1. Ein Vogel fliegt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/ h. Wie lange benötigt er für eine Strecke von 75 km?

$$t=\frac{s}{v}=\frac{75\,km\,h}{15\,km}=5\,h$$

2. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muss ihr Auto fahren, um in der Zeit von 3 Stunden und 12 Minuten die Strecke von 280 km zurückzulegen?

$$\overline{v}=\frac{s}{t}=\frac{280\,km}{3,2\,h}=87,5\frac{km}{h}$$

3. Wenn Sie mit der Geschwindigkeit von 110 km/h auf gerader Strecke fahren und für 2 s zur Seite schauen, wie weit fahren Sie während dieser Zeit der Unaufmerksamkeit?

$$s=v\cdot t=110\frac{km}{h}\cdot 2\,s=\frac{110\cdot 10^3\,m}{3600\,s}\cdot 2\,s=61{,}1\,m$$

4. Ein rollender Ball bewegt sich zwischen den Zeitpunkten $t_1=3,0\,s$ und $t_2=6{,}1\,s$ von $x_1=3,4\,cm$ nach $x_2=-4,2\,cm$. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{-4,2\,cm-3,4\,cm}{6{,}1\,s-3,0\,s}$$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{7,6}{3{,}1}=-2,45\,cm\,s^{-1}=-0,0245\,m\,s^{-1}$$

5. Ein Massenpunkt ist zum Zeitpunkt $t_1=-2,0\,s$ bei $x_1=3,4\,cm$ und zum Zeitpunkt $t_2=4,5\,s$ bei $x_2=8,5\,cm$. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{8,5\,cm-3,4\,cm}{4,5\,s+2,0\,s}$$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{5{,}1}{6,5}=0,785\,cm\,s^{-1}=0,00785\,m\,s^{-1}$$

6. Sie fahren mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 105 km/h eine Strecke von 210 km. Unterwegs beginnt es zu regnen. Sie reduzieren die Geschwindigkeit auf 90 km/h. Nach 2 Stunden und 10 Minuten erreichen Sie das Ziel. Wann hat es angefangen zu regnen?

Für die Gesamtzeit gilt: $t_{ges}=t_1+t_2=\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}$

Für den Gesamtweg gilt: $s_{ges}=s_1+s_2$

Es folgt:

$$t_{ges} = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_{ges} - s_1}{v_2}$$

$$t_{ges} = \frac{s_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_1} + \frac{\left(s_{ges} - s_1\right) \cdot v_1}{v_2 \cdot v_1}$$

$$t_{ges} \cdot v_2 \cdot v_1 = s_1 \cdot v_2 + s_{ges} \cdot v_1 - s_1 \cdot v_1$$

$$s_1 \left(v_1 - v_2\right) = s_{ges} \cdot v_1 - t_{ges} \cdot v_2 \cdot v_1$$

$$s_1 = \frac{s_{ges} \cdot v_1 - t_{ges} \cdot v_2 \cdot v_1}{v_1 - v_2}$$

Lösungen: $$s_1 = \frac{210 \cdot 105 - 2{,}1667 \cdot 105 \cdot 90}{15}\, km = 105\ km$$

Beginn des Regens $t_1 = 1h$

7. Asafa Powell lief am 14 Juni 2005 die 100 m Strecke in 9,77 s. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100\,m}{9{,}77\,s} = 10{,}23\,m\,s^{-1} = 36{,}8\,km\,h^{-1}$$

8. Micheal Johnson lief am 16. August 1999 die 400 m auf einer Rundstrecke in 43,18 s. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Dies ist eine Fangfrage, denn es kommt auf die genaue Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit an, die unterschiedlich sein kann.
Definition auf der Basis des "*zurückgelegten Weges*" (wird im Alltag oft verwendet):

$$Durchschnittsgeschindigkeit_1 = \frac{Betrag\ des\ gesamten\ zurückglegten\ Weges}{dafür\ benötigte\ Zeit}$$

hier: $$\overline{v} = \frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta t} = \frac{400\,m}{43{,}18\,s} = 9{,}26\,m\,s^{-1} = 33{,}3\,km\,h^{-1}$$

Definition auf der Basis des "*gesamten Wege*" (wird in der Physikvorlesung verwendet):

$$Durchschnittsgeschindigkeit_2 = \frac{Endposition - Anfangsposition}{benötigte\ Zeit}$$

Wenn End- und Anfangsposition identisch sind, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit (entsprechend dieser Definition!) gleich Null.

9. Zwei Lokomotiven nähern sich einander auf parallelen Spuren. Die Geschwindigkeit der einen Lok beträgt 80 km/h, die der anderen 110 km/h. Nach welcher Zeit fahren sie aneinander vorbei, wenn bei $t = 0$ der Abstand 8,5 km beträgt. Welche Strecken haben sie jeweils zurückgelegt?

Beim Vorbeifahren haben beide Loks zusammen die Strecke 8,5 km zurückgelegt.
Es gilt: $$s_{ges} = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = \left(v_1 + v_2\right) \cdot t$$

$$t = \frac{s_{ges}}{v_1 + v_2} = \frac{8,5\,km\,h}{190\,km} = 0,0447\ h = 2,68\,\text{min}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 110\frac{km}{h} \cdot 0,0447\,h = 4,92\,km$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 80\frac{km}{h} \cdot 0,0447\,h = 3,58\,km$$

Probe: $s_1 + s_2 = 8,5\ km$

10. Ein Flugzeug fliegt 2100 km weit mit einer Geschwindigkeit von 800 km/h und hat dann Rückenwind, der seine Geschwindigkeit für die nächsten 1800 km auf 1000 km/h ansteigen lässt. Wie lange dauert der Flug insgesamt? Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit?

Gesamtzeit: $$t_{ges} = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{2100\,km\,h}{800\,km} + \frac{1800\,km\,h}{1000\,km}$$

$$t_{ges} = 2,625\,h + 1,8\,h = 4,425\,h$$

Gesamtstrecke: $$s_{ges} = s_1 + s_2 = 2100\,km + 1800\,km = 3900\,km$$

Durchschnittsgeschwindigkeit: $$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3900\,km}{4,425\,h} = 881,4\ km\,h^{-1}$$

11. Die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes entlang des Weges *x* soll durch das *x*-*t*-Diagramm in der Abb.1 charakterisiert werden. Beschreiben Sie die Bewegung anhand des Diagramms und beantworten Sie die folgenden Fragen:

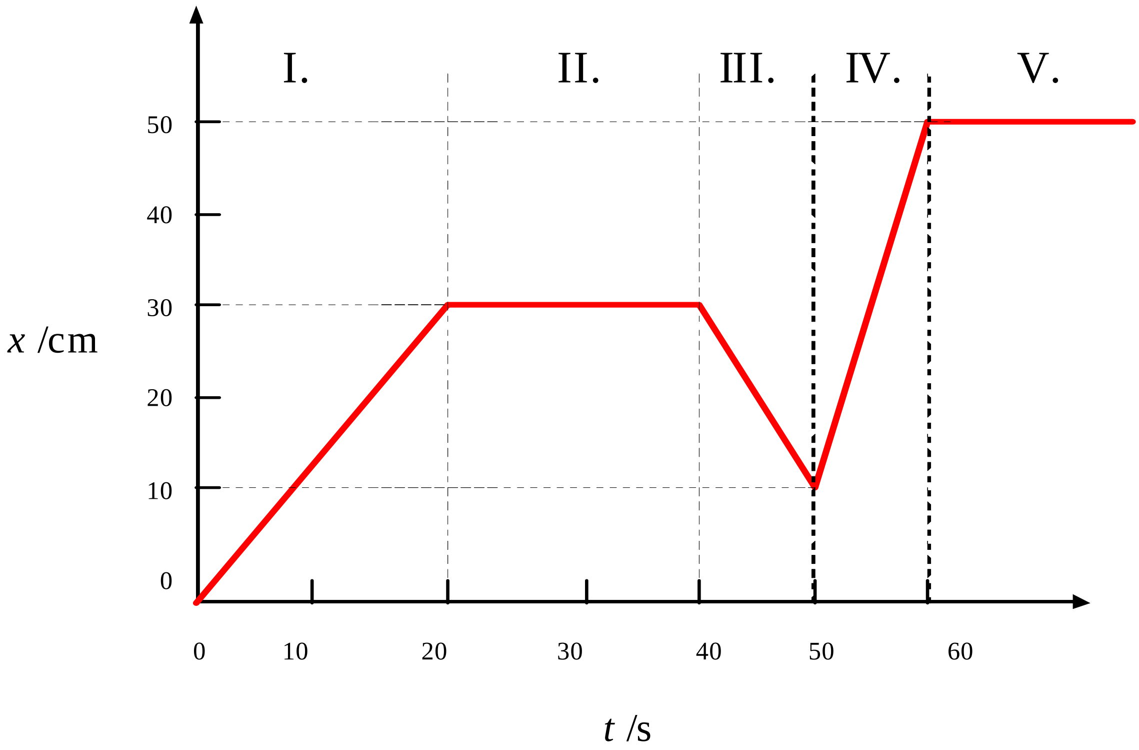


Abb. 1 *x-t-Diagramm zur Aufgabe 11*

11a. Wie groß sind die Geschwindigkeiten in den Abschnitten I bis V?

Abschnitt I.: $v_I = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(30-0)\,cm}{(20-0)\,s} = 0{,}015\,m\,s^{-1}$

Abschnitt II.: $v_{II} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{(30-30)\,cm}{(40-20)\,s} = 0\,m\,s^{-1}$

Abschnitt III.: $v_{III} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \frac{(10-30)\,cm}{(50-40)\,s} = -0{,}02\,m\,s^{-1}$

Abschnitt IV.: $v_{IV} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_5 - x_4}{t_5 - t_4} = \frac{(50-10)\,cm}{(60-50)\,s} = 0{,}04\,m\,s^{-1}$

Abschnitt V.: $v_V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_6 - x_5}{t_6 - t_5} = \ldots = 0\,m\,s^{-1}$

11b. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in den Abschnitten I bis IV?

$$Durchschnittsgeschindigkeit = \frac{Endposition - Anfangsposition}{benötigte\ Zeit}$$

$$\overline{v} = \frac{(50-0)\ cm}{60\ s} = 0{,}00833\,m\,s^{-1}$$

11c. Welche Werte haben die kleinste und die größte Geschwindigkeit?

Minimum im Abschnitt III.: $v_{III} = -0{,}02\,m\,s^{-1}$

Maximum im Abschnitt IV.: $v_{IV} = +0,04\, m\, s^{-1}$

11d. Wie groß ist der in 60 s insgesamt <u>zurückgelegte Weg *s*</u>, welcher <u>Gesamtweg x_{ges}</u> wurde zurückgelegt?

Es wird zwischen "zurückgelegten Weg" (Summe aller Wegelemente) und "Gesamtweg" (Differenz der Endposition und Anfangsposition) unterschieden. Der Unterschied ist ähnlich wie in Aufgabe 8 bei der unterschiedlicher Definitionen der Durchschnittsgeschwindigkeit.
Der <u>zurückgelegt Weg</u> ergibt sich aus der Addition der Beträge aller Teilstrecken.

$$s = |s| = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|$$

$$s = |+30\ cm| + |0\ cm| + |-20\ cm| + |+40\ cm| = 90\ cm$$

Bei der Bestimmung des <u>Gesamtweges</u> werden die Wegstücke vektoriell addiert, was bei einer eindimensionalen Bewegung bedeutet, dass die Vorzeichen der Wegelemente zu berücksichtigen sind.

