 630 \text{ s}$$

d. Wie viele Umdrehungen macht die Maschine insgesamt?

$$N_{ges} = 34875$$

Lösungen:

1a. Winkelgeschwindigkeit: $\omega_1 = 2\pi n_1 = 2\pi \cdot 4500 \text{ min}^{-1} = 2\pi \cdot \frac{4500}{60 \text{ s}} = 471,24 \text{ s}^{-1}$

Winkelbeschleunigung beim Hochlaufen:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - 0}{300 \text{ s}} = \frac{471,24 \text{ s}^{-1}}{300 \text{ s}} = 1,571 \text{ s}^{-2}$$

1b. Winkelbeschleunigung beim Abbremsen:

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{1 \text{ s}} = \frac{2\pi \cdot (-2,5 \text{ s}^{-1})}{1 \text{ s}} = -15,71 \text{ s}^{-2}$$

1c. Beschleunigungszeit:

$$t_1 = 300 \text{ s}$$

Zeit für gleichförmige Drehung:

$$t_2 = 300 \text{ s}$$

Zeit für Abbremsung:

$$t_3 = \frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{471,24 \text{ s}^{-1}}{15,71 \text{ s}^{-2}} = 30 \text{ s}$$

Gesamtzeit:

$$t_{\text{ges}} = 630 \text{ s}$$

1d. Umdrehungszahl beim Hochlaufen:

$$N_1 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_1 \cdot t_1^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,571 \text{ s}^{-2} \cdot 300^2 \text{ s}^2}{2\pi} = 11250$$

Zahl gleichförmiger Umdrehungen:

$$N_2 = \frac{\omega_1 \cdot t_2}{2\pi} = 22500$$

Umdrehungszahl beim Bremsen:

$$N_1 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_3 \cdot t_3^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15,71 \text{ s}^{-2} \cdot 30^2 \text{ s}^2}{2\pi} = 1125$$

Gesamtzahl der Umdrehungen:

$$N_{\text{ges}} = 34875$$

-
1. Ein zylindrischer Zentrifugenbehälter mit Radius 10 cm läuft zunächst mit einer Drehzahl von 20.000 min^{-1} . Dann wird die Drehzahl gleichmäßig 30 s lang erhöht, bis am Zentrifugenrand eine radiale Beschleunigung vom Vierhunderttausendfachen der Erdbeschleunigung wirkt.

a. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung?

$$\alpha = 141 \text{ s}^{-2}$$

b. Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit am Zentrifugenrand, wenn die maximale Drehzahl erreicht ist?

$$v_B = 632 \text{ m s}^{-1}$$

c. Wie viele Umdrehungen sind bis zum Erreichen der maximalen Drehzahl nötig?

$$N_{\text{ges}} = 20098$$

Lösungen:

1a. Bei $t = 0$ dreht sich die Zentrifuge mit einer Drehzahl von

$$n_0 = 20.000 \text{ min}^{-1} = 333,33 \text{ s}^{-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot n_0 = 2094,40 \text{ s}^{-1}$$

Die Drehzahl/Winkelgeschwindigkeit der Zentrifuge steigt dann so lange, bis für die Radialbeschleunigung gilt:

$$a_r = 400.000 \cdot g = 4.000.000 \text{ m s}^{-2}$$

Für die Radialbeschleunigung gilt:

$$a_r = \frac{v_B^2}{r},$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v_B = r \cdot \omega_1$$

Es folgt:

$$a_r = \frac{r^2 \cdot \omega_1^2}{r} = r \cdot \omega_1^2$$

Maximale Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{4.000.000 \text{ m s}^{-2}}{0,1 \text{ m}}} = 6324,55 \text{ s}^{-1}$$

Maximale Drehzahl:

$$n_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1006,58 \text{ s}^{-1} = 60395 \text{ min}^{-1}$$

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}$$

Ergebnis Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{(6324,55 - 2094,40) \text{ s}^{-1}}{30 \text{ s}} = 141,0 \text{ s}^{-2}$$

1b. Bahngeschwindigkeit:

$$v_B = r \cdot \omega_1 = 0,1 \text{ m} \cdot 6324,55 \text{ s}^{-1} = 632,455 \text{ m s}^{-1}$$

1c. Zahl der Umdrehungen:

$$N_{\text{ges}} = \frac{\varphi_{\text{max}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 \right)$$
$$N_{\text{ges}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(2094,40 \text{ s}^{-1} \cdot 30 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 141,0 \text{ s}^{-2} \cdot (30 \text{ s})^2 \right)$$

Zahl der Umdrehungen:

$$N_{\text{ges}} = 20098$$

-
1. Ein Motorrad fährt aus dem Stillstand heraus gleichmäßig beschleunigt auf einer kreisförmigen Teststrecke. Am Ende der ersten Runde beträgt die Schräglage des Motorrads 45° (entspricht dem Winkel zwischen der Hochachse des Motorradfahrers und der Horizontalen, der bei einer stabilen Zweiradfahrt erforderlich ist). Wie groß ist die Bahnbeschleunigung, wie groß ist die Radialbeschleunigung und wie groß ist die Gesamtbeschleunigung nach einmaligem Umrunden der Kreisstrecke? (gefordert sind: Herleitung und Bestimmung der Zahlenwerte der Beschleunigungen).

$$a_B = g \cdot 0,079577 = 0,7957 \text{ m s}^{-2}, \quad a_R = g = 10 \text{ m s}^{-2}, \quad a_{\text{ges}} = 10,032 \text{ m s}^{-2}$$

Lösungen:

Bei einer Schräglage von 45° ist die nach außen gerichtete, horizontale

Zentrifugalbeschleunigung $a_{ZF} = -a_{ZP} = -\frac{v_B^2}{R}$ betragsmäßig gleich der vertikal nach unten gerichteten Erdbeschleunigung g ist. Es gilt für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{ZP} = \frac{v_B^2}{R}$$

Es folgt:

$$R = \frac{v_B^2}{g} \quad (1)$$

Bezeichnungen:

v_B = Bahngeschwindigkeit, R = Radius der Kreisbahn

Da die Bewegung entlang der Kreisbahn gleichmäßig beschleunigt sein soll, gilt für die Geschwindigkeit am Ende der ersten Runde:

$$v_B = a_B \cdot \Delta t_1$$

wobei a_B die konstante Bahnbeschleunigung und Δt_1 die Zeit für die erste Runde und bezeichnet.

Es folgt aus Gl. (1):

$$R = \frac{a_B^2 \cdot (\Delta t_1)^2}{g} \quad (2)$$

Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, gilt für die Wegfunktion:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_B t^2:$$

Bei der ersten Runde beträgt der zurückgelegte Weg:

$$U = 2\pi \cdot R$$

Wobei U der Umfang der Kreisbahn ist, für den gilt:

$$U = 2\pi R = \frac{1}{2} a_B (\Delta t_1)^2$$

Für den Radius der Kreisbahn ergibt sich:

$$R = \frac{1}{4\pi} a_B (\Delta t_1)^2 \quad (3)$$

Aus Gl. (2) und Gl. (3) folgt:

$$\frac{1}{4\pi} a_B (\Delta t_1)^2 = \frac{a_B^2 \cdot (\Delta t_1)^2}{g}$$

Es folgt:

$$a_B = \frac{g}{4\pi}$$

Ergebnis Bahnbeschleunigung:

$$a_B = g \cdot 0,079577 = 0,7957 \text{ m s}^{-2}$$

Laut Aufgabenstellung soll die Schräglage des Motorrades am Ende der ersten Runde 45° betragen. Die Zentripetalbeschleunigung (= Radialbeschleunigung) ist demnach gleich g , die Zentrifugalbeschleunigung gleich $-g$.

Ergebnis Radialbeschleunigung:

$$a_R = g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

Da Radialbeschleunigung und Bahnbeschleunigung senkrecht zueinander sind, gilt für die Gesamtbeschleunigung:

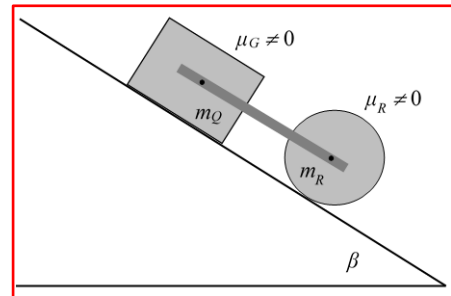
Gesamtbeschleunigung:

$$a_{ges} = \sqrt{a_R^2 + a_B^2} = \sqrt{g^2 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}}$$

$$a_{ges} = g \sqrt{1 + \frac{1}{(4\pi)^2}} = \frac{g}{4\pi} \cdot \sqrt{1 + (4\pi)^2} = 1,0032 \cdot g$$

$$a_{ges} = 10,032 \text{ m s}^{-2}$$

2. Ein Quader mit Masse $m_Q = 1\text{kg}$ und eine Rolle (Vollzylinder) mit Masse $m_R = 1\text{kg}$ und Radius R sind durch eine (näherungsweise masselose) Stange verbunden. Der Zylinder rollt ohne zu gleiten. Auf den Quader wirkt eine Gleitreibungskraft mit $\mu_G = 0,4$, auf die Rolle wirkt eine Rollreibungskraft mit $\mu_R = 0,05$. Wie groß ist die Beschleunigung,



wenn der Winkel der schiefen Ebene $\beta = 30^\circ$ beträgt? $2,44\text{ m s}^{-2}$

Lösung

D'Alembertsches Prinzip für die

Kräfte an der Rolle: $(F_{tR} - F_H - F_{RR} - F_{SR}) - m_R a = 0$ (1)

Drehmomente an der Rolle: $F_H \cdot R - J \cdot \alpha = 0$ (2)

Kräfte am Quader: $(F_{SQ} + F_{tQ} - F_{GQ}) - m_Q \cdot a = 0$ (3)

wobei

$$F_{tR} = m_R \cdot g \cdot \sin(\beta) \text{ - Tangentialkraft an der Rolle}$$

$$F_H \text{ - Haftreibungskraft von Rolle und schiefer Ebene}$$

$$F_{RR} = \mu_R \cdot m_R \cdot g \cdot \cos(\beta) \text{ - Rollreibungskraft der Rolle}$$

$$F_{SR} \text{ - Kraft der Rolle auf die Verbindungsstange}$$

$$F_{SQ} \text{ - Kraft des Quaders auf die Verbindungsstange}$$

$$F_{tQ} = m_Q \cdot g \cdot \sin(\beta) \text{ - Tangentialkraft an der Rolle}$$

$$F_{GQ} = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cos(\beta) \text{ - Rollreibungskraft der Rolle}$$

Es gilt die Nebenbedingung: $F_{SQ} = F_{SR}$ oder $F_{SQ} - F_{SR} = 0$ (4)

Addition von Gl. (1) und (3):

$$(F_{tR} - F_H - F_{RR} - F_{SR}) + (F_{SQ} + F_{tQ} - F_{GQ}) - m_R a - m_Q a = 0$$

Umformung: $(F_{tR} + F_{tQ} - F_H - F_{RR} - F_{GQ}) + (F_{SQ} - F_{SR}) - (m_R + m_Q) a = 0$ (5)

Aus Gl. (2) folgt: $F_H = \frac{J \cdot \alpha}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_R \cdot R^2 \cdot a}{R \cdot R} = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot a$ (6)

Einsetzen von Gl. (4) und Gl. (6) in Gl. (5):

$$(F_{tR} + F_{tQ} - F_{RR} - F_{GQ}) - \left(\frac{3}{2} m_R + m_Q\right) a = 0$$

Lösung:

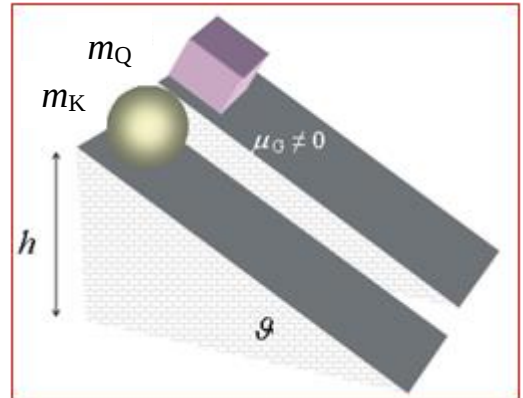
$$a = \frac{F_{tR} + F_{tQ} - F_{RR} - F_{GQ}}{1,5 \cdot m_R + m_Q}$$

$$a = g \frac{(m_R + m_Q) \sin(\beta) - (\mu_R \cdot m_R + \mu_G \cdot m_Q) \cos(\beta)}{1,5 \cdot m_R + m_Q}$$

$$a = g \frac{(1+1) \text{ kg} \cdot \sin(\beta) - (0,05 \cdot 1 + 0,4 \cdot 1) \text{ kg} \cdot \cos(\beta)}{(1,5 \cdot 1 + 1) \text{ kg}}$$

$$a = g \frac{2 \cdot \sin(\beta) - 0,45 \cdot \cos(\beta)}{2,5} = g \cdot 0,2441 = 2,44 \text{ ms}^{-2}$$

2. Man vergleiche eine rollende Kugel mit Masse $m_K = 1 \text{ kg}$ und einen gleitenden Quader mit Masse $m_Q = 1 \text{ kg}$ auf einer schiefen Ebene. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\vartheta = 30^\circ$. Beide Körper starten in der Höhe $h = 1 \text{ m}$ ohne Anfangsgeschwindigkeit (siehe Abb, nicht maßstabgerecht!).



- a. Wie groß muss die Gleitreibungszahl μ_G für den Quader sein, damit er in der gleichen Zeit wie die Kugel unten ankommt? Die Rollreibung der Kugel soll vernachlässigt werden. $\mu_G = 0,165$
- b. Wie groß sind die Zeiten für das Rollen bzw. das Gleiten? $1,058 \text{ s}$

Lösungen:

- 2a. Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es gilt:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{h}{\sin(\vartheta)}$$

Für die Roll- bzw. Gleitzeit folgt:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a \cdot \sin(\vartheta)}}$$

Die Rollzeit der Kugel ist gleich der Gleitzeit des Quaders, wenn die Beschleunigungen für Kugel und Quader gleich groß sind.

Die Gewichtskraft $F_g = m_1 g$ wird zerlegt in die Tangentialkomponente F_t und

Normalkomponente F_n .

Es gilt:

$$F_t = F_g \cdot \sin(\vartheta) = m g \sin(\vartheta)$$

$$F_n = F_g \cdot \cos(\vartheta) = m g \cos(\vartheta)$$

Beschleunigung a_K der rollenden Kugel mit Masse m_K und Radius R_K :

Die Tangentialkomponente F_t erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_K und eine Winkelbeschleunigung α mit Hilfe der Haftreibungskraft zwischen Kugel und schiefer Ebene. Zur Erzeugung der Winkelbeschleunigung α ist das Drehmoment M_K erforderlich. Das D'Alembertsche Prinzip für die rollende Kugel lautet:

$$\text{Für die Kräfte wirkend auf den Schwerpunkt } (F_{tK} - F_H) - m_K a_K = 0 \quad (*)$$

Für die Drehmomente:

$$M_K = F_H \cdot R_K = J_K \cdot \alpha = \frac{2}{5} m_1 R_K^2 \cdot \alpha$$

Die Kugel soll rollen. Rollbedingung:

$$a_K = R_K \cdot \alpha$$

Einsetzen in Gl. (*):

$$\left(F_{tK} - \frac{2m_K R_K^2 a_K}{5R_K R_K} \right) - m_K a_K = 0$$

Es folgt:

$$m_K g \sin(\vartheta) - \frac{2}{5} m_K a_K - m_K a_K = 0$$

Schwerpunktbeschleunigung der Kugel:

$$a_K = \frac{5}{7} g \sin(\vartheta) \quad (1)$$

Beschleunigung a_Q des gleitenden Quaders m_Q :

Die Tangentialkomponente F_{tQ} erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_K . Die Gleitreibungskraft $F_{GQ} = \mu_G F_n = \mu_G m_Q g \cos \vartheta$ wirkt entgegengesetzt. Das D'Alembertsche Prinzip lautet:

$$(F_{tQ} - F_{GQ}) - m_Q a_Q = 0$$

Einsetzen von F_{tQ} und F_{GQ} :

$$m_Q g \sin(\vartheta) - \mu_G m_Q g \cos(\vartheta) - m_Q a_Q = 0$$

Beschleunigung der gleitenden Masse:

$$a_Q = g(\sin(\vartheta) - \mu_G \cos(\vartheta)) \quad (2)$$

Wenn Roll- und Gleitbewegung in gleichen Zeiten erfolgen sollen, gilt:

$$a_Q = a_K$$

Einsetzen von Gl (1) und Gl. (2):

$$\frac{5}{7} g \sin(\vartheta) = g(\sin(\vartheta) - \mu_G \cos(\vartheta))$$

g kann gekürzt werden:

$$\frac{5}{7} \sin(\vartheta) = \sin(\vartheta) - \mu_G \cos(\vartheta)$$

$$\mu_G \cos(\vartheta) = \sin(\vartheta) - \frac{5}{7} \sin(\vartheta) = \frac{2}{7} \sin(\vartheta)$$

Ergebnis:

$$\mu_G = \frac{2}{7} \tan(\vartheta) = 0,165$$

2b. Zeit für die Rollbewegung:

Für die Beschleunigung der Kugel gilt nach Gl. (1):

$$a_K = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin(\vartheta)$$

$$a_K = \frac{5}{7} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot \sin(30^\circ) = 3,571 \text{ m s}^{-2}$$

Gesamtweg:

$$s_{ges} = \frac{h}{\sin(\vartheta)} = \frac{1 \text{ m}}{\sin 30^\circ} = 2 \text{ m}$$

Es gilt für die gesamte Rollzeit:

$$s_{ges} = \frac{1}{2} a_K t_{ges}^2$$

Lösung für Rollbewegung:

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_{ges}}{a_K}}$$

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot h}{5 g \sin^2(\vartheta)}} = \frac{1}{\sin(\vartheta)} \sqrt{\frac{14 \cdot h}{5 \cdot g}}$$

Einsetzen:

$$t_{ges} = 2 \cdot \sqrt{\frac{14 \cdot 1 \text{ m}}{5 \cdot 10 \text{ m s}^{-2}}}$$

Ergebnis:

$$t_{ges} = 2 \cdot \sqrt{\frac{14m}{50ms^{-2}}} = 2 \cdot 0,529s = 1,058s$$

Zeit für die Gleitbewegung:

Beschleunigung für Gleiten nach Gl (2) $a_Q = g(\sin(\vartheta) - \mu_G \cos(\vartheta))$

$$a_Q = 10ms^{-2}(\sin(\beta) - 0,165 \cdot \mu_G \cos(\beta))$$

$$a_Q = 3,571ms^{-2}$$

Lösung für Gleitbewegung:

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_{ges}}{a_Q}}$$

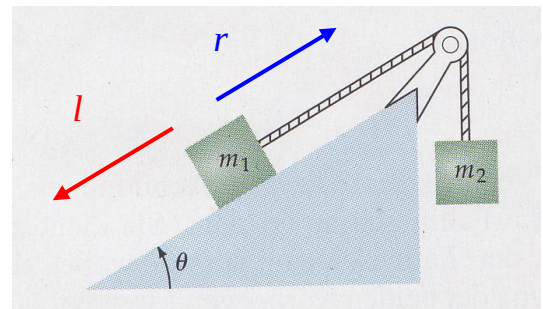
Mit $s_{ges} = \frac{h}{\sin(\vartheta)}$ folgt:

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot (\sin^2 \vartheta - \mu_G \sin \vartheta \cos \vartheta)}}$$

Ergebnis:

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1m}{10ms^{-2}(0,25 - 0,0714)}} = 1,058s$$

2. Die Massen m_1 und m_2 sind in der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine (voll-) zylinderförmige Umlenkrolle mit $m_R = 1kg$ umgelenkt wird. Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\theta = 30^\circ$, die Haftreibungszahl $\mu_H = 0,25$ und die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,20$.



- a. Die Masse 2 sei $m_2 = 1kg$. In welchem Wertebereich muss m_1 liegen, damit das System weder nach links (l) noch nach rechts (r) weggleitet, sondern haften bleibt?
(Hinweis: gesucht: $m_1^{\min}$ für r und $m_1^{\max}$ für l !) $1,396kg = m_1^{\min} \leq m_1 \leq m_1^{\max} = 3,527kg$
- b. Berechnen Sie die Beschleunigung a^{links} wenn $m_1 \cong m_1^{\max}$ und das System nach **links** gleitet. $a^{links} = 0,304ms^{-2}$
- c. Berechnen Sie die Beschleunigung a^{rechts} wenn $m_1 \cong m_1^{\min}$ und das System nach **rechts** gleitet. $a^{rechts} = 0,209ms^{-2}$
- d. Wie groß ist die Seilkraft im Haftreibungsfall? $F_S^{links} = F_S^{rechts} = 10N$
- e. Wie groß sind die Seilkräfte links und rechts der Umlenkrolle (F_S^{links} und F_S^{rechts}) im Gleitreibungsfall, wenn das System nach **rechts** gleitet? (entspricht Aufgabe 2c).
 $F_S^{rechts} = 9,791N$ $F_S^{links} = 9,690N$

Lösungen:

- 2a. Bedingung für den Haftreibungsfall in Bezug auf eine Bewegung nach rechts:

$$\mu_{H,max} m_1 g \cdot \cos(\theta) \geq m_2 g - m_1 g \cdot \sin(\theta)$$

Masse m_1 gleite nicht nach rechts, wenn gilt:

$$m_1 \geq m_1^{\min} = \frac{m_2}{\sin(\theta) + \mu_H \cos(\theta)}$$

Ergebnis:

$$m_1 \geq m_1^{\min} = \frac{1 \text{ kg}}{0,5 + 0,25 \cdot 0,866} = 1,396 \text{ kg}$$

Bedingung für den Haftreibungsfall in Bezug auf eine Bewegung nach links:

$$\mu_H \cdot m_1 g \cdot \cos(\theta) \geq m_1 g \cdot \sin(\theta) - m_2 g$$

Masse m_1 gleitet nicht nach links, wenn gilt:

$$m_1 \leq m_1^{\max} = \frac{m_2}{\sin \theta - \mu_{H,\max} \cos \theta}$$

$$m_1 \leq m_1^{\max} = \frac{1 \text{ kg}}{0,5 - 0,25 \cdot 0,866} = 3,527 \text{ kg}$$

Ergebnis: m_1 bleibt haften, wenn:

$$1,396 \text{ kg} = m_1^{\min} \leq m_1 \leq m_1^{\max} = 3,527 \text{ kg}$$

Gleiten nach rechts, wenn: $m_1 < m_1^{\min} = 1,396 \text{ kg}$

Gleiten nach links, wenn: $m_1 > m_1^{\max} = 3,527 \text{ kg}$

2b. Beschleunigung beim Gleiten nach links, wenn $m_1 \cong m_1^{\max} = 3,527 \text{ kg}$:

Beschleunigung verursachende Kraft: $F_{t1}^{\text{links}} = m_1 g \cdot \sin(\theta) = 17,64 \text{ N}$

Bilanz der Kräfte: $\sum \text{Antriebe} - \sum \text{Widerstände} = m_{\text{ges}} \cdot a^{\text{links}}$

$$F_{t1}^{\text{links}} - (F_{G1} + F_{HR} + F_{g2}) = (m_1 + m_2) \cdot a^{\text{links}}$$

Es gilt für die Rolle (Vollzylinder mit $k = 0,5$):

$$F_{HR} = \frac{M_R}{R} = \frac{J \alpha}{R} = \frac{J a^{\text{links}}}{R^2} = \frac{0,5 m_R R^2 a^{\text{links}}}{R^2} = 0,5 m_R a^{\text{links}}$$

Es folgt: $m_1 g \cdot \sin(\theta) - (\mu_G \cdot m_1 g \cdot \cos(\theta) + m_2 g) = (0,5 m_R + m_1 + m_2) a^{\text{links}}$

Lösung: $a^{\text{links}} = g \cdot \frac{m_1 (\sin(\theta) - \mu_G \cdot \cos(\theta)) - m_2}{0,5 m_R + m_1 + m_2}$

$$a^{\text{links}} = g \cdot \frac{3,527 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,866) - 1}{0,5 + 3,527 + 1,0} = 0,0304 \cdot g$$

Ergebnis: $a^{\text{links}} = 0,0304 \cdot g = 0,304 \text{ ms}^{-2}$

2c. Beschleunigung beim Gleiten nach rechts, wenn $m_1 \cong m_1^{\max} = 1,396 \text{ kg}$:

Beschleunigung verursachende Kraft: $F_{g2} = m_2 g = 10 \text{ N}$

Bilanz der Kräfte: $\sum \text{Antriebe} - \sum \text{Widerstände} = m_{\text{ges}} \cdot a^{\text{rechts}}$

$$F_{g2} - (F_{t1} + F_{G1} + F_{HR}) = (m_1 + m_2) \cdot a^{\text{rechts}}$$

Es gilt für die Rolle (Vollzylinder mit $k = 0,5$):

$$F_{HR} = \frac{M_R}{R} = \frac{J \alpha}{R} = \frac{J a^{\text{rechts}}}{R^2} = \frac{0,5 m_R R^2 a^{\text{rechts}}}{R^2} = 0,5 m_R a^{\text{rechts}}$$

Es folgt: $m_2 g - (m_1 g \cdot \sin(\theta) + \mu_G \cdot m_1 g \cdot \cos(\theta)) = (m_1 + 0,5 m_R + m_2) a^{\text{rechts}}$

Lösung:
$$a^{rechts} = g \cdot \frac{m_2 - m_1 (\sin(\theta) + \mu_G \cos(\theta))}{m_1 + 0,5 m_R + m_2}$$

$$a^{rechts} = g \cdot \frac{1 - 1,396(0,5 + 0,2 \cdot 0,866)}{1,396 + 0,5 + 1} = 0,0209 g$$

Ergebnis: $a^{rechts} = 0,0209 g = 0,209 ms^{-2}$

2d. In 2a. wurde hergeleitet, dass im Haftreibungsfall $m_1 \leq m_1^{max} = 3,527 kg$ gelten muss.