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n$$

$$x_{ges} = 30\ cm + 0\ cm - 20\ cm + 40\ cm = 50\ cm$$

oder aber: $x_{ges} = Endposition - Anfangsposition$

$$x_{ges} = 50\,cm - 0\,cm = 50\,cm$$

12. Diskutieren Sie das *s*-*t*-Diagramm der Abb. 2 in ähnlicher Weise wie in Aufg. 11 und beantworten Sie folgende Fragen:

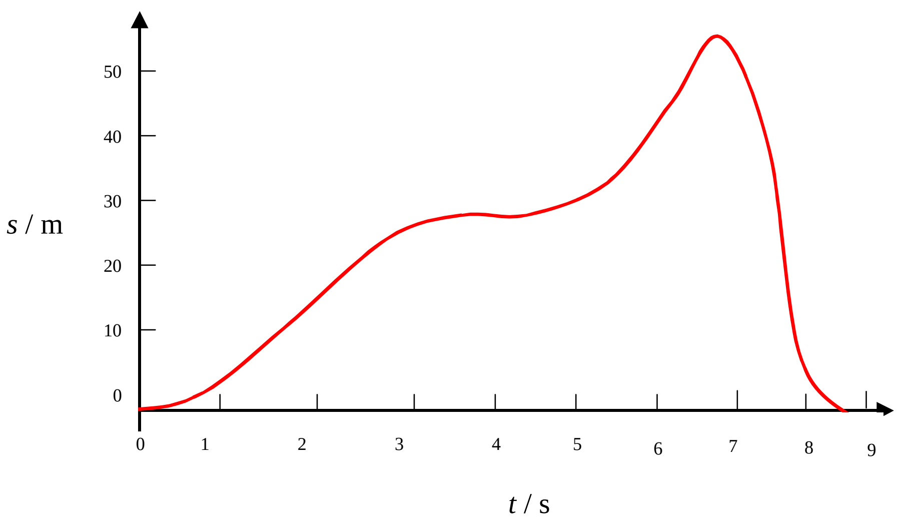


Abbildung 2:

12a. In welchen Bereichen ist die Geschwindigkeit positiv, Null oder negativ.

12b. Finden Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Geschwindigkeit. Schätzen Sie Zahlenwerte für die Geschwindigkeit.

12c. In welchen Bereichen ist die Geschwindigkeit konstant?

12d. In welchen Bereichen ist die Bewegung beschleunigt? Welches Vorzeichen hat die Beschleunigung?

12e. Schätzen Sie Werte für die Beschleunigungen.

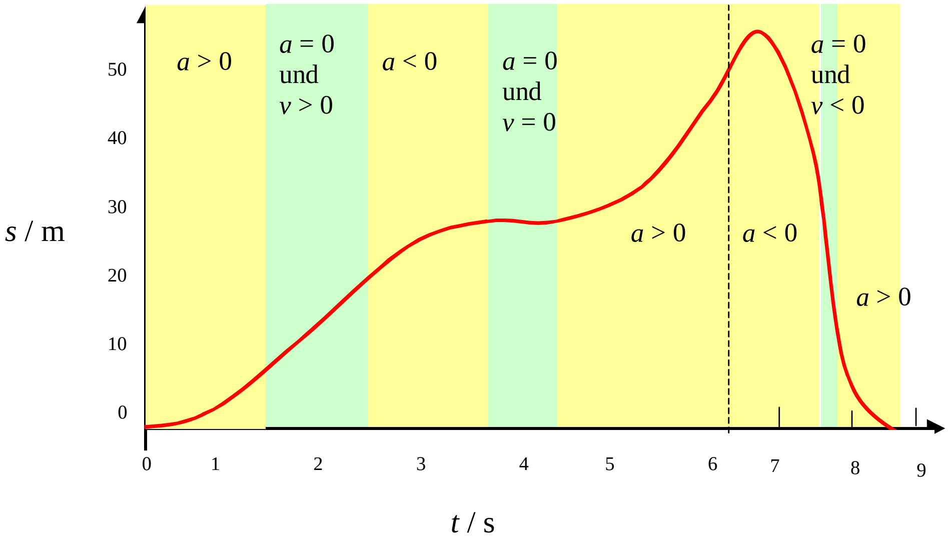


Abbildung 2:

Man kann dazu sowohl $a = \dfrac{2s}{t^2}$

als auch $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ verwenden,

wobei die Werte für v_i als Tangenten im *s*-*t*-Diagramm gewonnen werden.

12f. Skizzieren Sie die zugehörigen *v*-*t*- und *a*-*t*-Diagramme.

13. Abbildung 3 zeigt schematisch das *v*-*t*-Diagramm eines Rennwagens.

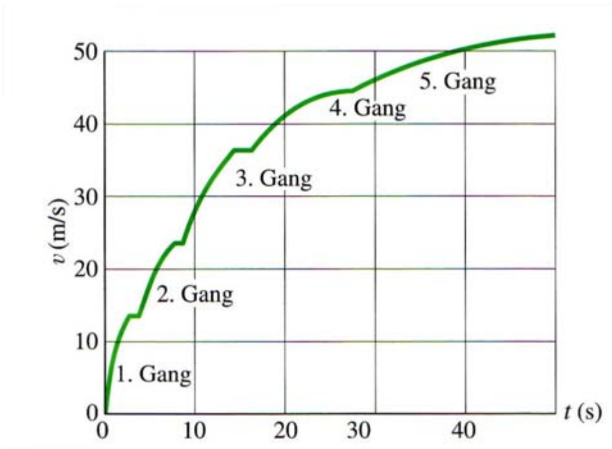


Abbildung 3: v-t-Diagramm eines Rennwagens

13a. Schätzen Sie die mittlere Beschleunigungen in den verschieden Gängen und skizzieren Sie das *a*-*t*-Diagramm.

Beispiel für 1. Gang: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{14\,m\,s^{-1}}{3\,s} = 4{,}7\;m\,s^{-2}$

Beispiel für 5. Gang: $a_5 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{(52-44)\,m\,s^{-1}}{(50-27)\,s} = 0{,}35\;m\,s^{-2}$

13b. Skizzieren Sie das a-*t*-Diagramm.

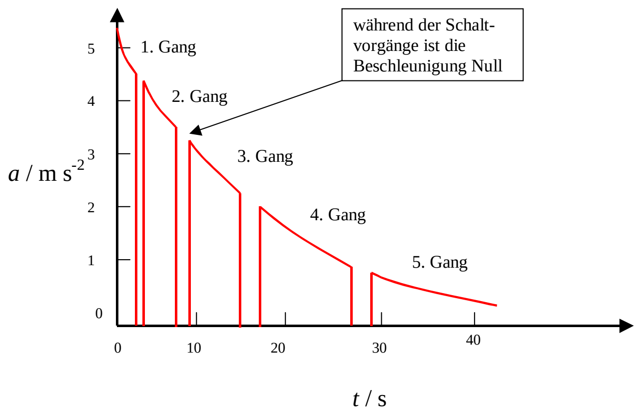


Abbildung 4: *a-t-Diagramm zum v-t-Diagramm in Abbildung 3*

13c. Beschreiben Sie das *s*-*t*-Diagramm.

Die zeichnerische Darstellung ist schwierig. In Zeiten, in denen die Beschleunigung ungleich Null ist, erscheint im *s*-*t*-Diagramm eine Parabel, die zunächst (im 1. Gang) sehr steil und dann (bis zum 5. Gang) immer flacher verläuft. In den Zeiten mit Beschleunigung Null ist *v* konstant, im *s*-*t*-Diagramm entspricht dies einer Geraden.

14. Eine Weltklassesprinterin kann auf den ersten 15 m eines Laufs ihre Spitzengeschwindigkeit von 11,5 m s^{-1} erreichen. Wie groß ist die Durchschnittsbeschleunigung und wie lange benötigt sie, um die Spitzengeschwindigkeit zu erreichen?

Näherung als gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Durchschnittsbeschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{t}$ da $v_1 = 0$ und $t_1 = 0$.

Es gilt: $s(t) = \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2$

einsetzen: $s(t) = \frac{1}{2}\bar{a}\frac{v^2}{\bar{a}^2} = \frac{v^2}{2\bar{a}}$

Lösung: $\bar{a} = \frac{v^2}{2\,s} = \frac{11{,}5^2\;m^2\;s^{-2}}{2\cdot 15\,m} = 4{,}4\;m\;s^{-2}$

Beschleunigungszeit: $t = \frac{v}{\bar{a}} = \frac{11{,}5}{4{,}4}\,s = 2{,}6\;s$

15. Der Anhalteweg s_A eines Fahrzeugs setzt sich zusammen aus Reaktionsweg und dem reinen Bremsweg. Stellen Sie eine allgemeine Beziehung für $s_A = s_A(v_0, t_R, a_B)$ auf, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Fahrzeugs, t_R die Reaktionszeit des Fahrers und $a = |a_0|$ der Betrag der Bremsverzögerung ist.

Gesamtweg = Reaktionsweg + Bremsweg: $s_A = s_R + s_B$

Abb. 5. zeigt das *vt*-Diagramm und verdeutlicht die verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung des Gesamtweges in 15a.und 15b.

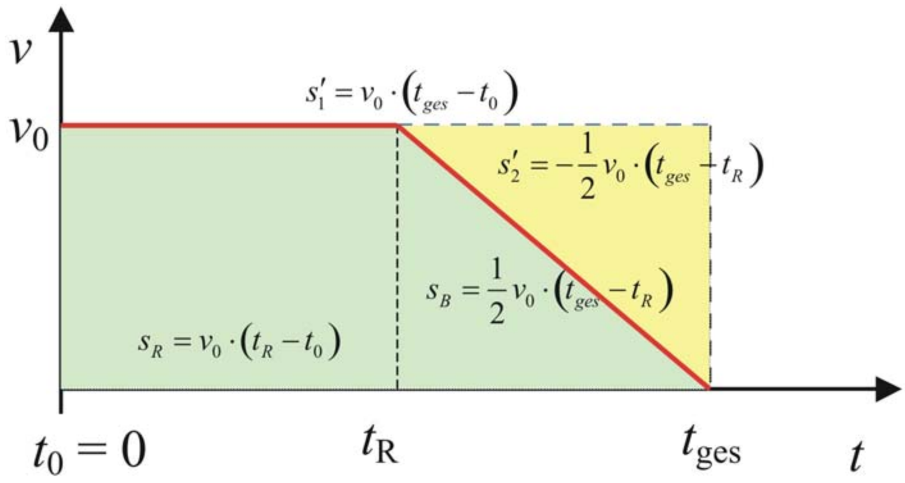


Abbildung 5: *vt-Diagramm für Aufgabe 15 mit Bestimmung des Weges durch Integration.*

15a. Graphische Integration: Der Weg ist das Integral im *vt*-Diagramm (= Fläche unter der *v*(*t*) Funktion (rote Linie)). Die Fläche unter Kurve besteht aus

einem Rechteck: $s_R = v_0 \cdot (t_R - t_0)$

und einem Dreieck: $s_B = \frac{1}{2} v_0 (t_{ges} - t_R)$

Anhalteweg: $s_A = v_0 (t_R - t_0) + \frac{1}{2} v_0 (t_{ges} - t_R)$

Die Steigung der Hypotenuse im gezeigten Dreieck entspricht der Beschleunigung

und es gilt: $|a_0| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_{ges} - t_R} = \left| \frac{-v_0}{t_{ges} - t_R} \right| = \frac{v_0}{t_{ges} - t_R}$

und es folgt: $t_{ges} - t_R = \frac{v_0}{|a_0|}$

Durch Einsetzen ergibt sich: $s_A = v_0 (t_R - t_0) + \frac{v_0^2}{2a} = v_0 \, t_R + \frac{v_0^2}{2a}$ wenn $t_0 = 0$

und zur Vereinfachung: $a = |a_0|$ gesetzt wird.

Die graphische Integration ist wegen ihrer Anschaulichkeit sehr vorteilhaft. Aus diesem Grund ist es sehr empfehlenswert, zur Lösung eines kinematischen Problems zunächst ein *v*-*t*-Diagramm zu zeichnen. Im *v*-*t*-Diagramm erscheinen die zurückgelegten Wege als Fläche unter *v*(*t*) Funktion (Integrale) und die Beschleunigungen als Tangente der *v*(*t*) Funktion (Ableitungen).

15b. Lösung mit Hilfe der kinematische Gleichungen:

Für eine <u>gleichförmige Bewegung</u> gelten folgende drei Gleichungen:

1. $s(t) = v_0 \cdot t + s_0$
2. $v(t) = v_0 = konst.$
3. $a(t) \equiv 0$

Für eine <u>gleichmäßig beschleunigte Bewegung</u> gelten folgende drei Gleichungen:

1. $s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 \cdot t + s_0$
2. $v(t) = a_0 t + v_0$
3. $a(t) = a_0 = konst.$

Während der <u>Reaktionszeit</u> ist die <u>Bewegung gleichförmig</u>. Es gilt also:

Teilweg s_R $\quad s_R = v_0 \cdot (t_R - t_0) + s_0 = v_0 \cdot t_R$, da $t_0 = 0$ und $s_0 = 0$.

Während der <u>Bremszeit</u> ist die Bewegung <u>gleichmäßig beschleunigt</u>, wobei die Beschleunigung ein negatives Vorzeichen besitzt.