Wenn $m_1 \cong m_1^{max} = 3,527 kg$ ist, ist F_H näherungsweise $F_{H,max}$:

$$F_{H,max} = \mu_H \cdot m_1^{max} g \cdot \cos(\theta)$$

$$F_{H,max} = 0,25 \cdot 35,27 N \cdot \cos(\theta) = 7,636 N$$

Seilkraft rechts ist:

$$F_S^{rechts} = m_2 g = 10 N$$

Kontrolle: Seilkraft links:

$$F_S^{links} = m_1^{max} g \cdot (\sin(\theta) - \mu_H \cdot \cos(\theta))$$

$$F_S^{links} = (35,27 \cdot (0,5 - 0,25 \cdot 0,866)) N$$

$$F_S^{links} = 10 N$$

In 2a. wurde auch hergeleitet, dass im Haftreibungsfall $m_1 \geq m_1^{min} = 1,396 kg$ gelten muss.

Wenn $m_1 \cong m_1^{min} = 1,396 kg$ ist, ist F_H näherungsweise $F_{H,max}$:

$$F_{H,max} = \mu_H \cdot m_1^{min} g \cdot \cos(\theta)$$

Seilkraft nach rechts:

$$F_S^{rechts} = m_2 g = 10 N$$

Kontrolle: Seilkraft nach links:

$$F_S^{links} = m_1^{min} g \cdot (\sin(\theta) + \mu_H \cdot \cos(\theta))$$

$$F_S^{links} = (13,96 \cdot (0,5 + 0,25 \cdot 0,866)) N$$

$$F_S^{links} = 10 N$$

Fazit: Im Haftreibungsfall ist die Seilkraft links und rechts der Umlenkrolle für alle Werte von m_1 , für die $1,396 kg = m_1^{min} \leq m_1 \leq m_1^{max} = 3,527 kg$ gilt, gleich groß und sie beträgt 10 N.

2e. Seilkräfte rechts und links der Umlenkrolle im Gleitreibungsfall:

Seilkraft rechts:

$$F_S^{rechts} = m_2 g - m_2 a = 10 N - 0,209 N = 9,791 N$$

Seilkraft links:

$$F_S^{links} = F_{t1} + F_{G1} + F_{Tr1} = m_1 g \cdot (\sin(\theta) + \mu_G \cdot \cos(\theta)) + m_1 a$$

$$F_S^{links} = 13,96 N \cdot (0,5 + 0,2 \cdot 0,866) + (1,396 \cdot 0,209) N$$

$$F_S^{links} = 9,398 N + 0,292 N = 9,690 N$$

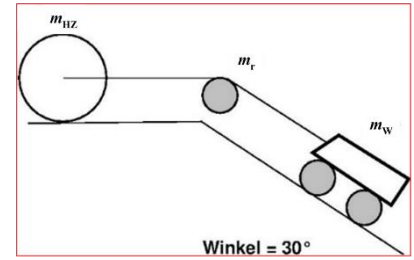
Kontrolle: Es gilt:

$$F_S^{rechts} - F_S^{links} = \frac{M_R}{R} = \frac{J \alpha}{R} = \frac{J a}{R^2} = 0,5 \cdot m_R a$$

$$F_S^{rechts} - F_S^{links} = 0,101 N \cong 0,5 \cdot 1 \cdot 0,209 N = 0,104 N = \frac{M_R}{R}$$

Abweichung ergibt aus Rundungsfehlern.

2. Ein Wagen auf vier Rädern mit der Gesamtmasse (inklusive der Räder) von $m_W = 10\text{ kg}$ beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ herunter zu rollen. Die Räder des Wagens (Vollzylinder) wiegen jeweils $m_R = 1,5\text{ kg}$. Der Wagen ist mit einem Seil über eine Umlenkrolle (Vollzylinder) der Masse $m_r = 1,0\text{ kg}$ einem Hohlzylinder der Masse $m_{HZ} = 2,5\text{ kg}$ und Radius



$R_{HZ} = 0,2\text{ m}$ verbunden (siehe Skizze). Der Hohlzylinder rollt dadurch (ohne zu gleiten) auf der waagerechten Ebene. Für den Hohlzylinder als auch für die Wagenräder beträgt die Gleitreibungszahl $\mu_R = 0,05$.

- Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems? $a = 2,4\text{ ms}^{-2}$
- Wie groß sind die Seilkräfte rechts und links der Umlenkrolle?
 $F_{SW} = 14,457\text{ N}$ $F_{SH} = 13,255\text{ N}$
- Wie viele Umdrehungen machte der Hohlzylinder in den ersten 15 s? $N(t = 15\text{ s}) = 215$

Lösungen:

- 2a. Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{tW} ist die antreibende Kraft des Wagens auf der schieben Ebene mit Steigungswinkel $\beta = 30^\circ$. Die Rollreibungskraft F_{RRW} , die Seilkraft F_{SW} und die Haftreibungskräfte $4 \cdot F_{HW}$, die an den vier Rädern die passenden Drehmomente erzeugen, wirken der antreibenden Kraft entgegen.

Nach D'Alembert gilt für

die Kräfte am Wagen: $(F_{tW} - F_{RRW} - F_{SW} - 4 \cdot F_{HW}) - m_W a = 0$ (1)

F_{tW} - Tangentialkomponente der Gewichtskraft

F_{RRW} - Rollreibungskraft am Wagen

F_{SW} - Seilkraft am Wagen

F_{HW} - Haftreibungskraft zwischen Rad und Ebene zur Erzeugung des Drehmoments

Da in der Masse des Wagens $m_W = 10\text{ kg}$ laut Aufgabenstellung die Masse der vier Räder bereits enthalten ist, wurde in Gl. (1) auch die Trägheitskraft der Räder bereits berücksichtigt.

Für das Drehmoment M_{RW} an jeweils einem der Räder gilt:

$$M_{RW} = F_{HW} \cdot R = \frac{1}{2} m_R \cdot R^2 \cdot \alpha$$

Mit der Rollbedingung folgt: $F_{HW} = \frac{1}{2} m_R \cdot a$

Einsetzen der verschiedenen Kräfte in Gl. (1) liefert:

$$\left(m_W g \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot m_W g \cdot \cos(\beta) - F_{SW} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} m_R \cdot a \right) \right) - m_W \cdot a = 0 \quad (2)$$

Für die Kräfte am Hohlzylinder gilt nach D'Alembert:

$$(F_{SH} - F_{RRH} - F_{HH}) - m_{HZ} a = 0 \quad (3)$$

F_{SH} - Seilkraft am Hohlzylinder, wobei gilt: $F_{SH} = F_{SW}$

F_{RRH} - Rollreibungskraft am Hohlzylinder

F_{HH} - Haftreibungskraft zwischen Hohlzylinder und Ebene zur Erzeugung des Drehmoments

Für das Drehmoment M_H am Hohlzylinder gilt:

$$M_H = F_{HH} \cdot R_{HZ} = 1 \cdot m_{HZ} \cdot R_{HZ} \cdot \alpha$$

Mit der Rollbedingung folgt: $F_{HH} = m_{HZ} \cdot a$

Einsetzen der verschiedenen Kräfte in Gl. (3) liefert:

$$(F_{SH} - \mu_R \cdot m_{HZ} g - m_{HZ} a) - m_{HZ} \cdot a = 0 \quad (4)$$

Addiert man Gl. (2) und Gl. (4) folgt nach Umformung:

$$\begin{aligned} m_W g \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot m_W g \cdot \cos(\beta) - \mu_R \cdot m_{HZ} \cdot g - (F_{SW} - F_{SH}) = \\ = (2m_R + 2m_{HZ} + m_W) \cdot a \end{aligned} \quad (5)$$

Die Differenz der Seilkräfte rechts und links der Umlenkrolle erzeugt ein Drehmoment

M_r an der Umlenkrolle.
$$M_r = F_{Hr} \cdot r = (F_{SW} - F_{SR}) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Mit der Rollbedingung folgt: $(F_{SW} - F_{SR}) = \frac{1}{2} m_r \cdot a \quad (6)$

Einsetzen von Gl. (6) in Gl. (5) liefert:

$$(m_W \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot (m_W \cdot \cos(\beta) + m_{HZ})) \cdot g = \left(2m_R + 2m_{HZ} + m_W + \frac{1}{2} m_r \right) \cdot a$$

Lösung für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} a &= g \cdot \frac{(m_W \cdot \sin \alpha - \mu_R (m_W \cdot \cos \alpha + m_{HZ}))}{2m_R + 2m_{HZ} + m_W + \frac{1}{2} m_r} \\ a &= 10 \text{ m s}^{-2} \cdot \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 0,05 \cdot (10 \cdot \cos 30^\circ + 2,5)}{3 + 5 + 10 + 0,5} \end{aligned}$$

mit $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ folgt:

$$a = 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,2401 = 2,40 \text{ m s}^{-2}$$

2b. Die Seilkräfte ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen der einzelnen Systeme:

Mit $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ und $a = 2,4 \text{ m s}^{-2}$ folgt aus Gl. (2) von 2a.:

$$\begin{aligned} F_{SW} &= m_W \cdot (\sin(\beta) - \mu_R \cdot \cos(\beta)) \cdot g - (2m_R + m_W) \cdot a \\ F_{SW} &= (10 \cdot (\sin(\beta) - 0,05 \cdot \cos(\beta)) \cdot 10 - (2 \cdot 1,5 + 10) \cdot 2,4) \text{ N} \\ F_{SW} &= 14,457 \text{ N} \end{aligned}$$

Mit $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ und $a = 2,4 \text{ m s}^{-2}$ folgt aus Gl. (4) von 2a.:

$$\begin{aligned} F_{SH} &= m_{HZ} (\mu_R \cdot g + 2 \cdot a) = 10 \cdot (0,05 \cdot 10 + 2 \cdot 2,401) \text{ N} \\ F_{SH} &= 13,255 \text{ N} \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$(F_{SW} - F_{SR}) = \frac{1}{2} m_r \cdot a$$

$$(F_{SW} - F_{SR}) = (14,457 - 13,255) N = 1,202 N = 1,2 N$$

$$\frac{1}{2} m_r \cdot a = (0,5 \cdot 1 \cdot 2,401) N = 1,201 N = 1,2 N$$

- 2c. Die kinematische Gleichung den Winkel $\varphi(t) = 2\pi \cdot N(t)$ für die Drehbewegung des Hohlzylinders lauten:

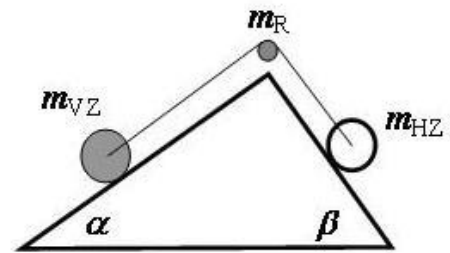
$$\varphi(t) = 2\pi \cdot N(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

wobei hier gilt: $\omega_0 = 0$ und $\varphi_0 = 0$ und $\alpha = \frac{a}{R}$

Es folgt:
$$N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{a}{4\pi \cdot R_{HZ}} \cdot t^2$$

Für $t = 15s$ folgt:
$$N(t = 15s) = \frac{a}{4\pi \cdot R_{HZ}} \cdot (15s)^2 = \frac{2,401}{4\pi \cdot 0,2} \cdot (15)^2 = 215$$

2. Ein Vollzylinder der Masse $m_{VZ} = 1,5 kg$ auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ ist mittels eines Seils über eine Umlenkrolle der Masse $m_R = 0,2 kg$ (Vollzylinder) mit einem Hohlzylinder der Masse $m_{HZ} = 1,0 kg$ verbunden. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene des Hohlzylinders beträgt $\beta = 60^\circ$, die Rollreibungszahl $\mu_R = 0,04$.



- a. In welche Richtung bewegt sich das System?
Bestimmen Sie die Beschleunigung unter der Nebenbedingung, dass die Zylinder rollen und nicht gleiten.
- b. Wie groß sind die Seilkräfte am Vollzylinder $F_{S,VZ}$ und am Hohlzylinder $F_{S,HZ}$?

$$a = 0,101 ms^{-2}$$

$$F_{S,HZ} = 8,258 N \quad F_{S,VZ} = 8,248 N$$

Lösungen:

- 2a. Tangentialkomponenten der Gewichtskräfte von Vollzylinder und Hohlzylinder:

$$F_{t,VZ} = m_{VZ} g \cdot \sin(\alpha) = 1,5 \cdot 10 \cdot 0,5 N = 7,5 N$$

$$F_{t,HZ} = m_{HZ} g \cdot \sin(\beta) = 1,0 \cdot 10 \cdot 0,8660 N = 8,66 N$$

Das System bewegt sich nach "rechts".

Nach D'Alembert gilt für

die Kräfte am Hohlzylinder: $(F_{t,HZ} - F_{H,HZ} - F_{RR,HZ} - F_{S,HZ}) - m_{HZ} a = 0$ (1)

mit:

Tangentialkraft am HZ: $F_{t,HZ} = m_{HZ} \cdot g \cdot \sin(\beta) = 8,66 N$

Rollreibungskraft HZ: $F_{RR,HZ} = \mu_R \cdot m_{HZ} \cdot g \cdot \cos(\beta)$

Seilkraft HZ: $F_{S,HZ}$

Trägheitskraft: $F_{Tr,HZ} = -m_{HZ} \cdot a$

Da der Körper rollt, wirkt an der Kontaktstelle von Hohlzylinder und schiefer Ebene die Haftreibungskraft $F_{H,HZ}$, die das Drehmoment M_{HZ} erzeugt:

$$M_{HZ} = F_{H,HZ} \cdot r$$

Drehmoment M_{HZ} : $M_{HZ} = F_{H,HZ} \cdot r = 1 \cdot m_{HZ} \cdot r^2 \cdot \alpha$

Mit der Rollbedingung folgt: $F_{H,HZ} = m_{HZ} \cdot a$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in Gl. (1): } & (m_{HZ} g \cdot \sin(\beta) - m_{HZ} a - \mu_R \cdot m_{HZ} g \cdot \cos(\beta) - F_{S,HZ}) - m_{HZ} a = 0 \\ & m_{HZ} g \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot m_{HZ} g \cdot \cos(\beta) - F_{S,HZ} - 2 m_{HZ} a = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Nach D'Alembert gilt für

$$\begin{aligned} \text{die Kräfte am Vollzylinder: } & (F_{S,VZ} - F_{H,VZ} - F_{RR,VZ} - F_{t,VZ}) - m_{VZ} a = 0 \\ \text{mit:} & \end{aligned} \quad (3)$$

Tangentalkraft VZ: $F_{t,VZ} = m_{VZ} \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

Rollreibungskraft VZ: $F_{RR,VZ} = \mu_R \cdot m_{VZ} \cdot g \cdot \cos(\alpha)$

Seilkraft VZ: $F_{S,VZ} < F_{S,HZ}$

Trägheitskraft: $F_{Tr,VZ} = -m_{VZ} \cdot a$

Da der Körper rollt, wirkt an der Kontaktstelle von Vollzylinder und schiefer Ebene die Haftreibungskraft $F_{H,VZ}$, die das Drehmoment M_{VZ} erzeugt:

$$M_{VZ} = F_{H,VZ} \cdot r = \frac{1}{2} m_{VZ} \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Mit der Rollbedingung folgt: $F_{H,VZ} = \frac{1}{2} m_{VZ} \cdot a$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in Gl. (3): } & \left(F_{S,VZ} - \frac{1}{2} m_{VZ} a - \mu_R \cdot m_{VZ} \cdot g \cdot \cos(\alpha) - m_{VZ} \cdot g \cdot \sin(\alpha) \right) - m_{VZ} \cdot a = 0 \\ & F_{S,VZ} - \mu_R \cdot m_{VZ} g \cdot \cos(\alpha) - m_{VZ} g \cdot \sin(\alpha) - \frac{3}{2} m_{VZ} \cdot a = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Addieren Gl. (2) und Gl. (4):

$$\begin{aligned} & (m_{HZ} \cdot \sin(\beta) - m_{VZ} \cdot \sin(\alpha) - \mu_R \cdot (m_{HZ} \cdot \cos(\beta) - m_{VZ} \cdot \cos(\alpha))) \cdot g - (F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) \\ & = \left(\frac{3}{2} m_{VZ} + 2 m_{HZ} \right) \cdot a \end{aligned} \quad (5)$$

Die Seilkräfte $F_{S,HZ}$ und $F_{S,VZ}$ sind entgegen gesetzt gerichtet und ihr Beträge sind nicht gleich. Vielmehr erzeugt die Differenz der beiden Kräfte ein Drehmoment M_R zur Beschleunigung der Umlenkrolle erzeugt.

Drehmoment: $M_R = (F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) \cdot R$

wobei Radius der Umlenkrolle: R

D'Alembertsches Prinzip für die Drehmomente an der Umlenkrolle m_R

$$\sum_i \vec{M}_i - J_R \vec{\alpha} = 0$$

Massenträgheitsmoment der Umlenkrolle:

$$J_R = \frac{1}{2} m_R R^2$$

Rollbedingung: $a = R \cdot \alpha$

Es folgt:

$$\begin{aligned}(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) \cdot R - \frac{1}{2} m_R R^2 \frac{a}{R} &= 0 \\ (F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) &= \frac{1}{2} m_R a\end{aligned}\quad (6)$$

Addiere Gleichung (5) und Gleichung (6). Es folgt:

$$\begin{aligned}(m_{HZ} \cdot \sin(\beta) - m_{VZ} \cdot \sin(\alpha) - \mu_R \cdot (m_{HZ} \cdot \cos(\beta) - m_{VZ} \cdot \cos(\alpha))) \cdot g \\ = \left(\frac{3}{2} m_{VZ} + 2 m_{HZ} + \frac{1}{2} m_R \right) \cdot a\end{aligned}\quad (7)$$

Lösung für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}a &= \frac{m_{HZ} \sin(\beta) - m_{VZ} \sin(\alpha) - \mu_R (m_{HZ} \cos(\beta) + m_{VZ} \cos(\alpha))}{\frac{3}{2} m_{VZ} + 2 m_{HZ} + \frac{1}{2} m_R} \cdot g \\ a &= \frac{(1,0 \cdot \sin(60^\circ) - 1,5 \cdot \sin(30^\circ)) - 0,04 \cdot (1,0 \cdot \cos(60^\circ) + 1,5 \cdot \cos(30^\circ))}{1,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 0,2} \cdot g\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$a = 0,0101 \cdot g = 0,101 \text{ ms}^{-2}$$

2b. Berechnung der Seilkräfte:

Nach Gl. (2) aus 2a. gilt:

$$m_{HZ} g \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot m_{HZ} g \cdot \cos(\beta) - F_{S,HZ} - 2 m_{HZ} a = 0$$

Seilkraft an HZ:

$$\begin{aligned}F_{S,HZ} &= m_{HZ} g \cdot \sin(\beta) - \mu_R \cdot m_{HZ} g \cdot \cos(\beta) - 2 m_{HZ} a \\ F_{S,HZ} &= \left[(1,0 \cdot \sin(60^\circ) - 0,04 \cdot 1,0 \cdot \cos(60^\circ)) \cdot 10 - 2 \cdot 1,0 \cdot 0,101 \right] N \\ F_{S,HZ} &= 8,258 \text{ N}\end{aligned}$$

Nach Gl. (4) aus 2a. gilt:

$$F_{S,VZ} - \mu_R \cdot m_{VZ} g \cdot \cos(\alpha) - m_{VZ} g \cdot \sin(\alpha) - \frac{3}{2} m_{VZ} \cdot a = 0$$

Seilkraft an VZ:

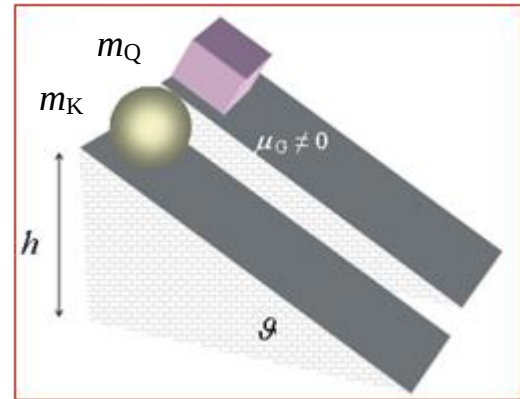
$$\begin{aligned}F_{S,VZ} &= \mu_R \cdot m_{VZ} g \cdot \cos(\alpha) + m_{VZ} g \cdot \sin(\alpha) + \frac{3}{2} m_{VZ} \cdot a \\ F_{S,VZ} &= \left[(0,04 \cdot 1,5 \cdot \cos(30^\circ) + 1,5 \cdot \sin(30^\circ)) \cdot 10 + \frac{3}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,101 \right] N \\ F_{S,VZ} &= 8,248 \text{ N}\end{aligned}$$

Kontrolle: Es muss gelten:

$$\begin{aligned}(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) &= \frac{1}{2} m_R a \\ (F_{S,HZ} - F_{S,VZ}) &\cong 0,01 \text{ N} \\ \frac{1}{2} m_R a &= (0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,101) \text{ N} \cong 0,01 \text{ N}\end{aligned}$$

3. Die folgende Aufgabe wurde bereits als Übung zum Thema Dynamik behandelt. Bestimmen Sie jetzt die Lösungen, **ohne das D'Alembertsche Prinzip** zu verwenden, d. h. ohne die Beschleunigung zu ermitteln:

Man vergleiche eine rollende Kugel mit Masse $m_K = 1\text{ kg}$ und einen gleitenden Quader mit Masse $m_Q = 1\text{ kg}$ auf einer schiefen Ebene. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\vartheta = 30^\circ$. Beide Körper starten in der Höhe $h = 1\text{ m}$ ohne Anfangsgeschwindigkeit (siehe Abb., nicht maßstabgerecht!).