Bremsweg s_B:

$$s_B = \frac{1}{2} a_0 \left(t_{ges} - t_R\right)^2 + v_0 \cdot \left(t_{ges} - t_R\right) + s_0$$

$$s_B = -\frac{1}{2} |a_0| \left(t_{ges} - t_R\right)^2 + v_0 \cdot \left(t_{ges} - t_R\right)$$

Wie in 15a gezeigt gilt:

$$|a_0| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_{ges} - t_R} = \left|\frac{-v_0}{t_{ges} - t_R}\right| = \frac{v_0}{t_{ges} - t_R}$$

Setze:

$$t_{ges} - t_R = \frac{v_0}{|a_0|}$$

in die Beziehung für s_B:

$$s_B = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{|a_0|} + \frac{v_0^2}{|a_0|} = +\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{|a_0|}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

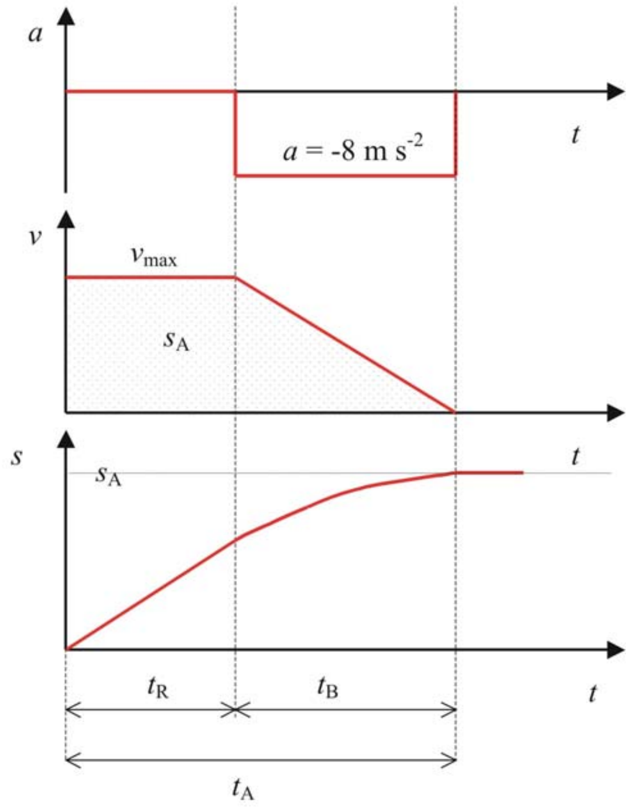
$$s_A = v_0 \left(t_R - t_0\right) + \frac{v_0^2}{2a} = v_0 \, t_R + \frac{v_0^2}{2a} \quad \text{wenn } t_0 = 0$$

und zur Vereinfachung: $a = |a_0|$ gesetzt wird.

16. Anwendung zu Aufg. 15: Der Anhalteweg eines Pkw setzt sich aus dem Reaktionsweg (gleichförmige Bewegung vom Erkennen des Hindernisses bis zum Beginn des Bremsens) und dem tatsächlichen Bremsweg (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bis zum Stillstand zusammen. Die Reaktionszeit des Fahrers betrage 0,6 s und die Bremsverzögerung sei – 8 m/s².

16a. Skizzieren Sie die *a-t*-, *v-t*- und *s-t*-Diagramme.

16b. Wie groß darf die Geschwindigkeit höchstens sein, wenn der Anhalteweg 10 m nicht überschreiten soll?



Anhalteweg s_A: $$s_A = v_{\max} \cdot t_R + \frac{1}{2}|a| t_B^2$$

t_R Reaktionszeit, t_B Bremszeit, $t_A = t_R + t_B$ gesamte Anhaltezeit

Bei gleichmäßiger Bremsbeschleunigung gilt: $$|a| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{v_{\max}}{t_B}$$

Einsetzen: $$s_A = v_{\max} \cdot t_R + \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{|a|}$$

$$v_{\max}^2 + 2\, v_{\max}\, |a| t_R = 2|a| s_A$$

$$v_{\max} = \pm\sqrt{|a|^2\, t_R^2 + 2|a| s_A} - |a| t_R$$

$$v_{\max} = \left(\pm\sqrt{8^2\, 0{,}6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10} - 8 \cdot 0{,}6\right)\frac{m}{s}$$

$$v_{\max} = 8{,}7292\frac{m}{s} = 31{,}4\frac{km}{h}$$

16c. Wie groß ist die Bremszeit und wie groß sind der Reaktionsweg und der reine Bremsweg?

Bremszeit: $$t_B = \frac{v_{\max}}{|a|} = \frac{8{,}7292}{8}s = 1{,}09\, s$$

$$s_R = v_{\max} \cdot t_R = (8{,}7292 \cdot 0{,}6)\,m = 5{,}24\,m$$
$$s_B = \frac{1}{2}|a|t_B^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1{,}09^2\right) m = 4{,}76\,m$$

16d. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) für den gesamten Anhalteweg?

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{10\,m}{(0{,}6+1{,}09)\,s} = 5{,}92\frac{m}{s} = 21{,}3\frac{km}{h}$

17. Der Sprintweltrekord über die 50 m Strecke liegt bei 5,56 s, der über die 60 m Strecke bei 6,39 s. Nehmen Sie an, dass ein Sprint als Überlagerung einer gleichmäßig beschleunigten und einer gleichförmigen Bewegung mit für verschiedene Sprintstrecken näherungsweise gleicher Beschleunigung a_0 und Höchstgeschwindigkeit v_0 beschrieben werden kann.

17a. Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit v_0 und die Beschleunigung a_0 aus den Angaben für die 50 m - und 60 m - Strecken.

Bezeichnung:
s_1 - Gesamtstrecke 50 m
t_{g1} - Gesamtzeit über 50 m: 5,56 s
t_a - Beschleunigungszeit

Weg-Zeit-Funktion für 50m Strecke $s_1 = \frac{1}{2}a_0\,t_a^2 + v_0\left(t_{g1} - t_a\right)$

$$s_1 = \frac{1}{2}a_0\,t_a^2 + v_0\,t_{g1} - v_0 t_a = \frac{1}{2}a_0\,t_a^2 + v_0\,t_{g1} - a_0 t_a^2$$
$$s_1 = v_0 t_{g1} - \frac{1}{2}a_0 t_a^2$$

mit $v_0 = a_0\,t_a$
$$s_1 = a_0\,t_a\,t_{g1} - \frac{1}{2}a_0 t_a^2 \qquad (1)$$

Herleitung für die Weg-Zeit-Funktion der 60 m Strecke ist analog:
Bezeichnung:
s_2 - Gesamtstrecke 60m
t_{g2} - Gesamtzeit über 60 m: 6,39 s
t_a - Beschleunigungszeit

Die Modellannahme soll sein, dass die Beschleunigungen a_0, die Endgeschwindigkeiten v_0 und die Beschleunigungszeiten t_a bei der 50 m und der 60 Sprintstrecke gleich sind. Es gilt also eine ähnliche Gleichung wie Gl. (1):

Weg-Zeit-Funktion für 60m Strecke $s_2 = a_0\,t_a\,t_{g2} - \frac{1}{2}a_0 t_a^2 \qquad (2)$

Einsetzen von $\frac{1}{2}a_0 t_a^2$ aus (2) in (1): $s_1 = a_0\,t_a\,t_{g1} - \left(a_0\,t_a\,t_{g2} - s_2\right)$

Es folgt: $s_1 - s_2 = a_0\, t_a \left(t_{g1} - t_{g2} \right)$

Lösung für $v_0 = a_0\, t_a$: $a_0\, t_a = v_0 = \dfrac{s_1 - s_2}{t_{g1} - t_{g2}} = \dfrac{(60-50)\,m}{(6{,}39 - 5{,}56)\,s} = \dfrac{10\,m}{0{,}83\,s}$

$$v_0 = a_0\, t_a = \frac{10\,m}{0{,}83\,s} = 12{,}05\,m\,s^{-1}$$

$$v_0 = 12{,}05\,m\,s^{-1} = 43{,}4\,km\,h^{-1}$$

Für s_1 gilt (siehe (1): $s_1 = v_0\, t_{g1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{a_0}$

Es folgt: $a_0 = \dfrac{v_0^2}{2\left(v_0\, t_{g1} - s_1\right)}$

Lösung: $a_0 = \dfrac{12{,}05^2}{2\cdot(12{,}05\cdot 5{,}56 - 50)}\dfrac{m}{s^2} = 4{,}27\,m\,s^{-2}$

Kontrolle: Aus (2) folgt: $a_0 = \dfrac{v_0^2}{2\left(v_0\, t_{g2} - s_2\right)}$

$$a_0 = \frac{12{,}05^2}{2\cdot(12{,}05\cdot 6{,}39 - 60)}\frac{m}{s^2} = 4{,}27\,m\,s^{-2}$$

17b. Nehmen Sie an, dass man auf der 100 m Strecke die gleichen Beschleunigungs- und Höchstgeschwindigkeitswerte erreichen kann. Welche Weltrekordzeit für die 100 m Strecke könnte nach den unter 17a. bestimmten Werten erwartet werden?

Für die 100 m Strecke gilt: $s_3 = v_0\, t_{g3}^{extrapoliert} - \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{a_0}$

Lösungen: $t_{g3}^{extrapoliet} = \dfrac{s_3}{v_0} + \dfrac{v_0}{2\,a_0} = \dfrac{100}{12{,}05} + \dfrac{12{,}05}{2\cdot 4{,}27} = 9{,}71\,s$

17c. Der aktuelle Weltrekord (Usain Bolt, Olympiade 2008 in Peking) über 100 m liegt bei 9,69 s. Wenn man annimmt, dass die Beschleunigungen bei den Sprintstrecken gleich sind, welcher Höchstgeschwindigkeit entspricht die Weltrekordzeit über die 100 m Strecke?

Nimmt man an, dass die Beschleunigung a_0 konstant ist, so folgt für die tatsächlich erreichbare Höchstgeschwindigkeit über die 100 m Strecke:

$$s_3 = v_{03}\, t_{g3}^{gem} - \frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0}$$

mit: $s_3 = 100\,m$ und $t_{g3} = 9{,}69\,s$

$$\frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0} - v_{03}\, t_{g3}^{gem} = -s_3$$

$$v_{03}^2 - 2\, v_{03}\, t_{g3}^{gem} a_0 = -2 a_0 s_3$$

mit: $a_0 = 4,27\, m\, s^{-2}$ $\qquad v_{03} = \pm\sqrt{a_0^2\, t_{g3}^2 - 2\, a_0\, s_3} + a_0\, t_{g3}$

Erste Lösung (unrealistisch): $v_{03/1} = (+29,29 + 41,38)\, m\, s^{-1} = 71,53\, m\, s^{-1}$

Zweite Lösung (realistisch): $v_{03/2} = (-29,79 + 41,74)\, m\, s^{-1} = 12,08\, m\, s^{-1}$

Richtige Lösung: $v_{03/2} = 12,08\, m\, s^{-1} = 43,5\, km\, h^{-1}$

Die Höchstgeschwindigkeit über die Strecken von 50 m, 60 m, und 100 m sind im Rahmen der geschilderten Modellannahmen praktisch gleich.

18. Die Festung Königstein in Sachsen besitzt einen berühmten Tiefbrunnen. Dessen Tiefe soll durch Abwurf eines schweren Gegenstands bestimmt werden, wobei die Luftreibungseffekte während des freien Falls vernachlässigt werden können. Für die Zeitdifferenz zwischen Loslassen des Gegenstands am oberen Brunnenrand (mit $v(t=0)=0$) und der Rückkehr des Auftreffschalls werden 6 s gemessen. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c_0 = 343\, m\, s^{-1}$.

Wie tief ist der Brunnen?

Der Fall des Gegenstands ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Der Schall, der beim Auftreffen des Gegenstands auf der Wasseroberfläche entsteht, breitet sich als gleichförmige Bewegung nach oben aus.

Für den freien Fall gilt: $s_0 = \frac{1}{2} g\, t_0^2$

Für die Schallweg gilt: $s_1 = c_0\, t_1$

Fallweg und Schallweg sind gleich: $s_0 = s_1$

Die Gesamtzeit ist: $$t_{ges} = t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2 s_0}{g}} + \frac{s_0}{c_0} \qquad (*)$$

Man kann zunächst einen groben Schätzwert für die Brunnentiefe ermitteln, indem man die Fallzeit ungefähr gleich der angegebenen Gesamtzeit setzt und die Zeit für die Schallausbreitung vernachlässigt:

$$s_0 = \frac{1}{2} g\, t_0^2 \approx \frac{1}{2} g\, t_{ges}^2 \approx 180\, m$$

Zur genauen Berechnung der Brunnentiefe muss die Gleichung (*) gelöst werden.