- a. Wie groß muss die Gleitreibungszahl μ_G für den Quader sein, damit er in der gleichen Zeit wie die Kugel unten ankommt? Die Rollreibung der Kugel soll vernachlässigt werden. $\mu_G = 0,165$
- b. Wie groß sind die Zeiten für das Rollen bzw. das Gleiten? $1,058\text{ s}$

Lösungen:

- 3a. Kugel und Quader bewegen sich gleichmäßig beschleunigt. Wenn die Endgeschwindigkeiten gleich groß sind, sind auch die Zeiten für die gesamte Bewegung auf der schiefen Ebenen gleich groß. Die Endgeschwindigkeiten können mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes bestimmt werden. Sowohl die Kugel, als auch der Quader besitzt im Ausgangszustand (Index 0) folgende Energien:

$$E_{\text{ges},0} = E_{\text{pot},0} + E_{\text{kin},0} \quad \text{mit} \quad E_{\text{kin},0} = 0$$

$$E_{\text{ges},0} = E_{\text{pot},0} = m g h = (1 \cdot 10 \cdot 1) \text{ J} = 10 \text{ J}$$

Rollen der Kugel:

Für die Kugel gilt im Endzustand (Index 1) am Ende der schiefen Ebene:

$$E_{\text{gesK},1} = E_{\text{potK},1} + E_{\text{kinK},1} \quad \text{mit} \quad E_{\text{potK},1} = 0$$

Bei einer rollenden Kugel verteilt sich die kinetische Energie auf einen Anteil für die kinetische Energie der Translation und einen Anteil für die kinetische Energie der Rotation:

$$E_{\text{kinK},1} = E_{\text{kinK,trans},1} + E_{\text{kinK,rot},1}$$

Translation:

$$E_{\text{kinK,trans},1} = \frac{1}{2} m_K \cdot v_{1K}^2$$

Rotation:

$$E_{\text{kinK,rot},1} = \frac{1}{2} J \cdot \omega_{1K}^2$$

Für J gilt allgemein:

$$J = k \cdot m_K \cdot R^2$$

und der Rollbedingung:

$$v = R \cdot \omega$$

woraus folgt:

$$E_{\text{kinK,rot},1} = \frac{1}{2} k \cdot m_K \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v_{1K}}{R} \right)^2 = \frac{k}{2} m_K \cdot v_{1K}^2$$

Für die Kugel ist $k = \frac{2}{5}$:

$$E_{kinK,rot,1} = \frac{1}{5} m_K \cdot v_{1K}^2$$

Es folgt:

$$E_{gesK,1} = E_{kinK,1} = \frac{1}{2} m_K \cdot v_{1K}^2 + \frac{1}{5} m_K \cdot v_{1K}^2 = \frac{7}{10} m_K \cdot v_{1K}^2$$

Nach dem Energieerhaltungssatz sind die Gesamtenergien in Pos. 0 und Pos. 1 gleich groß:

$$E_{gesK,1} = E_{kinK,1} = \frac{7}{10} m_K \cdot v_{1K}^2 = m_K g h = E_{potK,0} = E_{gesK,0}$$

Es folgt:

$$v_{1K} = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h} = \sqrt{\frac{10}{7} 10 \cdot 1} \text{ m s}^{-1} = 3,78 \text{ m s}^{-1} \quad (*)$$

Gleiten des Quaders:

Für den gleitenden Quader gilt im Endzustand (Indes 1) am Ende der schiefen Ebene:

$$E_{gesQ,1} = E_{potQ,1} + E_{kinQ,1} + W_R \text{ mit } E_{potK,1} = 0$$

und:

$$E_{kinQ} = \frac{1}{2} m_Q \cdot v_{1Q}^2$$

und der Reibungsarbeit:

$$W_R = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cos(\vartheta) \cdot s$$

für den Weg s gilt:

$$s = \frac{h}{\sin(\vartheta)}$$

es folgt:

$$W_R = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cot(\vartheta) \cdot h$$

Einsetzen:

$$E_{gesQ,1} = \frac{1}{2} m_Q \cdot v_{1Q}^2 + \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cot(\vartheta) \cdot h$$

Nach dem Energieerhaltungssatz sind die Gesamtenergien in Pos. 0 und Pos. 1 gleich groß:

$$E_{gesQ,1} = \frac{1}{2} m_Q \cdot v_{1Q}^2 + \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cot(\vartheta) \cdot h = m_Q g h = E_{potQ,0} = E_{gesQ,0}$$

Auflösen nach v_{1Q} :

$$\frac{1}{2} \cdot v_{1Q}^2 + \mu_G \cdot g \cdot \cot(\vartheta) \cdot h = g h$$

$$v_{1Q} = \sqrt{2gh \cdot (1 - \mu_G \cdot \cot(\vartheta))}$$

Gesucht der Wert von μ_G , für den $v_{1K} = v_{1Q}$ ist.

$$v_{1K} = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h} = \sqrt{2gh \cdot (1 - \mu_G \cdot \cot(\vartheta))} = v_{1Q}$$

$$\frac{10}{7} g \cdot h = 2gh \cdot (1 - \mu_G \cdot \cot(\vartheta))$$

$$\mu_G \cdot \cot(\vartheta) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

Lösung:

$$\mu_G = \frac{2}{7} \cdot \tan(\vartheta) = 0,165$$

3b. Nach Gl. (*) gilt für die Endgeschwindigkeit der rollenden Kugel:

$$v_{1K} = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h} = \sqrt{\frac{10}{7} 10 \cdot 1} \text{ m s}^{-1} = 3,78 \text{ m s}^{-1}$$

Da es sich um eine beschleunigte Bewegung handelt, gilt ferner:

$$v(t) = a \cdot t \text{ und } s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

es folgt:

$$v(t) = \frac{2 \cdot s}{t}$$

Einsetzen:

$$v_{1K} = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h} = \frac{2 \cdot s}{t_{1K}} = \frac{2 \cdot h}{t_{1K} \cdot \sin(\vartheta)}$$

Lösung:

$$t_{1K} = \frac{2 \cdot h}{\sin(\vartheta)} \sqrt{\frac{7}{10 \cdot g \cdot h}} = \frac{1}{\sin(\vartheta)} \sqrt{\frac{14 \cdot h}{5 \cdot g}}$$

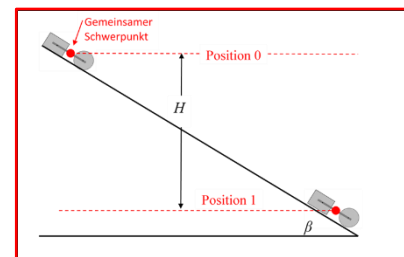
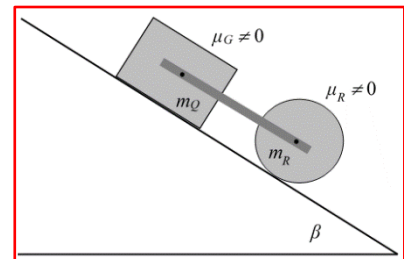
Ergebnis:

$$t_{1K} = \frac{1}{\sin(30^\circ)} \sqrt{\frac{14 \cdot 1}{5 \cdot 10}} s = 1,058 s$$

3. Ein Quader mit Masse $m_Q = 1 \text{ kg}$ und eine Rolle (Vollzylinder) mit Masse $m_R = 1 \text{ kg}$ und Radius R sind durch eine (näherungsweise masselose) Stange verbunden. Der Zylinder rollt ohne zu gleiten. Auf den Quader wirkt eine Gleitreibungskraft mit $\mu_G = 0,4$, auf die Rolle wirkt eine Rollreibungskraft mit $\mu_R = 0,05$. Der Winkel der schiefen Ebene beträgt $\beta = 30^\circ$.

Das System aus Quader und Vollzylinder Masse bewegt sich von der Position 0 in die Position 1. Der Schwerpunkt bewegt sich dabei um die Höhe $H = 2 \text{ m}$ nach unten. In der Position 0 hat das System die Geschwindigkeit $v_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit in Position 1?

$$v_1 = 6,67 \text{ ms}^{-1}$$



Lösung:

Gesamtenergie in Position 0:

$$E_{\text{ges},0} = E_{\text{pot},0} + E_{\text{kin},0} = E_{\text{pot},0} + (E_{\text{kin-trans},0} + E_{\text{kin-rot},0})$$

$$E_{\text{pot},0} = (m_Q + m_R) \cdot g \cdot H = (1+1) \cdot 10 \cdot 2 \text{ J} = 40 \text{ J}$$

$$E_{\text{kin-trans},0} = \frac{1}{2} (m_Q + m_R) v_0^2 = 0,5 \cdot 2 \cdot 5^2 \text{ J} = 25 \text{ J}$$

$$E_{\text{kin-rot},0} = \frac{1}{2} J_R \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_R \cdot R^2 \right) \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{4} m_R \cdot v_0^2$$

$$E_{\text{kin-rot},0} = \frac{1}{4} m_R \cdot v_0^2 = 0,25 \cdot 1 \cdot 5^2 \text{ J} = 6,25 \text{ J}$$

$$E_{\text{ges},0} = 40 \text{ J} + 25 \text{ J} + 6,25 \text{ J} = 71,25 \text{ J}$$

Gesamtenergie in Position 1:

$$E_{\text{ges},1} = E_{\text{kin-trans},Q,1} + E_{\text{kin-trans},R,1} + E_{\text{kin-rot},R,1} + W_{R,Q} + W_{R,R}$$

$$W_{R,Q} = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{H}{\sin(\beta)} = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot H \cdot \cot(\beta)$$

$$W_{R,Q} = (0,4 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 2) J \cdot \cot(\beta) = 13,85 J$$

$$W_{R,R} = \mu_R \cdot m_R \cdot g \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{H}{\sin(\beta)} = \mu_R \cdot m_R \cdot g \cdot \cot(\beta)$$

$$W_{R,R} = (0,05 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 2) \cdot \cot(\beta) = 1,73 J$$

$$E_{ges,1} = \left(\frac{1}{2} (m_Q + m_R) + \frac{1}{4} m_R \right) \cdot v_1^2 + W_{R,Q} + W_{R,R}$$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges,1} = E_{ges,0}$

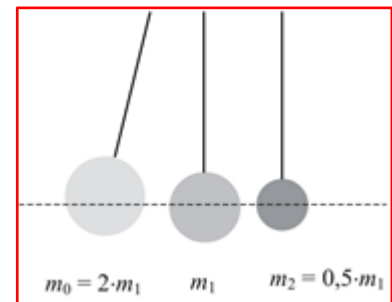
$$E_{ges,0} - W_{R,Q} - W_{R,R} = \left(\frac{1}{2} (m_Q + m_R) + \frac{1}{4} m_R \right) \cdot v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{E_{ges,0} - W_{R,Q} - W_{R,R}}{0,5(m_Q + m_R) + 0,25 \cdot m_R}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{(71,25 - 13,85 - 1,73) J}{(0,5(1+1) + 0,25 \cdot 1) kg}} = \sqrt{\frac{55,67 m^2}{1,25 s^2}} = 6,67 m s^{-1}$$

3. Ein Pendel mit der Masse $m_0 = 2 \cdot m_1$ und der Geschwindigkeit $v_0 = 1 m s^{-1}$ stößt elastisch auf zwei in Ruhe nebeneinander hängende Pendel mit der Masse m_1 und $m_2 = 0,5 m_1$.

Bei den Stoßvorgängen befinden sich alle Schwerpunkte auf gleicher Höhe (gestrichelte Linie).



- a. Wie groß ist die Geschwindigkeit u_0 der Masse m_0 und die Geschwindigkeit u_2 der Masse m_2 nach dem Stoß?

$$u_0 = +0,3333 m s^{-1}, u_2 = 1,7777 m s^{-1}$$

- b. Welcher Anteil der ursprünglichen Energie von m_0 wird auf m_2 übertragen?

$$\frac{E_{kin,2}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = 79,0\%$$

Lösungen:

- 3a. Es handelt sich um zwei separate zentral elastische Stöße: Zunächst stößt m_0 auf m_1 , dann stößt m_1 auf m_2 .