Gleichung (*): $$t_{ges} - \frac{s_0}{c_0} = \sqrt{\frac{2 s_0}{g}}$$

Diese Gleichung

Quadrieren: $$t_{ges}^2 - 2\frac{s_0}{c_0} t_{ges} + \frac{s_0^2}{c_0^2} = \frac{2 s_0}{g}$$

$$t_{ges}^2 + \frac{s_0^2}{c_0^2} = \frac{2 s_0}{g} + 2\frac{s_0}{c_0} t_{ges} = 2 s_0 \left(\frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{c_0}\right)$$

Setze zur Vereinfachung: $\alpha = \frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{c_0} = \frac{1}{10} s^2 m^{-1} + \frac{5,967}{343} s^2 m^{-1}$

$\alpha = 0,1174927\, s^2 m^{-1}$

$s_0^2 - 2 s_0 c_0^2 \alpha = -c_0^2 t_{ges}^2$

$s_0^2 - 2 s_0 c_0^2 \alpha + \left(c_0^2 \alpha\right)^2 = c_0^4 \alpha^2 - c_0^2 t_{ges}^2$

$s_0 - c_0^2 \alpha = \sqrt{c_0^4 \alpha^2 - c_0^2 t_{ges}^2}$

Ausklammern von c_0^2 $\quad s_0 = c_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 - \frac{t_{ges}^2}{c_0^2}} + \alpha \right)$

$$s_0 = 343^2 m^2 s^{-2} \left(\pm\sqrt{(0,0138045 - 0,0003059)\, s^4 m^{-2}} + 0,1174927\, s^2 m^{-1} \right)$$

Positive Wurzel: $s_{0+} = 27485\, m$

Negative Wurzel: $s_{0-} = 154\, m$

Die Lösung zum positiven Wurzelwert $s_{0+} = 27485\, m$ ist unsinnig.

Die Lösung zur negativen Wurzel $s_{0-} = 154\, m$ ist die gesuchte Brunnentiefe.

19. Ein Tennisball soll 15 m senkrecht nach oben geworfen werden.

19a. Welche Anfangsgeschwindigkeit muss der Ball haben?

Man betrachte die Bewegung des Balls entlang der senkrechten y-Achse.
Für die Geschwindigkeit gilt: $v_y(t) = v_{y0} - g\, t$

Für den Weg gilt: $y(t) = v_{y0}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$

Beim Erreichen der Maximalhöhe ist die Geschwindigkeit gleich Null.
Es gilt: $v_y(t_H) = v_{y0} - g\, t_H = 0$

die entsprechende Steigzeit ist: $t_H = \frac{v_{y0}}{g}$

Es folgt: $y(t_H) = v_{y0}\, t_H - \frac{1}{2} g\, t_H^2 = \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{y0}^2}{g}$

$y(t_H) = \frac{v_{y0}^2}{2g} = 15\, m$

Lösung: $v_{y0} = \sqrt{2 g\, y(t_H)} = 17,3\, m\, s^{-1}$

19b. Wie weit fliegt ein Ball, der mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit unter einem Winkel von 50° geworfen wird?

Der Geschwindigkeitsvektor mit Betrag von $v_0 = |v_0| = 17,3\, m\, s^{-1}$ kann in eine Vertikal- und eine Horizontal-Komponente (entsprechend x,y-Komponente) zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 50° = 11,13\, m\, s^{-1}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 50° = 13,27\,m\,s^{-1}$$

Steigzeit: $t_H = \dfrac{v_{y0}}{g} = 1,327\,s$

Gesamte Flugzeit des Balls: $t_{ges} = 2\,t_H = 2,654\,s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges} $x(t_{ges}) = v_{x0}\,t_{ges} = 29,54\,m$

19d. Wie weit könnte der Ball mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit maximal geworfen werden? Unter welchem Winkel muss der Ball geworfen werden?

Maximum der Reichweite bei einem Winkel von 45°. Die Geschwindigkeit $v_0 = 17,3\,m\,s^{-1}$ kann in *x*,*y*-Komponenten zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 12,25\,m\,s^{-1}$$
$$v_{y0} = v_0 \sin 45° = 12,25\,m\,s^{-1}.$$

Steigzeit: $t_H = \dfrac{v_{y0}}{g} = 1,225\,s$

Gesamte Flugzeit: $t_{ges} = 2\,t_H = 2,449\,s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges}: $x(t_{ges}) = v_{x0}\,t_{ges} = 30,0\,m$

20. Ein Ball wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus der Höhe H horizontal geworfen. Nach $t_1 = 1s$ trifft er auf den Boden bei $H = 0$. Der Betrag der Auftreffgeschwindigkeit v_1 ist zweimal so groß wie der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

20a. Wie groß ist v_0?

Kinematische Lösung:

Betrag Geschwindigkeit am Anfang: $|\vec{v}_0| = \sqrt{v_x^2} = \sqrt{v_0^2}$

Betrag Geschwindigkeit am Ende: $|\vec{v}_1| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (g\,t_1)^2}$

Laut Aufgabenstellung gilt: $|\vec{v}_1| = 2 \cdot |\vec{v}_0|$

Einsetzen: $\sqrt{v_0^2 + (g\,t_1)^2} = 2 \cdot \sqrt{v_0^2}$

$$(g\,t_1)^2 = 4 \cdot v_0^2 - v_0^2 = 3 v_0^2$$

$$v_0 = \frac{g\,t_1}{\sqrt{3}} = 5,77\,m\,s^{-1}$$

20b. Wie groß ist die Höhe H?

Die Anfangsgeschwindigkeit in *y*-Richtung ist Null. Es gilt also:

$$y(t_1) = H = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot 10\, ms^{-2} \cdot 1^2 s^2 = 5\, m$$

20c. Welche horizontale Strecke hat der Ball zurückgelegt?

Horizontaler Weg $s_x = v_0 \cdot t_1 = 5{,}77\, m$

21. Beim Wurfscheibenschießen (auch Tontaubenschießen genannt) werden von einer federgeladenen Wurfmaschinen Tonscheiben (∅ 11 cm, h = 2,5 cm, Masse 100-110 g) mit hoher Geschwindigkeit abgeschossen, die der Sportschütze dann treffen muss. Nehmen Sie an, dass eine Wurfmaschine so eingestellt sei, dass eine Scheibe beim senkrechten Schuss nach oben $t_{ges} = 4\, s$ benötigt bevor sie wieder den Boden erreicht.

(Luftreibung und aerodynamische Effekte können vernachlässigt werden.)

21a. Welche Abschussgeschwindigkeit v_0 hat die Wurfmaschine?

Senkrechter Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben:

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = -g$ und Anfangsgeschwindigkeit $+v_0$:

Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt: $v(t) = v_0 - g\, t$

Beim Erreichen der maximalen Höhe ist $v(t_{\max}) = 0$.

Es gilt: $v(t_{\max}) = 0 = v_0 - g\, t_{\max}$

Es folgt: $$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \qquad (1)$$

Gesamtzeit: $$t_{ges} = 2\, t_{\max} = \frac{2\, v_0}{g} \qquad (2)$$

Lösung: $$v_0 = \frac{1}{2} g\; t_{ges} = 0{,}5 \cdot 10\, m\, s^{-2} \cdot 4\, s = 20\, m\, s^{-1}$$

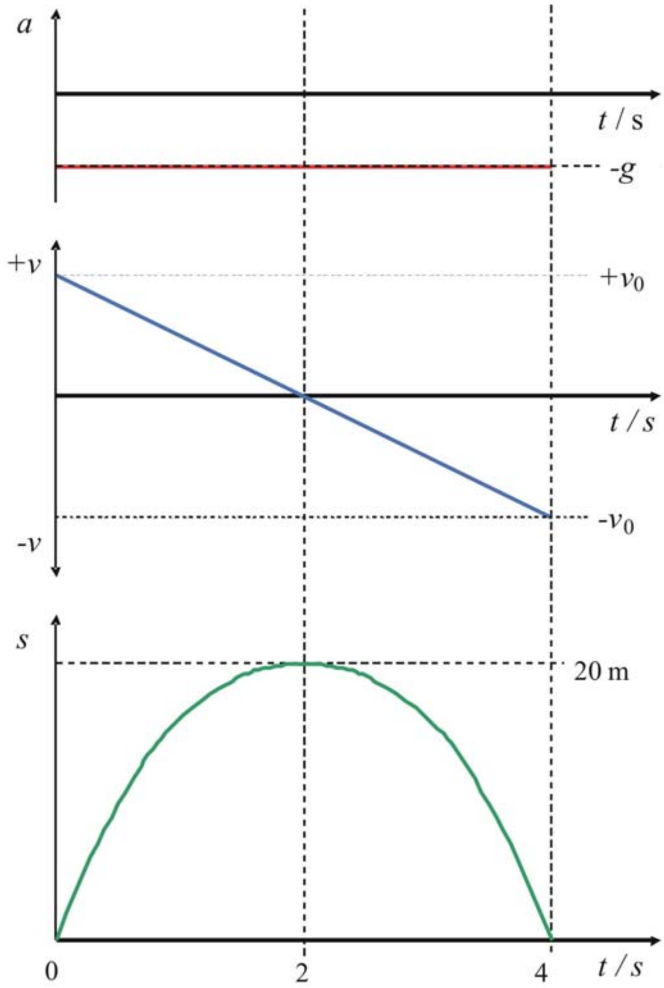
21b. Wie hoch fliegt die Scheibe?

Für den Weg $s(t)$ gilt: $$s(t) = v_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (3)$$

Einsetzen in (1) in (3): $$s(t_{max}) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{400\, m^2 s^{-2}}{20\, m\, s^{-2}} = 20\, m$$

21c. Skizzieren Sie die *s-t-*, *v-t-* und *a-t-*Diagramme für den Wurf senkrecht nach oben.

s-t, *v-t-*und *a-t*-Diagramm:



21d. Wie weit kann sie mit dieser Einstellung und richtig gewähltem Abwurfwinkel maximal fliegen?

Größte Reichweite wird bei einem Wurf unter 45° erreicht. Man zerlegt den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag $v_0 = 20\,m\,s^{-1}$ in eine *x*- und eine *y*-Komponente. Bezeichnet man den Winkel zwischen $\vec{v}_0$ und der *x*-Achse mit ϑ, so gilt für die Komponenten:

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta$$

Mit Gl. (2) kann die Gesamtzeit t_{ges} berechnet werden, wobei v_{0y} einzusetzen ist.

$$t_{ges} = 2\,t_{\max} = \frac{2\,v_{0y}}{g} = \frac{2\,v_0}{g}\cdot\sin\vartheta$$

In dieser Zeit bewegt sich die Scheibe um $s_x(\vartheta)$ in *x*-Richtung:

$$s_x(\vartheta) = v_{0x}\cdot t_{ges} = \frac{2\,v_0^2}{g}\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta \qquad (4)$$

$$s_x(\vartheta = 45°) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400\,m^2 s^{-2}}{10\,m\,s^{-2}} = 40\,m$$

21e. Im Wettkampf soll die Scheibe unter einem Winkel von 15° abgeschossen werden. Wie weit fliegt die Scheibe?

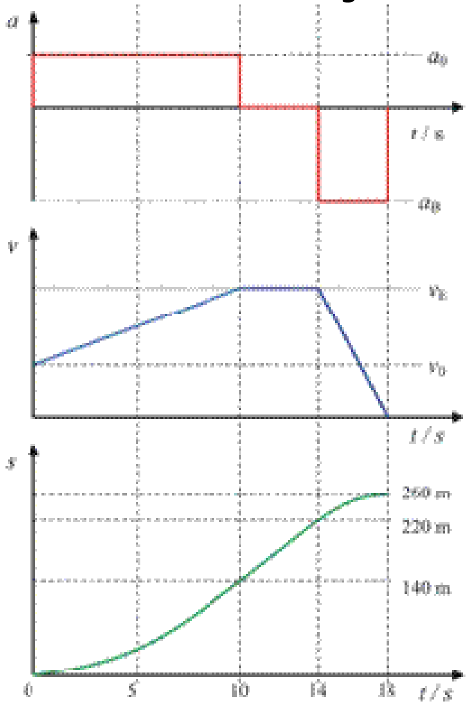
Reichweite beim Abwurfwinkel $\vartheta = 15°$:

Verwende Gl. (4): $$s_x\left(\vartheta = 15°\right) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta = \frac{v_0^2}{g}\sin 30° = 20\,m$$

22. Ein Fahrzeug mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht bei $t = 0$ eine 260 m lange gerade Teststrecke. Während der nächsten 10 s wird es gleichmäßig mit a_0 beschleunigt, fährt anschließend 80 m mit gleichförmiger Geschwindigkeit und wird danach mit konstanter Verzögerung bis zum Stillstand bei $s = 260\,m$ abgebremst. Entlang der Teststrecke werden folgende Weg-Zeit-Werte ermittelt:

s / m	**0**	**55**	**140**	**220**	**260**
t / s	**0**	**5**	**10**	**14**	**18**

22a. Skizzieren Sie die *s-t-*, *v-t-* und *a-t-*Diagramme



22b. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Teststrecke?

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{260\,m}{18\,s} = 14{,}44\,m\,s^{-1}$

22c. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Beschleunigung a_0?

Bestimmung von v_0 und a_0:
Allgemeine Gleichung für $s(t)$ bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0\, t^2 + v_0\, t + s_0$$

Laut Tabelle gelten folgende Beziehungen:

$$s(t=0) = 0 = \frac{1}{2} a_0\;\, 0^2 + v_0\, 0 + s_0 = s_0 \qquad (1)$$

$$s(t=5\,s) = 55\,m = \frac{1}{2} a_0\, 5^2 s^2 + v_0 5\,s + s_0 \qquad (2)$$

$$s(t=10\,s) = 140\,m = \frac{1}{2} a_0\, 10^2 s^2 + v_0 10\,s + s_0 \quad (3)$$

Aus Gleichung (1) folgt: $s_0 = 0$

Gleichung (2) $110\,m = a_0 \cdot 25 s^2 + v_0 \cdot 10\,s$

Gleichung (3) $280\,m = a_0 \cdot 100 s^2 + v_0 \cdot 20\,s$

Es folgt: $220\,m = a_0 \cdot 50 s^2 + v_0 \cdot 20\,s$

Subtraktion: $280\,m - 220 m = a_0 \cdot \left(100 s^2 - 50\,s^2\right)$

Lösung für a_0: $a_0 = \frac{(280-220)}{(100-50)} = \frac{60}{50} m\,s^{-2} = 1{,}2\,m\,s^{-2}$

Berechnung von v_0: $55\,m = \frac{1}{2} 1{,}2 \cdot 25\,m + v_0 5\,s = 15\,m + 5\,s \cdot v_0$

Lösung für v_0: $v_0 = \frac{(55-15)\,m}{5\,s} = 8\,m\,s^{-1}$

22d. Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit v_E des Fahrzeugs?

Höchstgeschwindigkeit: $v(t=10s) = a_0 \cdot 10\,s + v_0$

Lösung: $v(t=10s) = 1{,}2\,m\,s^{-2} \cdot 10\,s + 8\,m\,s^{-1} = 20\,m\,s^{-1}$

22e. Mit welcher Verzögerung a_B wird das Fahrzeug abgebremst?

Das Fahrzeug wird auf einer Strecke von $s_B = 40\,m$ abgebremst.

Es gilt: $s_B = v_E\, t_B + \frac{1}{2} a_B\, t_B^2$

Für die Geschwindigkeit gilt: $a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_E}{t_B - 0} = -\frac{v_E}{t_B}$

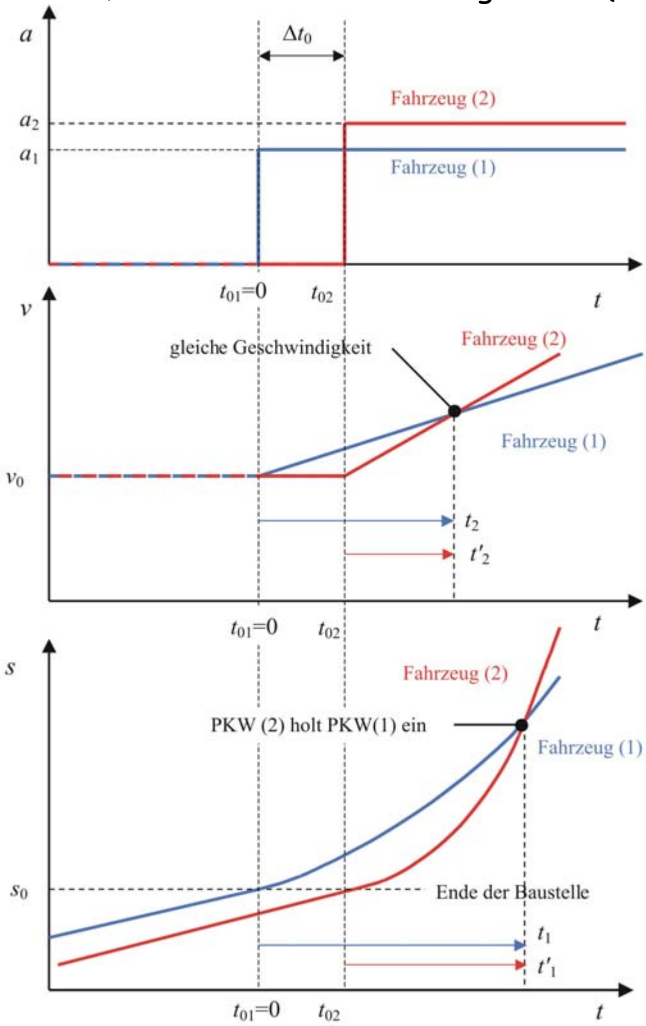
es folgt: $t_B = -\frac{v_E}{a_B}$

Einsetzen: $s_B = -\frac{v_E^2}{a_B} + \frac{1}{2} a_B \frac{v_E^2}{a_B^2} = -\frac{1}{2} \frac{v_E^2}{a_B}$

es folgt: $a_B = -\frac{1}{2} \frac{v_E^2}{s_B} = -\frac{1}{2} \frac{20^2\, m^2\, s^{-2}}{40\,m} = -5\,m\,s^{-2}$

23. In einem Baustellenbereich fahren zwei PKW mit gleicher Geschwindigkeit $v_0 = 80\,km\,h^{-1}$ im Abstand von 60m hintereinander (Nr. 1 fährt voraus, Nr. 2 folgt). Am Ende der Geschwindigkeitsbegrenzung beginnen beide PKW gleichmäßig zu beschleunigen: Fahrzeug (2) mit $a_2 = 1\,m\,s^{-2}$, Fahrzeug (1) mit 80% der Beschleunigung a_2. (Hinweis: Definieren Sie den Zeitpunkt $t_{01} = 0$, bei dem Fahrzeug (1) das Ende der Geschwindigkeitsbegrenzung passiert.)

23a. Zeichnen Sie die *a*-*t*-, das *v*-*t*- und das *s*-t-Diagramme (beide Fahrzeuge).



23b. In welcher Entfernung vom Ende der Baustelle erreicht Fahrzeug (2) das Fahrzeug (1)?

Die Bezeichnung des Wegpunktes am Ende der Baustelle sei s_0.

PKW(1) ist zur Zeit t_{01} bei s_0**:** $\quad s_1(t_{01}) = s_0$

PKW(2) ist zur Zeit t_{02} bei s_0**:** $\quad s_2(t_{02}) = s_0$

Der Abstand der beiden PKW vor dem Ende der Baustelle ist $\Delta s_0 = 60\,m$. Dies entspricht dem zeitlichen Abstand von: $\quad \Delta t_0 = t_{02} - t_{01}$,

und es gilt: $$v_0 = \frac{\Delta s_0}{\Delta t_0} = \frac{\Delta s_0}{t_{02} - t_{01}}$$

Die Zeitdifferenz Δt_0 ist: $$\Delta t_0 = \frac{\Delta s_0}{v_0} = \frac{60\,m \cdot 3,6\,s}{80\,m} = 2,7\,s$$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (1): $$s_1(t) = \frac{1}{2} a_1 (t - t_{01})^2 + v_0 (t - t_{01}) + s_0$$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (2): $$s_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - t_{02})^2 + v_0 (t - t_{02}) + s_0$$

Wenn PKW (2) den PKW (1) bei t_1 erreicht, gilt: $s_1(t_1) = s_2(t_1)$

$$\frac{1}{2}a_1(t_1 - t_{01})^2 + v_0(t_1 - t_{01}) = \frac{1}{2}a_2(t_1 - t_{02})^2 + v_0(t_1 - t_{02})$$

Wähle zur Vereinfachung: $t_{01} = 0$ für $s_0 = 0$, dann gilt: $t_{02} = \Delta t_0$

sowie: $a_1 = \chi \cdot a_2 = 0{,}8 \cdot a_2$

Es folgt:

$$\chi a_2 t_1^2 + 2v_0 t_1 = a_2(t_1 - \Delta t_0)^2 + 2v_0(t_1 - \Delta t_0)$$

$$\chi a_2 t_1^2 = a_2\left(t_1^2 - 2\Delta t_0 t_1 + (\Delta t_0)^2\right) - 2v_0\,\Delta t_0$$

$$a_2(1-\chi)t_1^2 - 2a_2\Delta t_0 t_1 = 2v_0\,\Delta t_0 - a_2(\Delta t_0)^2$$

Umformung: $$t_1^2 - 2\frac{\Delta t_0}{1-\chi}t_1 + \left(\frac{\Delta t_0}{1-\chi}\right)^2 = \left(\frac{2v_0}{a_2\Delta t_0(1-\chi)} + \left(\frac{1}{1-\chi}\right)^2 - \frac{1}{1-\chi}\right)(\Delta t_0)^2$$

Definiere zur Vereinfachung: $\delta = \frac{1}{1-\chi} = \frac{1}{1-0{,}8} = 5$

$$(t_1 - \delta\,\Delta t_0)^2 = \left(\frac{2v_0\,\delta}{a_2\Delta t_0} + \delta^2 - \delta\right)\Delta t_0^2$$

$$t_1 = \Delta t_0\left(\delta \pm \sqrt{\frac{2v_0\,\delta}{a_2\Delta t_0} + \delta^2 - \delta}\right)$$

$$t_1 = 2{,}7\,s \cdot \left(5 \pm \sqrt{82{,}296 + 25 - 5}\right) = 2{,}7\,s \cdot (5 \pm 10{,}114)$$

Positive Lösung: $t_{11} = 40{,}808\,s$

(Negative Lösung: $t_{12} = -13{,}808\,s$ entfällt)

Fahrzeug (1) wird von Fahrzeug (2) nach $t_1 = 40{,}808\,s$ nachdem das Fahrzeug (1) das Ende der Baustelle passiert hat ein. Der zurückgelegte Weg ist:

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_0\,t_1$$

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\frac{m}{s^2}\cdot(40{,}8s)^2 + 22{,}22\frac{m}{s}\cdot 40{,}8\,s = 1573\,m$$

Kontrolle: Da Fahrzeug (2) $\Delta t_0 = 2{,}7\,s$ später als Fahrzeug (1) das Ende der Baustellen erreicht, vergeht die Zeit $t_1' = (40{,}808 - 2{,}7)\,s = 38{,}108\,s$ bis Fahrzeug (2) nach dem Passieren des Endes der Baustelle das Fahrzeug (1) eingeholt hat.

Der zurückgelegte Weg berechnet sich mit Hilfe von t_1':

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2}a_2(t_1')^2 + v_0\,t_1'$$

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2}1\frac{m}{s^2}(38{,}1)^2 + 22{,}22\frac{m}{s}\cdot 38{,}1\,s = 1573\,m$$

23c. Welche Geschwindigkeit haben die beiden Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt?