Die allgemeine Gleichungen für die Stoßpartner m_1 mit $\vec{v}_1$ (vorher) und $\vec{u}_1$ (nachher) und m_2 mit $\vec{v}_2$ und $\vec{u}_2$ für einen zentralen elastischen Stoß lauten (siehe Formelsammlung):

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2$$

1. **Anwendung auf ersten Stoß:** $m_0 = 2 m_1$ mit $v_0 = 1 m s^{-1}$ **stößt auf** m_1 mit $v_1 = 0$:
Geschwindigkeit u_0 von m_0 nach dem ersten Stoß:

$$u_0 = \frac{2m_1}{m_0 + m_1} v_1 + \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} v_0$$

Lösung:

$$u_0 = \frac{2m_1 - m_1}{2m_1 + m_1} v_0 = +\frac{1}{3} v_0 = +0,3333 m s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem ersten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} v_0 + \frac{m_1 - m_0}{m_0 - m_1} v_1$$

$$u_1 = \frac{2 \cdot 2m_1}{2m_1 + m_1} v_0 = \frac{2 \cdot 2}{3} v_0 = \frac{4}{3} v_0 = 1,3333 m s^{-1}$$

2. Anwendung auf zweiten Stoß: m_1 mit $v_1 = 1,3333 m s^{-1}$ stößt auf $m_2 = 0,5 m_1$ mit $v_2 = 0$:

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem zweiten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - 0,5m_1}{m_1 + 0,5m_1} v_1 = \frac{0,5}{1,5} v_1$$

$$u_1 = 0,3333 \cdot 1,333 m s^{-1} = -0,4444 m s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_2 von m_2 nach dem zweiten Stoß:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{1 + 0,5} v_1 = 1,3333 \cdot 1,3333 m s^{-1}$$

Ergebnis:

$$u_2 = 1,3333 \cdot 1,3333 m s^{-1} = 1,7777 m s^{-1}$$

3b. Energie der Masse m_0 vor dem ersten Stoß:

$$E_{kin,0}^{vorher} = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} (2m_1) 1^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 1 \frac{m^2}{s^2}$$

Energie der Masse m_2 nach dem zweiten Stoß:

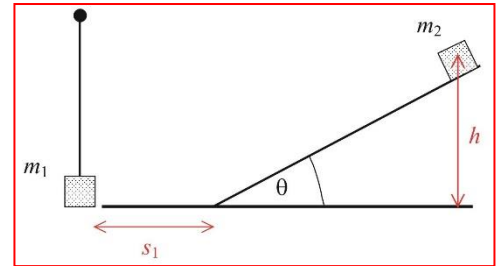
$$E_{kin,2}^{nachher} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} 0,5m_1 \cdot 1,7777^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,2}^{nachher} = \frac{1}{2} 0,5m_1 \cdot 1,7777^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0,7901 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis:

$$P_1 = \frac{E_{kin,2}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = \frac{0,7901}{1,0000} = 79,0\%$$

3. Ein Körper der Masse $m_2 = 1\text{ kg}$ gleitet aus der Höhe $h = 1\text{ m}$ eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta = 30^\circ$ hinab. Anschließend rutscht er auf einem horizontalen Streckenabschnitt der Länge $s_1 = 1\text{ m}$ und stößt am Ende auf einen Pendelkörper mit der Masse $m_1 = 1,5\text{ kg}$. Die Gleitreibungszahl auf der gesamten Strecke beträgt $\mu_G = 0,2$. Berechnen Sie, um welchen



Winkel das Pendel mit der Masse m_1 ausschwingt, wenn die Länge der Pendelstange $L = 1,5\text{ m}$ beträgt (Masse der Pendelstange kann vernachlässigt werden), für folgende Bedingungen:

- a. Einen (vollkommen) **elastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1 .
 $\varphi_{\max} = 36,23^\circ$
- b. Einen **vollkommen unelastischen Stoß**.
 $\varphi_{\max} = 17,89^\circ$
- c. Wie groß ist der Energieverlust beim vollkommen unelastischen Stoß (3c.) relativ zur kinetischen Energie des Körpers m_2 unmittelbar vor dem Stoß?
 $\frac{Q_{vu}}{E_{kin,2}} = 60\%$

3. Gleitbewegung der Masse m_2 :

Gesamtenergie der Masse m_2 am Anfang: $E_{ges,A,2} = E_{pot,A,2} + E_{kin,A,2}$
 Kinetische Energie am Anfang: $E_{kin,A,2} = 0$
 Potentielle Energie am Anfang: $E_{pot,A,2} = m_2 g h = 10\text{ J}$
 Gesamtenergie am Anfang: $E_{ges,A,2} = E_{pot,A,2} = m_2 g h = 10\text{ J}$
 Gesamtenergie am Ende:
 mit der potentiellen Energie: $E_{pot,E,2} = 0$
 und der kinetischen Energie: $E_{kin,E,2} = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$
 Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = W_{R0} + W_{R1}$,
 wobei W_{R0} der verlorenen Reibungsarbeit auf der schiefen Ebene entspricht:

$$W_{R0} = \mu_G m g \cos \theta s_0$$

Der Gleitweg auf der schiefen Ebene beträgt: $s_0 = \frac{h}{\sin \theta} = 2\text{ m}$

für die Reibungsarbeit W_{R0} folgt mit s_0 : $W_{R0} = \mu_G m g \cos \theta s_0 = 3,464\text{ J}$

Gleitweg horizontal: $s_1 = 1\text{ m}$

W_{R1} bezeichnet die Reibungsarbeit entlang des horizontalen Wegstücks s_1 :

$$W_{R1} = \mu_G m g s_1 = 2,000\text{ J}$$

Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = W_{R0} + W_{R1} = 5,464\text{ J}$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges,A,2} = E_{ges,E,2}$

Einsetzen: $E_{pot,A,2} = E_{kin,E,2} + W_{R,ges}$

Kinetische Energie der Masse m_2 unmittelbar vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$E_{kin,E,2} = E_{pot,A,2} - W_{R,ges} = 4,536\text{ J}$$

Geschwindigkeit des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

Ergebnis:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin,E,2}}{m_2}} = 3,012 \text{ m s}^{-1}$$

3a. (Vollkommen) Elastischer Stoß mit $v_1 = 0$:

Ansatz:

Impulserhaltungssatz:

$$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Lösung nach Formelsammlung (Ableitung siehe Vorlesung):

Geschwindigkeit u_1 :

$$u_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

mit $v_1 = 0$:

$$u_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2}{2,5} v_2 = \frac{4}{5} \cdot 3,012 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_1 = 2,4096 \text{ m s}^{-1}$$

Geschwindigkeit u_2 :

$$u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

mit $v_1 = 0$:

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1 - 1,5}{2,5} v_2 = -\frac{1}{5} \cdot 3,012 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_2 = 0,6024 \text{ m s}^{-1}$$

Energieerhaltungssatz:

$$m_1 g h_{\text{elastisch}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$h_{\text{elastisch}} = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{2,4096^2 \text{ m s}^{-2}}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 0,290 \text{ m}$$

Für den Winkelausschlag $\varphi_{\max}$ des Pendels gilt:

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{L - h_{\text{elastisch}}}{L}$$

Winkelausschlag:

$$\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{L - h_{\text{elastisch}}}{L}\right)$$

$$\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{1,5 - 0,290}{1,5}\right) = 36,23^\circ$$

3b. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$

Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.

Ansatz:

Impulserhaltungssatz:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + Q_{vu}$$

Lösung für u :

$$u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1 \text{ kg}}{2,5 \text{ kg}} v_2 = \frac{2}{5} v_2$$

$$u = 0,4 \cdot 3,012 \text{ m s}^{-1} = 1,2048 \text{ m s}^{-1}$$

Energieerhaltungssatz:

$$m_1 g h_{\text{vollk.unelastisch}} = \frac{1}{2} m_1 u_{\text{vollk.unelastisch},1}^2$$

$$h_{\text{vollk.unelastisch}} = \frac{u^2}{2g} = \frac{1,2048^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 10 m s^{-2}} = 0,0725 m$$

Winkelausschlag:

$$\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{L - h_{\text{unelastisch}}}{L}\right)$$

$$\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{1,5 - 0,0726}{1,5}\right) = 17,89^\circ$$

3c. Energieverlust beim vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$;

Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Energieverlust:

$$Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$$

mit $u = \frac{2}{5} v_2$

$$Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{4}{25} v_2^2 = \frac{1}{2} \left(m_2 - \frac{4}{25} (m_1 + m_2) \right) v_2^2$$

Setze: $m_1 = 3m$ und $m_2 = 2m$

$$Q_{vu} = \frac{1}{2} (2m) v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{4}{25} (5m) v_2^2$$

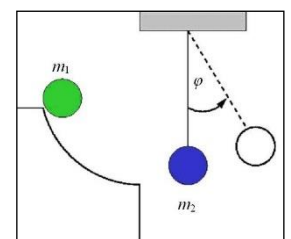
$$Q_{vu} = \frac{1}{2} (2m) \left[1 - \frac{2}{5} \right] v_2^2$$

$$Q_{vu} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} 2m \cdot v_2^2 \right) = \frac{6}{10} \left(\frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \right) = 0,6 \cdot E_{\text{kin},2}$$

Relativer Energieverlust:

$$\frac{Q_{vu}}{E_{\text{kin},2}} = \frac{6}{10} = 60\%$$

3. Eine homogene Kugel der Masse $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ und Radius $r_1 = 0,2 \text{ m}$ rollt eine Bahn in Form eines Viertelkreises mit dem Radius $R = 1 \text{ m}$ herunter und stößt mit einer zweiten Kugel mit gleichem Radius und der Masse $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ zentral und elastisch zusammen. Die zweite Kugel hängt an einem $L = 1,2 \text{ m}$ langen Seil. Die Masse des Seils ist vernachlässigbar.



- Wie groß ist die Geschwindigkeit der ersten Kugel unmittelbar vor dem Stoß?
- Um welchen Winkel φ wird die zweite Kugel am Seil nach dem Stoß ausgelenkt?
- Wie groß wäre die Deformationsenergie, wenn die Kugeln nach dem Stoß aneinanderhaften würden?

$$v_1 = 3,381 \text{ ms}^{-1}$$

$$\varphi = 79,8^\circ$$

$$Q = 0,6859 \text{ J}$$

- 3a. Energieerhaltungssatz für m_1 : Gesamtenergie am Beginn ist gleich Gesamtenergie am Ende der Rollstrecke:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}$$

$$m_1 g (R-r) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

$$m_1 g (R-r) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m_1 R^2 \right) \omega_1^2$$

Es gilt die Rollbedingung:

$$v_1 = r \cdot \omega_1$$

Es folgt:

$$m_1 g (R-r) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{2}{10} m_1 R^2 \frac{v_1^2}{R^2}$$

$$m_1 g (R-r) = \frac{7}{10} m_1 v_1^2$$

Geschwindigkeit von m_1 vor dem Stoß: $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} (R-r) \cdot g}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot (1-0,2) m \cdot 10 m s^{-2}}$$

Ergebnis:

$$v_1 = 3,381 m s^{-1}$$

3b. Zentraler elastischer Stoß zwischen m_1 und m_2 . Es gelten der

Impulserhaltungssatz:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_1 u_2$$

und der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Aus der Formelsammlung kann die Lösung für u_2 entnommen werden:

$$u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Da $v_2 = 0$ ist, gilt:

$$u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{0,6}{0,5} \cdot 3,381 = 4,057 m s^{-1}$$

Nach dem Stoß wird die kinetische Energie des Pendels mit Masse m_2 und der Pendellänge L ausgelenkt und dabei der wird der Schwerpunkt um h angehoben. Es gilt:

$$\frac{1}{2} m_2 u_2^2 = m_2 g h$$

$$\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 = m_2 g h$$

$$h = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2 g}$$

$$h = \left(\frac{2 \cdot 0,3}{0,3 + 0,2} \right)^2 \cdot \frac{3,381^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 10 m s^{-2}} = 0,8230 m$$

Auslenkungswinkel:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{R-h}{R} \right) = \arccos \left(\frac{1,0-0,8230}{1,0} \right)$$

Ergebnis:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1,0-0,8230}{1,0} \right) = 79,8^\circ$$

3c. Es handelt sich um einen vollkommen unelastischen Stoß.

Es gilt der Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u$

Es folgt: $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0,3}{0,3 + 0,2} v_1 = \frac{3}{5} \cdot 3,381 \text{ m s}^{-1}$

$$u = 2,0286 \text{ m s}^{-1}$$

Der Energieerhaltungssatz in erweiterter Form lautet:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 + Q$$

Deformationsenergie

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot v_1^2$$

$$Q = \left(\frac{1}{2} m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \right) \cdot v_1^2$$

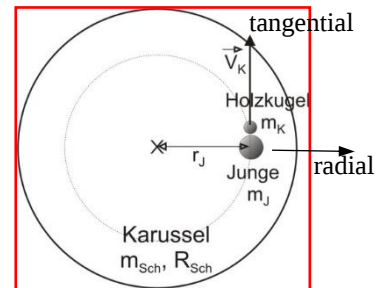
Ergebnis:

$$Q = \left(\frac{1}{2} 0,3 \text{ kg} \left(1 - \frac{0,3}{0,3 + 0,2} \right) \right) \cdot 3,381^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Ergebnis:

$$Q = 0,6859 \text{ J}$$

4. Ein Junge (Masse $m_J = 40 \text{ kg}$) sitzt mit einer Holzkugel der Masse $m_{Ku} = 2 \text{ kg}$ auf einem Karussell in Form einer Scheibe mit Masse $m_{Sch} = 100 \text{ kg}$ und Radius $R_{Sch} = 1,5 \text{ m}$ in einem Abstand $r_J = 1,3 \text{ m}$ von der Drehachse. Junge und Kugel können als Massenpunkte, das Karussell als Vollzylinder behandelt werden. Das Karussell steht zunächst still.