Geschwindigkeit von Fahrzeug (1): $v_1(t) = a_1\,t + v_0$

Geschwindigkeit für $t_1 = 40,8\,s: v_1(t_1) = a_1 t_1 + v_0 = (0,8 \cdot 40,8 + 22,22)\frac{m}{s} = 54,87\frac{m}{s}$

$$v_1(t_1) = 197,5\frac{km}{h}$$

Geschwindigkeit von Fahrzeug (2): $v_2(t) = a_2 t + v_0$

Geschwindigkeit für $t_1' = 38,1\,s$: $v_2(t_1') = a_2 t_1' + v_0 = (1 \cdot 38,1 + 22,22)\frac{m}{s} = 60,33\frac{m}{s}$

$$v_2(t_1') = 217,2\frac{km}{h}$$

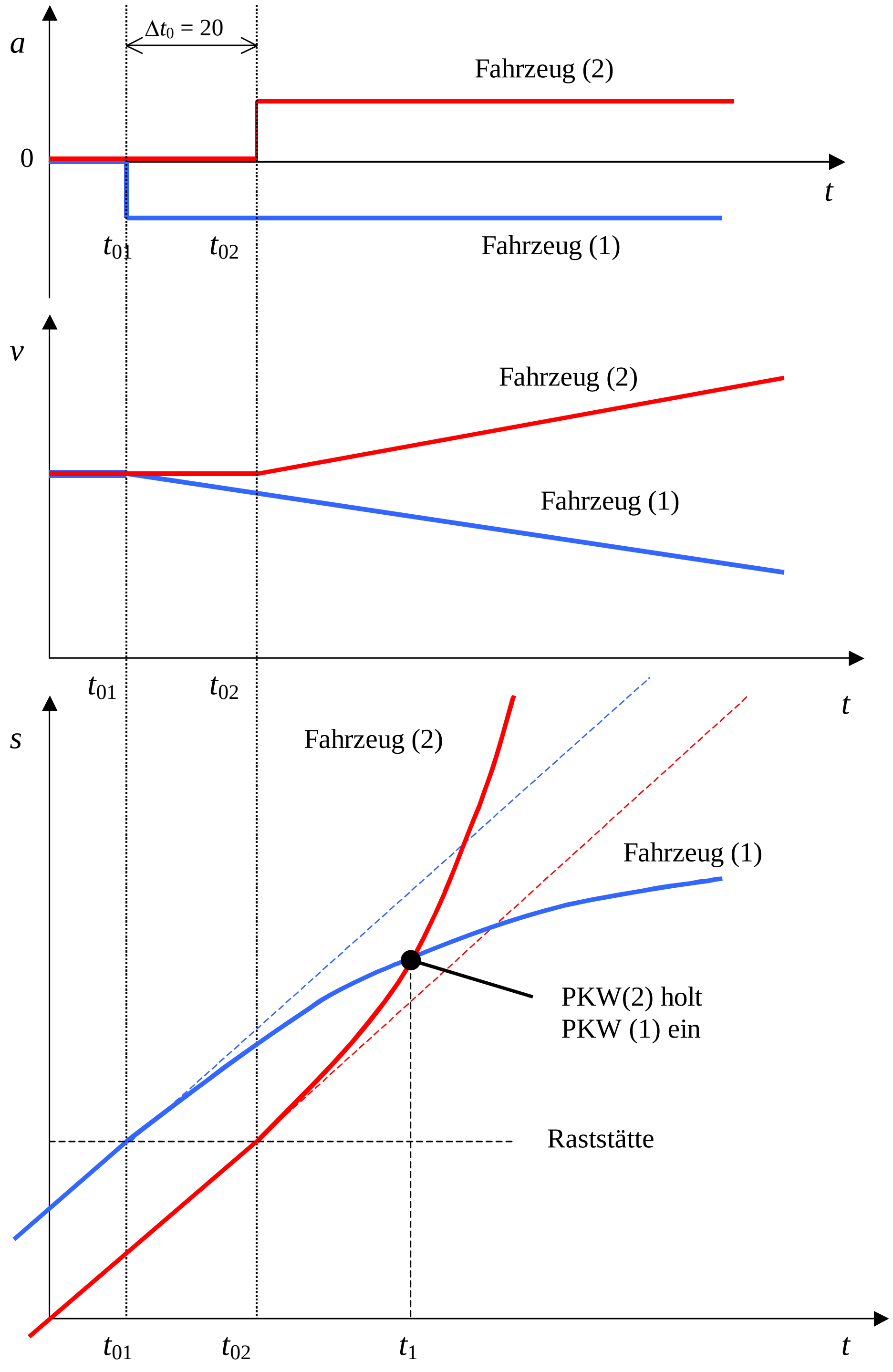
23d. Zu welchem Zeitpunkt (bzgl. t_{01}) besitzen beide Fahrzeug gleiche Geschwindigkeit?

Die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge sind gleich, wenn gilt:

$$a_1 t_2 + v_0 = a_2(t_2 - \Delta t_0) + v_0$$
$$a_1 t_2 = a_2 t_2 - a_2 \Delta t_0$$
$$t_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}\Delta t_0 = \frac{1}{1-0,8}\Delta t_0 = 5\Delta t_0 = 13,5\,s$$
$$t_2' = t_2 - \Delta t_0 = 4\Delta t_0 = 10,8\,s$$

24. Zwei Fahrzeuge fahren mit gleicher Geschwindigkeit $v_0 = 90\,km\,h^{-1}$ an der Raststätte Hildesheim der A7 im zeitlichen Abstand von 20 s vorbei (Fahrzeug 1 fährt voraus, Fahrzeug 2 folgt hinterher). Fahrzeug 1 beginnt in Höhe der Raststätte mit der Bremsbeschleunigung $a_1 = -0,2\,m\,s^{-1}$ abzubremsen, während Fahrzeug 2 beim Erreichen der Raststätte mit $a_2 = +0,2\,m\,s^{-1}$ beschleunigt.

24a. Zeichnen Sie die *a*-*t*-, das *v*-*t*- und *s*-t-Diagramme beider Fahrzeuge.



24b. In welcher Distanz zur Raststätte Hildesheim hat Fahrzeug 2 das Fahrzeug 1 eingeholt?

PKW (1) ist zur Zeit t_{01} an der Raststätte: $s_1(t_{01}) = s_0$

PKW (2) ist zur Zeit t_{02} an der Raststätte: $s_2(t_{02}) = s_0$

Der zeitliche Abstand der beiden PKW an der Raststätte $\Delta t_0 = t_{02} - t_{01} = 20\,s$. Dies entspricht einem Abstand von: $\Delta s = v_0 \cdot \Delta t_0 = 500\,m$, Weg-Zeit-Funktion für PKW (1): $s_1(t) = \frac{1}{2} a_1 (t - t_{01})^2 + v_0 (t - t_{01}) + s_0$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (2): $s_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - t_{02})^2 + v_0 (t - t_{02}) + s_0$

Wenn PKW (2) den PKW (1) bei t_1 erreicht, gilt: $s_1(t_1) = s_2(t_1)$

Einsetzen: $\frac{1}{2} a_1 (t_1 - t_{01})^2 + v_0 (t_1 - t_{01}) = \frac{1}{2} a_2 (t_1 - t_{02})^2 + v_0 (t_1 - t_{02})$

Wähle zur Vereinfachung: $t_{01} = 0$ für $s_0 = 0$, Es gilt dann: $t_{02} = \Delta t_0$

sowie: $a_1 = -a$ und $a_2 = +a$ mit $a = |a_1| = |a_2| = 0{,}2\, m s^{-1}$

Es folgt:

$$-a t_1^2 + 2 v_0 t_1 = a (t_1 - \Delta t_0)^2 + 2 v_0 (t_1 - \Delta t_0)$$

$$-a t_1^2 = a \left(t_1^2 - 2 \Delta t_0 t_1 + (\Delta t_0)^2 \right) - 2 v_0 \Delta t_0$$

$$2 a t_1^2 - 2 a \Delta t_0 t_1 = 2 v_0 \Delta t_0 - a (\Delta t_0)^2$$

Umformung:

$$t_1^2 - 2 \frac{\Delta t_0}{2} t_1 + \left(\frac{\Delta t_0}{2} \right)^2 = \left(\frac{v_0}{a \Delta t_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) (\Delta t_0)^2$$

$$\left(t_1 - \frac{\Delta t_0}{2} \right)^2 = \left(\frac{v_0}{a\, \Delta t_0} - \frac{1}{4} \right) \Delta t_0^2$$

$$t_1 - \frac{\Delta t_0}{2} = \Delta t_0 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{v_0}{a\, \Delta t_0} - \frac{1}{4}} \right)$$

$$t_1 = \Delta t_0 \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{v_0}{a\, \Delta t_0} - \frac{1}{4}} \right)$$

$$t_1 = 20\, s \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25\, m s^{-1}}{0{,}2\, m s^{-2} \cdot 20\, s} - \frac{1}{4}} \right) = 20\, s \left(0{,}5 \pm \sqrt{6} \right)$$

Positive Lösung: $t_{11} = 58{,}98\, s$

(Negative Lösung: $t_{12} = -38{,}98\, s$ entfällt)

Fahrzeug 1 wird von Fahrzeug 2 $t_1 = 58{,}98\, s$ nachdem Fahrzeug 1 die Raststätte Hildesheim passiert hat, eingeholt. Der zurückgelegte Weg ist:

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_0 t_1$$

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2} \left(-0{,}2 \frac{m}{s^2} \right) (58{,}98 s)^2 + 25 \frac{m}{s} \cdot 58{,}98\, s = 1126\, m$$

Kontrolle: Da Fahrzeug 2 $\Delta t_0 = 20\, s$ später als Fahrzeug 1 die Raststätte erreicht, vergeht die Zeit $t_1' = (58{,}98 - 20{,}00)\, s = 38{,}98\, s$ bis Fahrzeug 2 nach dem Passieren der Raststätte das Fahrzeug (1) eingeholt hat.

Der zurückgelegte Weg berechnet sich mit Hilfe von t_1':

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2} a_2 (t_1')^2 + v_0 t_1'$$

$$s_2\left(t_1'\right)=\frac{1}{2}\left(+0,2\frac{m}{s^2}\right)\left(38,98\,s\right)^2+25\frac{m}{s}\cdot 38,98\,s=1126\,m$$

25. Ein PKW(1), der mit konstanter Geschwindigkeit von 72 kmh^{-1} fährt, wird von einem anderen PKW(2) mit 90 kmh^{-1} überholt. Im Moment des Überholens beschleunigt PKW(1), während PKW(2) mit konstanter Geschwindigkeit weiter fährt. Laut Herstellerangaben benötigt PKW(1) für die Geschwindigkeitserhöhung von 60 kmh^{-1} auf 100 kmh^{-1} eine Zeit von 8,5 s.

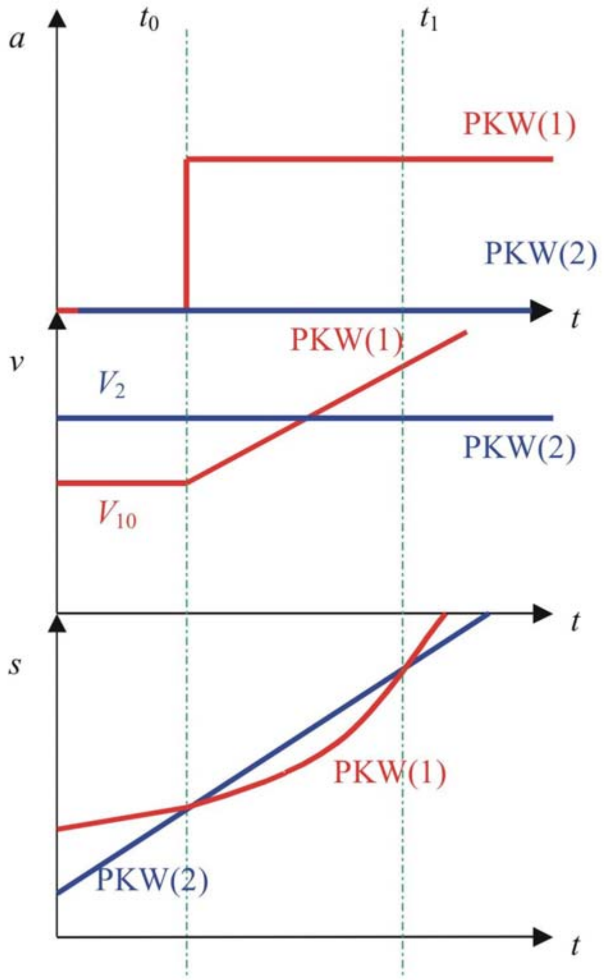
25a. Zeichnen Sie ein *a-t-*, *v-t-* und *s-t*-Diagramm für beide Fahrzeuge.

a-t-, v-t- und s-t-Diagramm.

Bei $t_0 = 0$ überholt PKW(2) PKW(1). PKW(1) beginnt zu beschleunigen. Beschleunigung von PKW(2) ist Null.