- a. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich das Karussell mit dem Jungen (ohne Holzkugel), wenn der Junge die Kugel mit der Geschwindigkeit $v_K = 10 \text{ ms}^{-1}$ radial einem anderen Kind zuwirft? $\omega_K = 0$
- b. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich das Karussell mit dem Jungen (ohne Holzkugel), wenn der Junge die Kugel mit der Geschwindigkeit $v_K = 10 \text{ ms}^{-1}$ tangential einem anderen Kind zuwirft? $\omega_K = 0,144 \text{ s}^{-1}$
- c. Verwenden Sie die Lösung des Aufgabenteils 4b. und bestimmen Sie, wie viele Umdrehungen N das Karussell zusammen mit dem sitzenden Jungen bis zum Stillstand ausführt, wenn in der Drehachse ein Reibungsdrehmoment von $-0,2 \text{ Nm}$ wirkt? $N = 1,497$

Lösungen

- 4a. Bei einem Wurf in radialer Richtung wird der Drehimpuls des Karussells nicht beeinflusst. Da das Karussell anfänglich stillstehen soll, bleibt es auch nach dem radialen Wurf in Ruhe: $\omega_K = 0$

- 4b. Ein Wurf der Kugel in tangentialer Richtung kann den Drehimpuls des Karussells beeinflussen:

Zustand 1: Alles ruht

Es folgt: $L_1 = 0$

Zustand 2: Kugel fliegt mit Geschwindigkeit v_K tangential weg, ihr Drehimpuls ist L_{Ku}

Karussell mit dem Jungen dreht sich im Uhrzeigersinn mit Winkelgeschwindigkeit ω_K

Es folgt: $L_2 = -L_{Ku} + (L_J + L_{Sch}) = -m_{Ku} r_J v_K + (m_J r_J^2 + J_{Sch}) \cdot \omega_K$

mit: $L_K = m_{Ku} r_J v_K = 2 \text{ kg} \cdot 1,3 \text{ m} \cdot 10 \text{ ms}^{-1} = 26 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$L_J = m_J \cdot r_J^2 \cdot \omega_K = 40 \text{ kg} \cdot 1,3^2 \text{ m}^2 \cdot \omega_K = 67,6 \text{ kg m}^2 \cdot \omega_K$$

$$L_{Sch} = \frac{1}{2} m_{Sch} \cdot R_{Sch}^2 \cdot \omega_K$$

$$L_{Sch} = 0,5 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 1,5^2 \text{ m}^2 \cdot \omega_K = 112,5 \text{ kg m}^2 \cdot \omega_K$$

Drehimpulserhaltungssatz: $L_1 = L_2$

Es folgt: $0 = -m_{Ku} r_J v_K + (m_J r_J^2 + J_{Sch}) \cdot \omega_K$

Lösung für ω :

$$\omega_K = \frac{m_{Ku} r_J v_K}{m_J r_J^2 + J_{Sch}} = \frac{26 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}{(67,6 + 112,5) \text{ kg m}^2} = 0,144 \text{ s}^{-1}$$

Drehzahl: $n_K = \frac{\omega_K}{2\pi} = 0,0230 \text{ s}^{-1}$

4c. Dynamische Grundgleichung der Drehbewegung:

$$M = J \cdot \alpha$$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{-0,2 \text{ Nm}}{(67,6 + 112,5) \text{ kg m}^2} = -0,00111 \text{ s}^{-2}$

Für die Zeit des Bremsvorgangs t_x gilt:

$$n(t_x) = n_K + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t_x = 0$$

Es folgt: $t_x = \frac{-n_K \cdot 2\pi}{\alpha} = \frac{-2\pi \cdot 0,0230 \text{ s}^{-1}}{-0,00111 \text{ s}^{-2}} = 130,19 \text{ s}$

Zahl der Umdrehungen während des Abbremsvorgangs:

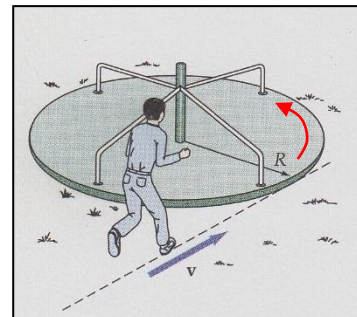
$$N = N(t_x) = n_K \cdot t_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t_x^2$$

$$N = 0,0230 \text{ s}^{-1} \cdot 130,19 \text{ s} + \frac{-0,00111 \text{ s}^{-2}}{4\pi} \cdot 130,19^2 \text{ s}^2$$

Ergebnis:

$$N = N(t_x) = 2,9944 - 1,4972 = 1,497$$

4. Ein Junge mit einer Masse von $m_J = 50 \text{ kg}$ läuft mit einer Geschwindigkeit $v_J = 3 \text{ m s}^{-1}$ entlang einer Linie, die tangential an einem reibungsfrei drehenden Karussell mit Masse $m_K = 250 \text{ kg}$ und Radius $R_K = 3 \text{ m}$ vorbei führt. Drehrichtung und Geschwindigkeitsrichtung können der Skizze entnommen werden. Die Umdrehungszeit des Karussells betrage $T_K = 12,56 \text{ s}$. Der Junge springt im Berührungspunkt der Tangente auf das Karussell.



- a. Wie groß ist die Umdrehungszeit des Karussells nach dem Aufsprung?

$$T'_K = 9,77 \text{ s}$$

- b. Bestimmen Sie den Anteil der anfänglich verfügbaren Energie, die beim Aufspringen des Jungen in Reibungs- bzw. Rutscharbeit (zwischen Schuhen und Karussell) umgewandelt wird.

$$\frac{\Delta W}{E_{\text{ges}}} = 0,1095 \hat{=} 10,95\%$$

- c. Der Junge bleibt zunächst einige Umdrehungen lang auf einem Punkt am Karussellrand bei $R_K \approx 3 \text{ m}$ stehen und springt dann mit $v_1 = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ tangential in Drehrichtung des Karussells wieder ab. Welche Umdrehungszeit hat das Karussell anschließend?

$$T_K''' = \frac{1}{n_K'''} = 14,2 \text{ s}$$

- 4a. Drehimpuls des Jungen bezogen auf den Drehpunkt des Karussells mit Radius R_K :

$$L_J = R_K \cdot m_J v_J$$

Drehimpuls des Karussells vor Aufsprung des Jungen:

$$L_K = J_K \cdot \omega_K$$

mit:

$$J_K = \frac{1}{2} \cdot 250 \text{ kg} \cdot 3^2 \text{ m}^2 = 1125 \text{ kg m}^2$$

Drehimpuls des Karussells nach Aufsprung des Jungen:

$$L'_K = (J_K + m_J \cdot R_K^2) \cdot \omega'_K$$

Drehimpulserhaltungssatz:

$$L_J + L_K = L'_K$$

$$R_K m_J v_J + J_K \omega_K = (J_K + m_J R_K^2) \cdot \omega'_K$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega'_K = \frac{R_K m_J v_J + J_K \omega_K}{J_K + m_J R_K^2}$$

mit

$$\omega_K = 2\pi \cdot n_K = \frac{2\pi}{T_K} = \frac{2\pi}{12,56 \text{ s}} = 0,500 \text{ s}^{-1}$$

Drehzahl:

$$n'_K = \frac{1}{2\pi} \frac{R_K m_J v_J + J_K \omega_K}{J_K + m_J R_K^2}$$

$$n'_K = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3 \text{ m} \cdot 50 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m s}^{-1} + 1125 \text{ kg m}^2 \cdot 0,500 \text{ s}^{-1}}{1125 \text{ kg m}^2 + 50 \text{ kg} \cdot 3^2 \text{ m}^2}$$

$$n'_K = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{450 + 562,5}{1125 + 450} \frac{1}{\text{s}} = 0,1023 \text{ s}^{-1}$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega'_K = 2\pi n'_K = 2\pi \cdot 0,1023 \text{ s}^{-1} = 0,643 \text{ s}^{-1}$$

Umdrehungszeit nachher:

$$T'_K = \frac{1}{n'_K} = \frac{1}{0,1023 \text{ s}^{-1}} = 9,77 \text{ s}$$

4b. Vor dem Aufsprung beträgt die kinetische Energie des Jungen:

$$E_{kin,J} = \frac{1}{2} m_J v_J^2 = \frac{1}{2} 50 \text{ kg} \cdot 3^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 225 \text{ J}$$

Die Rotationsenergie des Karussells beträgt:

$$E_{kin,K} = \frac{1}{2} J_K \omega_K^2 = \frac{1}{2} \cdot 1125 \text{ kg m}^2 \cdot 0,5^2 \text{ s}^{-2} = 140,625 \text{ J}$$

Die Rotationsenergie von Karussell und Jungen nach dem Aufsprung:

$$E_{kin,K+J} = \frac{1}{2} (J_K + m_J R_K^2) (\omega'_K)^2$$

$$E_{kin,K+J} = \frac{1}{2} \cdot (1125 \text{ kg m}^2 + 50 \text{ kg} \cdot 3^2 \text{ m}^2) \cdot 0,643^2 \text{ s}^{-2}$$

$$E_{kin,K+J} = 325,59 \text{ J}$$

Anteil der verlorenen Energie:

$$\frac{\Delta W}{E_{ges}} = \frac{E_{kin,J} + E_{kin,K} - E_{kin,K+J}}{E_{kin,J} + E_{kin,K}}$$

$$\frac{\Delta W}{E_{ges}} = \frac{225 \text{ J} + 140,625 \text{ J} - 325,59 \text{ J}}{225 \text{ J} + 140,625 \text{ J}} = \frac{40,035}{365,625} = 0,1095$$

10,95% der anfänglichen kinetischen Energie gehen als Wärmeenergie/Reibungsarbeit verloren.

4c. Das Karussell zusammen mit dem Jungen bei $R_K = 3m$ dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega'_K = 0,643s^{-1}$ (siehe Lösung 4a.).

Drehimpulsanteil der Karussells:

$$L'_K = J_K \cdot \omega'_K$$

$$L'_K = 1125kg\,m^2 \cdot 0,643s^{-1} = 723,375kg\,m^2\,s^{-1}$$

Drehimpulsanteil des Jungen:

$$L'_J = m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega'_K$$

$$L'_J = 50kg \cdot 3^2m^2 \cdot 0,643s^{-1} = 289,35kg\,m^2\,s^{-1}$$

Gesamtdrehimpuls von Karussell zusammen mit dem Jungen vor dem Absprung:

$$L'_{K+J} = (J_K + m_J R_K^2) \cdot \omega'_K = L'_K + L'_J$$

$$L'_{K+J} = (723,375 + 289,350)kg\,m^2\,s^{-1}$$

$$L'_{K+J} = 1012,725kg\,m^2\,s^{-1}$$

Wenn der Junge vom Karussell abspringt, muss der Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben. Der Drehimpulsanteil des Jungen wird also erhöht, während sich der Drehimpulsanteil des Karussells um den gleichen Anteil verringert.