Bei $t_0 = 0$ beginnt die Geschwindigkeit von PKW(1) zu wachsen. Geschwindigkeit von PKW(2) bleibt konstant.

Für PKW(2) nimmt der Weg linear mit der Zeit zu. Für PKW(1) beginnt bei $t_0 = 0$ eine zusätzliche quadratische Zunahme. Bei t_1 hat PKW(1) den PKW(2) dann wieder eingeholt.



25b. Berechnen Sie die Beschleunigung von PKW(1).

Beschleunigung von PKW(1): $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(100-60)10^3\,m}{8{,}5\,s\cdot 3600\,s}=1{,}31\frac{m}{s^2}$

25c. Welche Zeit liegt zwischen den beiden Überholvorgängen?

Für PKW(1) gilt: $s_1(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_{10}\, t$

Für PKW(2) gilt: $s_2(t) = v_2\, t$

Beim Überholen gilt: $s_1(t_{0/1}) = s_2(t_{0/1})$

$$\frac{1}{2} a t_{0/1}^2 + v_{10}\, t_{0/1} = v_2\, t_{0/1}$$

$$\frac{1}{2} a t_{0/1}^2 = t_{0/1}(v_2 - v_{10})$$

Lösung 0 (Triviallösung): $t_0 = 0\,s$

Lösung 1: $t_1 = \frac{2(v_2 - v_1)}{a} = \frac{2(90-72)m\,s^{-1}}{1{,}307\,m\,s^{-2}\;3{,}6} = 7{,}65\,s$

Ergebnis $\Delta t = t_1 - t_0 = 7{,}65\,s$

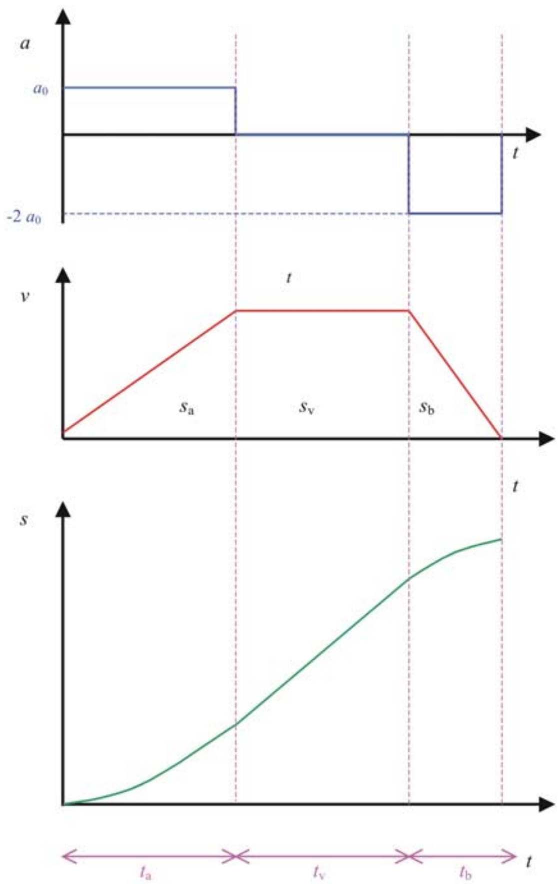
25d. Nach welcher Wegstrecke wird PKW(2) vom PKW(1) überholt?

Für PKW(1): $s_1(\Delta t) = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_{10}\, t_1 = 191{,}3\,m$

für PKW(2) (nur Kontrolle): $s_2(\Delta t) = v_2\, t_1 = \frac{90}{3{,}6} 7{,}65\,m = 191{,}3\,m$

26. Ein Fahrzeug (Nr. 1) durchfährt aus dem Stand eine 0,5 km lange Strecke zwischen zwei Ampeln im Stadtverkehr. Zunächst beschleunigt das Fahrzeug bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von $v_{max} = 54\,km\,h^{-1}$, fährt anschließend einige Zeit mit konstanter Geschwindigkeit und bremst dann gleichmäßig ab. Der Betrag der Bremsverzögerung ist doppelt so groß wie der Betrag der Anfangsbeschleunigung.

26a. Skizzieren Sie das *a-t-*, das *v-t-* und das *s-t-* Diagramm.



26b. Die gesamte Fahrzeit beträgt 50 s. Wie groß sind die Beschleunigung a_0 und die Bremsverzögerung a_B?

Beschleunigung: $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\max} - 0}{t_a - 0} = \frac{v_{\max}}{t_a}$

Beschleunigungszeit: $t_a = \frac{v_{\max}}{a_0}$

Bremsverzögerung: $a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_{\max}}{t_B - 0} = -\frac{v_{\max}}{t_B}$

für die Bremszeit folgt: $t_B = \frac{0 - v_{\max}}{a_B} = -\frac{v_{\max}}{a_B}$

Es gilt laut Aufgabenstellung: $a_B = -2\,a_0$

es folgt für die Bremszeit: $t_B = -\frac{v_{\max}}{a_B} = -\frac{v_{\max}}{(-2\,a_0)} = \frac{1}{2} t_a$

Zeit mit maximaler Geschwindigkeit: $t_v = \frac{v_{\max}}{s_v}$

Für die Gesamtstrecke gilt: $s_{ges} = s_a + s_v + s_B$

Es folgt: $s_{ges} = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_{\max} t_v + \left(v_{\max} t_B + \frac{1}{2} a_B t_B^2 \right)$

Für die Gesamtzeit gilt: $t_{ges} = t_a + t_v + t_B = t_a + t_v + \frac{1}{2} t_a = \frac{3}{2} t_a + t_v$

Einsetzen: $s_{ges} = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}}{t_a} t_a^2 + v_{\max} \left(t_{ges} - \frac{3}{2} \frac{v_{\max}}{a_0} \right) + \left(v_{\max} \frac{v_{\max}}{2 \cdot a_0} + \frac{1}{2} (-2\,a_0) \left(\frac{v_{\max}}{2 \cdot a_0} \right)^2 \right)$

Es folgt: $s_{ges} = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} t_{ges} - \frac{3}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} - \frac{1}{4} \frac{v_{\max}^2}{a_0} = -\frac{3}{4} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} t_{ges}$

Lösung für die Beschleunigung: $a_0 = \frac{3 \cdot v_{\max}^2}{4 \cdot \left(v_{\max} t_{ges} - s_{ges} \right)} = 0{,}675 \, \frac{m}{s^2}$

Bremsverzögerung: $a_B = -2\,a_0 = -1{,}35 \frac{m}{s^2}$

26c. Wie lang sind die Streckenabschnitte der beschleunigten und der gleichförmigen Bewegung und der Bremsweg?

Beschleunigungsstrecke: $s_a = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v_{\max}}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} = 166{,}66\,m$

Strecke mit $v_{\max}$: $s_v = v_{\max} t_v = v_{\max} \left(t_{ges} - \frac{3}{2} t_a \right) = v_{\max} t_{ges} - \frac{3}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} = 250\,m$

Bremsweg: $s_B = v_{\max} t_B + \frac{1}{2} a_B t_B^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + \frac{1}{2} (-2 a_0) \frac{v_{\max}^2}{4 a_0^2} = \frac{1}{4} \frac{v_{\max}^2}{a_0} = 83{,}33\,m$

26d. Fahrzeug Nr. 1 wird beim Start von einem anderen Fahrzeug Nr. 2 mit $v_2 = 36\,km\,h^{-1}$ überholt. Nr. 1 fährt wie oben beschrieben. Fahrzeug Nr. 2 fährt mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Nach welcher Strecke überholt Fahrzeug Nr. 1 das Fahrzeug Nr. 2?

Vorüberlegung:

Nr. 1 benötigt bis zum Bremsen: $t_1 = \frac{v_{\max}}{a_0} + \frac{s_v}{v_{\max}} = 22{,}22\,s + 16{,}66\,s = 38{,}888\,s$

Nr. 2 benötigt für 166,66 m: $t_{21} = \frac{166{,}66m}{10\,m/s} = 16{,}666\,s$

Fahrzeug Nr. 2 benötigt für 250 m: $t_{22} = \frac{250\,m}{10\,m/s} = 25{,}0\,s$

Fahrzeug Nr. 2 hat nach 38,888 s eine Strecke von 388,88 m gefahren, während Fahrzeug Nr. 1 bereits 416,66 m weit gekommen ist. **Folgerung:** Fahrzeug Nr. 1 überholt Fahrzeug Nr. 2 während der gleichförmigen Bewegung mit $v_{\max}$.
Der Überholvorgang erfolgt zum Zeitpunkt t'. Beide Fahrzeuge haben zum Zeitpunkt t' die selbe Wegstrecke zurückgelegt.

Fahrzeug Nr. 1 $s'(t') = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_{\max} \cdot (t' - t_a)$

Fahrzeug Nr. 2: $s'(t') = v_2 \cdot t'$

Zeit bis zum Überholpunkt: $t' = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0 (v_{\max} - v_2)} = 33{,}33\,s$

Fahrtstrecke für Nr. 1: $s'(t') = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} \cdot (t' - t_a)$

$s'(t') = 166.66\,m + 166{,}66\,m = 333{,}3\,m$

Fahrtstrecke für Nr. 2: $s'(t') = v_2 \cdot t' = 333{,}3\,m$

27. Zwei PKW fahren nebeneinander mit gleicher Geschwindigkeit auf eine grüne Ampel zu. Bei einem Abstand von 75 m schaltet die Ampel auf gelb. Die Gelbphase dauert 3 s. Beide Fahrer reagieren 0,8 s nach der Ampelschaltung: Fahrer Nr. 1 bremst gleichmäßig mit -3,5 m s^{-2} bis zum Stop direkt vor der Ampel, Fahrer Nr. 2 beschleunigt mit +2,5 m s^{-2}.

27a. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit der Fahrzeuge?

Gegeben: Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\,m$, Bremsverzögerung PKW(1): $a_1 = -3{,}5\,m\,s^{-2}$, Beschleunigung PKW(2): $a_2 = +2{,}5\,m\,s^{-2}$ Reaktionszeit = Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\,s$.

Gesucht: Anfangsgeschwindigkeit: v_0

Es gilt für PKW(1): $s_{ges} = s_v + s_{a1} = v_0\,t_v + \frac{v_0^2}{2\,|a_1|}$

Lösung für v_0: $v_0 = \pm\sqrt{2|a_1| s_{ges} + a_1^2 t_v^2} - |a_1| t_v = +20{,}28 \frac{m}{s} = 73{,}0 \frac{km}{h}$

27b. Kann Fahrzeug Nr. 1 noch während der Gelbphase stoppen?

Bremszeit PKW(1): $t_{a1} = \frac{v_0}{a_{a1}} = 5{,}79\, s \approx 5{,}8\, s$

Gesamtzeit = Reaktionszeit + Bremszeit = 0,8 s + 5,8 s = 6,6 s.
Ergebnis: PKW(1) stoppt nicht während der Gelbphase (Beachte: Das ist verkehrstechnisch völlig in Ordnung, weil PKW(1) vor der Ampel zum Stehen kommt).

27c. Kann Fahrzeug Nr. 2 die Ampel noch während der Gelbphase passieren?

Zurückgelegter Weg s_g von Fahrzeug Nr. 2 während der Gelbphase $t_g = 3s$ setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Weg mit gleichmäßiger Beschleunigung a_2 zusammen.

Lösung: $s_g = s_v + s_{a2} = v_0\, t_g + \frac{1}{2} a_2 \left(t_g - t_v\right)^2 = 66{,}9\, m$

Die Ampel (Entfernung: 75 m) kann also während der Gelbphase nicht erreicht werden. PKW(2) passiert die Ampel bei Rotlicht (was natürlich verboten ist).

27d. Berechnen Sie die Beschleunigung, die nötig wäre, damit Fahrzeug Nr. 2 genau beim Umschalten von gelb auf rot die Ampel passiert.

Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\, m$, Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\, s$, Gesamtzeit der Gelbphase: $t_g = 3\, s$, Beschleunigungszeit: $t_a = \left(t_g - t_v\right) = 2.2\, s$
Gesucht: Beschleunigung a_2', so dass die Ampel in 3 s erreicht werden kann.

Es gilt: $s_{ges} = s_v + s_a = v_0\, t_g + \frac{1}{2} a_2' \left(t_g - t_v\right)^2$

Lösung: $a_2' = \frac{2 \cdot \left(s_{ges} - v_0 t_g\right)}{\left(t_g - t_v\right)^2} = 5{,}85 \frac{m}{s^2}$.