Für den Gesamtdrehimpuls, also die Summe des Drehimpulses von Karussell ohne Junge plus dem Drehimpuls des mit v_1 relativ zum Karussell abspringenden Jungen gilt:

$$L''_{K+J} = L'' + L''_K = J_K \cdot \omega''_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \left(\omega'_K + \frac{v_1}{R_K} \right)$$

$$L''_{K+J} = J_K \cdot \omega''_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega'_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

Nach Drehimpulserhaltungssatz gilt: $L'_{K+J} = L''_{K+J}$

$$(J_K + m_J R_K^2) \cdot \omega'_K = J_K \cdot \omega''_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega'_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

$$J_K \cdot \omega'_K = J_K \cdot \omega''_K + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega''_K = \omega'_K - \frac{m_J \cdot R_K \cdot v_1}{J_K}$$

$$\omega''_K = 0,643s^{-1} - \frac{50kg \cdot 3m \cdot 1,5ms^{-1}}{1125kg\,m^2} = 0,443s^{-1}$$

Drehzahl

$$n''_K = \frac{1}{2\pi} \left(\omega'_K - \frac{m_J \cdot R_K \cdot v_1}{J_K} \right)$$

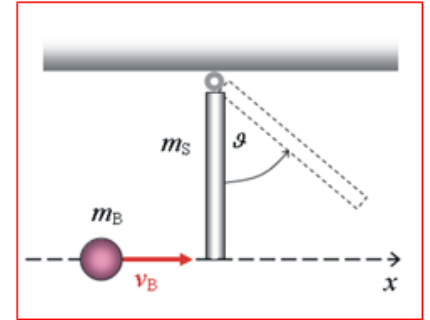
$$n''_K = \frac{1}{2\pi} \left(0,643s^{-1} - \frac{50kg \cdot 3m \cdot 1,5ms^{-1}}{1125kg\,m^2} \right)$$

Drehzahl des Karussells:

$$n''_K = \frac{0,443s^{-1}}{2\pi} = 0,07050s^{-1} \quad \text{Umdrehungszeit:}$$

$$T''_K = \frac{1}{n''_K} = 14,2s$$

4. Eine homogene Stange (Länge $l = 1 \text{ m}$, Masse $m_s = 1 \text{ kg}$) soll im Endpunkt drehbar gelagert und senkrecht aufgehängt sein. Ein Ball ($m_B = 1 \text{ kg}$) trifft die Stange am unteren Ende mit einer Geschwindigkeit von $v_B = 1 \text{ m s}^{-1}$ (siehe Abb.). Der Stoß soll elastisch sein und Reibungskräfte vernachlässigt werden.



- a. Welche Geschwindigkeit u_B hat der Ball, welche Winkelgeschwindigkeit ω_1 hat die Stange nach dem Stoß?

$$u_B = 0,5 \text{ m s}^{-1}, \quad \omega_1 = 1,5 \text{ s}^{-1}$$

- b. Wie groß ist der maximal Auslenkwinkel $\vartheta_{\max}$ der Stange nach dem Stoß?

$$\vartheta_{\max} = 15,74^\circ$$

- 4a. Für den elastischen Stoß des Balls m_B mit der senkrecht herabhängenden Stange m_s gilt: der Drehimpulserhaltungssatz:

$$m_B v_B l = J \omega_1 + m_B u_B l \quad (1)$$

und der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} J \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 \quad (2)$$

mit dem Massenträgheitsmoment einer Stange der Masse m_s mit Drehpunkt am Ende:

$$J = \frac{1}{3} m_s l^2 = \frac{1}{3} \text{ kg m}^2$$

Geschwindigkeit von m_B vor Stoß:

$$v_B$$

Geschwindigkeit von m_B nach Stoß:

$$u_B$$

Winkelgeschwindigkeit der drehenden Stange nach Stoß:

$$\omega_0 = 0$$

Winkelgeschwindigkeit der drehenden Stange nach Stoß:

$$\omega_1$$

Umformung von Gleichung (1) liefert:

$$\frac{J \omega_1}{m_B l} = v_B - u_B$$

Setze zur Vereinfachung:

$$\hat{J} = \frac{J}{m_B l^2} = \frac{\frac{1}{3} m_s l^2}{m_B l^2} = \frac{1}{3}$$

und bezeichne mit u_l die Bahngeschwindigkeit des Stangenendpunkts im Abstand l nach dem Stoß:

$$u_l = l \cdot \omega_1$$

damit folgt für Gleichung (1):

$$\hat{J} u_l = v_B - u_B$$

Umformung der Gleichung (2) liefert:

$$\frac{J \omega_1^2}{m_B} = v_B^2 - u_B^2$$

$$\frac{J l^2 \omega_1^2}{m_B l^2} = v_B^2 - u_B^2$$

Einsetzen von $\hat{J}$ und u_l :

$$\hat{J} u_l^2 = v_B^2 - u_B^2$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\hat{J} u_l = v_B - u_B \quad (3)$$

$$\hat{J} u_l^2 = v_B^2 - u_B^2 \quad (4)$$

Umformung von (3)

$$u_l = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B)$$

Einsetzen in (4)

$$\frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B)^2 = v_B^2 - u_B^2$$

$$v_B^2 - 2v_B u_B + u_B^2 = \hat{J} v_B^2 - \hat{J} u_B^2$$

$$v_B^2(1 - \hat{J}) - 2v_B u_B + u_B^2(1 + \hat{J}) = 0$$

$$u_B^2 - 2 \frac{v_B}{1 + \hat{J}} u_B = -v_B^2 \frac{1 - \hat{J}}{1 + \hat{J}}$$

Setze:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \hat{J}} = \frac{3}{4}$$

und

$$\beta = \frac{1 - \hat{J}}{1 + \hat{J}} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$u_B^2 - 2(\alpha v_B) u_B + \alpha^2 v_B^2 = \alpha^2 v_B^2 - \beta v_B^2$$

$$u_B = \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta} \cdot v_B + \alpha v_B$$

$$u_B = \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} \cdot v_B + \frac{3}{4} v_B = \left(\pm \sqrt{\frac{9-8}{16}} + \frac{3}{4}\right) v_B$$

$$u_{B+} = \left(+\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) v_B = v_B$$

Die Lösung $u_{B+} = v_B$ scheidet aus, weil sonst $u_l = 0$.

$$u_{B-} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) v_B = \frac{1}{2} v_B$$

Lösung für u_B :

$$u_B = \frac{1}{2} v_B = 0,5 \cdot 1,0 \text{ m s}^{-1} = 0,5 \text{ m s}^{-1}$$

Lösung für u_l und ω_1 :

$$u_l = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot v_B = \frac{3}{2} v_B$$

$$u_l = \frac{3}{2} v_B = \frac{3}{2} \cdot 1,0 \text{ m s}^{-1} = 1,5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{u_l}{l} = \frac{1,5 \text{ m s}^{-1}}{1 \text{ m}} = 1,5 \text{ s}^{-1}$$

Alternativer Lösungsweg (Es geht einfacher, wenn statt das Gleichungssystem allgemein zu lösen, direkt der Zahlenwert $\hat{J} = \frac{1}{3}$ eingesetzt wird.)

Lösung des Gleichungssystems:

$$\hat{J} u_l = v_B - u_B \rightarrow x = 3z - 3y \quad (5)$$

$$\hat{J} u_l^2 = v_B^2 - u_B^2 \rightarrow x^2 = 3z^2 - 3y^2 \quad (6)$$

Ziel ist die Bestimmung von x und y:

Bestimme y:

$$x = 3z - 3y$$

Einsetzen in Gl (6):

$$(3z - 3y)^2 = 3z^2 - 3y^2$$

$$3(z^2 - 2zy + y^2) = z^2 - y^2$$

$$4y^2 - 6zy = -2z^2$$

$$y^2 - 2\frac{3}{4}zy + \frac{9}{16}z^2 = \frac{9}{16}z^2 - \frac{8}{16}z^2 = \frac{1}{16}z^2$$

$$y - \frac{3}{4}z = \pm \frac{1}{4}z$$

$$y_+ = +\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}z = \frac{4}{4}z = z,$$

scheidet aus, weil sonst $u_l = 0$ wäre, also eine Trivallösung darstellt.

Lösung:

$$y_- = -\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}z = \frac{1}{2}z$$

Einsetzen:

$$u_B = \frac{1}{2}v_B = 5 \text{ m s}^{-1}$$

Bestimmung von

$$x = 3z - 3y = 3v_B - \frac{3}{2}v_B = \frac{3}{2}v_B$$

Einsetzen:

$$u_l = \frac{3}{2}v_B = \frac{3}{2} \cdot 1,0 \text{ m s}^{-1} = 1,5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\omega_l = \frac{u_l}{l} = \frac{1,5 \text{ m s}^{-1}}{1 \text{ m}} = 1,5 \text{ s}^{-1}$$

in Übereinstimmung mit der ersten Lösung.

- b.** Zur Bestimmung des maximalen Auslenkungswinkels dient wieder der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} J \omega_1^2 = m_l g h_1$$

wobei h_1 die Höhe bezeichnet, um die der Schwerpunkt beim Rückschwingen der Stange gehoben wird.

Es folgt:

$$h_1 = \frac{J \omega_1^2}{2 m_l g}$$

$$h_1 = \frac{\frac{1}{3} m_l l^2 \cdot 1,5^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot m_l \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = \frac{\frac{1}{3} 1 \text{ m}^2 \cdot 1,5^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2}}$$

$$h_1 = 0,0375 \text{ m} = 3,75 \text{ cm}$$

Der Auslenkwinkel ist:

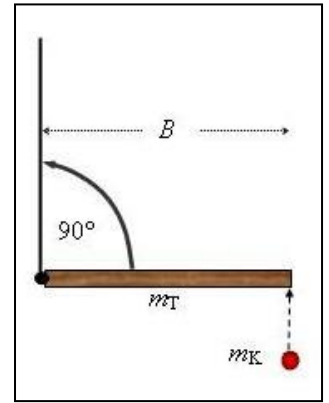
$$\vartheta_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{h_1}{l} \right) = 15,74^\circ$$

4. Eine Tür sei anfangs um 90° geöffnet und in Ruhe. Die Tür sei $B = 1,25\text{ m}$ breit und habe eine Masse von $m_T = 75\text{ kg}$. Sie bewege sich reibungsfrei.

- a. Sie schließen die Tür mit einer konstanten Kraft von 220 N am äußeren Rand. Die Kraft wirke immer senkrecht zum Türblatt. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist?

$$t_{\pi/2} = 0,67\text{ s}$$

- b. Nun schließen Sie die um 90° geöffnete Tür, indem Sie eine Knetkugel (punktförmige Masse mit $m_K = 0,5\text{ kg}$) mit der Geschwindigkeit 12 m s^{-1} an den äußeren Rand werfen (siehe Bild). Die Knetkugel bleibt an der



Tür haften. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist? $t_2 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = 8,35\text{ s}$

- 4a. Drehmoment

$$M = F \cdot r = 220\text{ N} \cdot 1,25\text{ m} = 275\text{ Nm}$$

Massenträgheitsmoment der Tür bezüglich des Drehpunktes:

$$J_T = \frac{1}{3} m_T B^2 = \frac{1}{3} \cdot 75\text{ kg} \cdot 1,25^2\text{ m}^2$$

$$J_T = \frac{1}{3} \cdot 75\text{ kg} \cdot 1,25^2\text{ m}^2 = 39,06\text{ kg m}^2$$

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{M}{J_T} = \frac{275\text{ Nm}}{39,06\text{ kg m}^2} = 7,04\text{ s}^{-2}$$

Die Bewegung der Tür ist eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung mit Anfangsgeschwindigkeit und Anfangswinkel gleich Null. Gesucht ist die Zeit, in der der

Winkel den Wert von $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ erreicht:

Für die Funktion $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Schließzeit der Tür:

$$t_{\pi/2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 0,67\text{ s}$$

- 4b. Für den vollkommen unelastischen Stoß der Knetkugel mit der Tür gilt der Drehimpulserhaltungssatz:

$$L_{\text{vorher}} = \sum_i L_{i,\text{nachher}}$$

Vor dem Stoß:

$$L_{\text{vorher}} = B \cdot p = B \cdot m_K \cdot v_K$$

Nach dem Stoß:

$$\sum_i L_{i,\text{nachher}} = (J_T + J_K) \omega$$

Es folgt:

$$B \cdot m_K \cdot v_K = (J_T + J_K) \omega$$

Massenträgheitsmoment der Knete:

$$J_K = m_K B^2 = 0,5\text{ kg} \cdot 1,25^2\text{ m}^2 = 0,78\text{ kg m}^2$$

Winkelgeschwindigkeit nach Stoß:

$$\omega = \frac{B \cdot m_K \cdot v_K}{J_T + J_K} = \frac{m_K \cdot v_K}{\left(\frac{1}{3} m_T + m_K\right) B}$$

$$\omega = \frac{0,5\text{ kg} \cdot 12\text{ m s}^{-1}}{\left(\frac{1}{3} \cdot 75\text{ kg} + 0,5\text{ kg}\right) \cdot 1,25\text{ m}} = 0,1882\text{ s}^{-1}$$

Die Tür schließt in Form einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Es gilt:

$$t_2 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = 8,35 \text{ s}$$