(Bemerkung: Diese Beschleunigung ist sehr hoch. Mit 5,85 m/s^2 beschleunigt ein Fahrzeug "in 4,7 s von 0 auf 100 km/h". Fazit. Bremsen wäre besser.)

28. Einer gut einsehbaren Kreuzung nähern sich auf der vorfahrtberechtigten Straße ein mit der konstanten Geschwindigkeit von 36 km/h fahrender Lkw und auf der senkrecht dazu verlaufenden anderen Straße ein Pkw, der zu diesem Zeitpunkt von der Kreuzung mit 150 m dreimal so weit entfernt ist wie der Lkw und eine Geschwindigkeit von 72 km/h besitzt. (Die Fahrzeuge sind punktförmig!)

28a. Wann erreicht der Lkw die Kreuzung?

Entfernung LKW: $s_{LKW} = \frac{1}{3} s_{PKW} = \frac{150\, m}{3} = 50\, m$

Zeit für LKW bis zum Erreichen der Kreuzung:

$$t_{LKW} = \frac{s_{LKW}}{v_{LKW}} = \frac{50\,m}{(36/3{,}6)m\,s^{-1}} = \frac{50}{10}s = 5\,s$$

28b. Um die Kreuzung noch vor dem Lkw passieren zu können, beschleunigt der Pkw- Fahrer gleichmäßig. Wie groß ist die Beschleunigung und welche Geschwindigkeit hat der Pkw auf der Kreuzung?

Beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit:

$$s_{PKW} = v^0_{PKW}\ t_{LWK} + \frac{1}{2}a_{PKW}t^2_{LKW}$$

Beschleunigung für PKW:

$$a_{PKW} = \frac{2\left(s_{PKW} - v^0_{PKW}\cdot t_{LKW}\right)}{t^2_{LKW}} = 4\frac{m}{s^2}$$

Endgeschwindigkeit PKW:

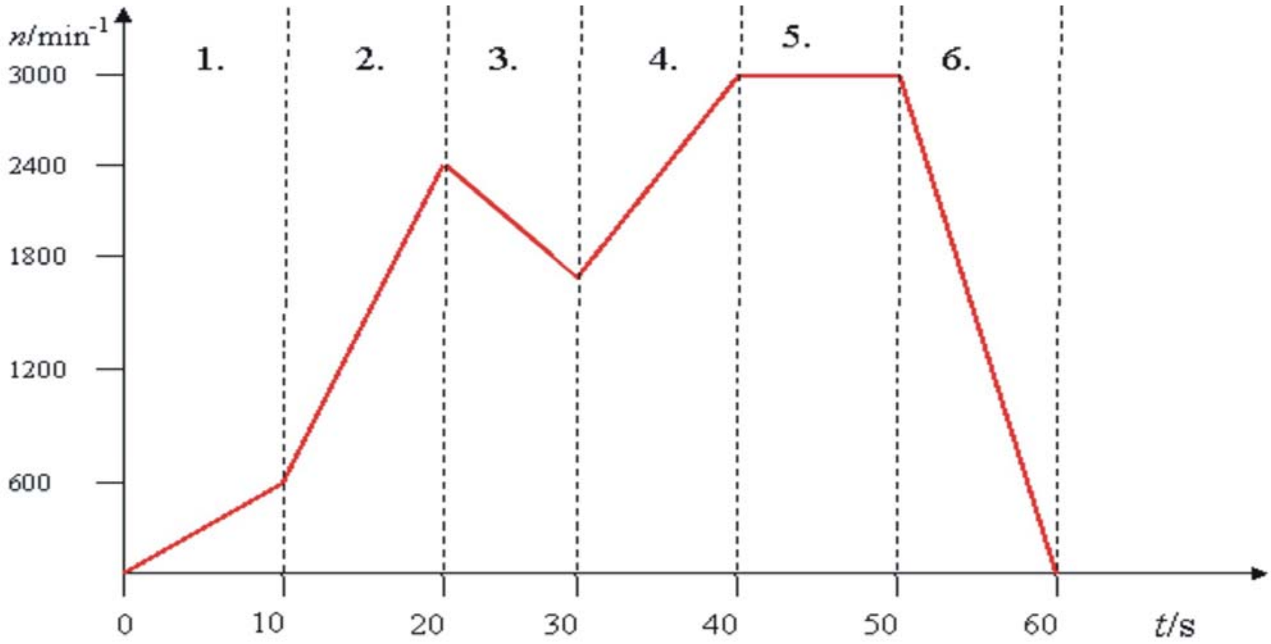
$$v^{End}_{PKW} = v^0_{PKW} + a_{PKW}\cdot t_{LKW}$$

$$v^{End}_{PKW} = 20\frac{m}{2} + 4\frac{m}{s^2}\cdot 5\,s = 40\frac{m}{s} = 144\frac{km}{h}$$

29. Bei einem Motortest wurden folgende Drehzahl-Zeit-Werte ermittelt.

t / s	0	10	20	30	40	50	60
n / $\min^{-1}$	0	600	2400	1800	3000	3000	0

29a. Skizzieren Sie das Drehzahl-Zeit-Diagramm.



29b. Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigungen in den unterschiedlichen Teilbereichen.

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = 2\pi \cdot \frac{n_e - n_a}{t_e - t_a}$

wobei ω_e - Winkelgeschwindigkeit am Ende t_e

ω_a - Winkelgeschwindigkeit am Ende t_a

für die verschiedenen Teilbereiche *i* gilt: $\alpha_i = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = 2\pi \cdot \frac{n_{ei} - n_{ai}}{t_{ei} - t_{ai}}$

Es ist zu beachten, dass die Drehzahl in der Tabelle des Aufgabenblattes in der Einheit min^{-1} angegeben ist, bei der Berechnung der Winkelbeschleunigung aber zweckmäßigerweise in die Einheit s^{-1} umgerechnet werden sollte (durch 60 teilen!).

Teilbereich	1	2	3	4	5	6
Winkelbeschleunigung α_i / s^{-2}:	2π	6π	-2π	+4π	0	-10π
Winkelbeschleunigung α_i / s^{-2}:	6,28	18,85	-6,28	+12,56	0	-31,42

29c. Wie viele Umdrehungen macht der Motor in den Teilbereichen? Wie viele Umdrehungen macht der Motor insgesamt während des Tests?

Die Zahl der Umdrehungen entspricht der Fläche unter der Funktion $n(t)$ im gezeigten Diagramm.

Es gilt allgemein: $N = \int_{t_u}^{t_o} n(t)\,dt$

Für einen Teilbereich i gilt: $N_i = \bar{n}_i \cdot \Delta t_i = \frac{n_{oi} + n_{ui}}{2} \cdot \Delta t_i$

Es ist $\Delta t_i = 10\,s = \frac{1}{6}\,\mathrm{min}$ für alle *i*

Teilbereich	1	2	3	4	5	6
Drehzahl am Ende des Teilb. n_{oi} / min^{-1}:	600	2400	1800	3000	3000	0
Drehzahl am Anfang des Teilb. n_{oi} / min^{-1}:	0	600	2400	1800	3000	3000
Zahl der Umdrehungen im Teilbereich N_i:	50	250	350	400	500	250

Gesamtzahl der Umdrehungen: $N_{ges} = \sum_i N_i = 1800$

29d. Bestimmen Sie die mittlere Drehzahl und die mittlere Winkelgeschwindigkeit.

Die mittlere Drehzahl ist: $\bar{n} = \frac{\sum_i n_i}{\sum_i i} = \frac{10800\,\mathrm{min}^{-1}}{6} = 1800\,\mathrm{min}^{-1}$

Zur Kontrolle des Ergebnisses von **2c.** kann die Gesamtzahl der Umdrehungen als Produkt der mittleren Drehzahl und der Gesamtzeit bestimmt werden:

$$N_{ges} = \bar{n} \cdot t_{ges} = 1800\,\mathrm{min}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{min} = 1800$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist: $\bar{\omega} = 2\pi \cdot \bar{n} = 2\pi \cdot 1800\,\mathrm{min}^{-1}$

$$\bar{\omega} = 2\pi \cdot 30\,s^{-1} = 188{,}5\,s^{-1}$$

30. Auf einer ebenen Kreisbahn mit Durchmesser von 200 m wird ein Motorrad getestet. Die Testfahrt erfolgt <u>zunächst gleichmäßig beschleunigt</u> bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit und <u>anschließend gleichförmig.</u> Zur Kontrolle der Beschleunigung befinden sich Lichtschranken im Abstand von 10 m und 22,5 m nach dem Start zur Messung der Zeitdifferenz Δt.

30a. Wie groß ist Δt, wenn die Bahnbeschleunigung $a_B = 5\,m\,s^{-2}$ beträgt?

Für Lichtschranke 1 gilt: $s_1 = \frac{1}{2} a_B\, t_1^2$ (*)

Für Lichtschranke 2 gilt: $s_2 = \frac{1}{2} a_B\, t_2^2$

mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $t_2 = t_1 + \Delta t$

und $\Delta s = s_2 - s_1 = 12{,}5\,m$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} a_B\, t_2^2 - \frac{1}{2} a_B\, t_1^2 = \frac{1}{2} a_B \left(t_1 + \Delta t\right)^2 - \frac{1}{2} a_B\, t_1^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_B\, t_1^2 + a_B\, t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B\, \Delta t^2 - \frac{1}{2} a_B\, t_1^2$$

$$\frac{1}{2} a_B\, \Delta t^2 + a_B\, t_1 \Delta t = \Delta s$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{t_1^2 + \frac{2\,\Delta s}{a_B}} - t_1$$

aus (*) folgt: $t_1 = \sqrt{\frac{2\,s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = \sqrt{4}\; s = +2\,s$

(nur pos. Lös. möglich)

$$\Delta t = \pm\sqrt{t_1^2 + \frac{2\,\Delta s}{a_B}} - t_1$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{4\,s^2 + \frac{2 \cdot 12{,}5\,m}{5\,m\,s^{-2}}} - 2\,s$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{4\,s^2 + 5\,s^2} - 2\,s = \left(\pm 3 - 2\right) s$$

nur pos. Lösung möglich: $\Delta t_1 = +1\,s$

Es geht aber auch einfacher, wenn man gleich mit Zahlen rechnet.

Für Lichtschranke 1 gilt: $s_1 = \frac{1}{2} a_B\, t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = 2\,s$

Für Lichtschranke 2 gilt: $s_2 = \frac{1}{2} a_B\, t_2^2 \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{a_B}} = \sqrt{\frac{45\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = 3\,s$

Lösung: $\Delta t = t_2 - t_1 = 3\,s - 2\,s = 1\,s$

30b. Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit v_{max}, die dadurch gegeben sein soll, dass das Motorrad eine Schräglage von 45° erreicht hat?

Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{max} = 45°$ ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung gleich dem Betrag der Erdbeschleunigung.

Es gilt: $$\frac{v_{max}^2}{R} = g$$

Es folgt: $$v_{max} = \sqrt{R\,g} = \sqrt{100\,m \cdot 10\,m\,s^{-2}} = 31{,}62\,\frac{m}{s}$$

$$v_{max} = 31{,}62\,\frac{m}{s} = 114\,\frac{km}{h}$$

30c. Der Weg bis zum Erreichen von v_{max} sei S_{max}. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung nach der Wegstrecke $S_{max}/2$ und welche Schräglage hat das Motorrad an diesem Punkt?

Zeit zum Erreichen von v_{max}: $$t_{max} = \frac{v_{max}}{a_B} = \frac{31{,}62\,m\,s^{-1}}{5\,m\,s^{-2}} = 6{,}32\,s$$

Gesamte Fahrtstrecke bis v_{max}: $$s_{max} = \frac{1}{2}a_B\,t_{max}^2 = \frac{1}{2}5\,m\,s^{-2}\,(6{,}32\,s)^2 = 100\,m$$

Halbe Fahrtstrecke: $$\frac{s_{max}}{2} = 50\,m$$

Für $\frac{s_{max}}{2}$ gilt: $$\frac{s_{max}}{2} = \frac{1}{2}a_B\,t_{max/2}^2 = \frac{v^2(s_{max/2})}{2 \cdot a_B}$$

Geschwindigkeit bei $\frac{s_{max}}{2}$: $$v(s_{max/2}) = \sqrt{2\,a_B\,\frac{s_{max}}{2}} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 50}\,\frac{m}{s} = 22{,}36\,\frac{m}{s}$$

Die Gesamtbeschleunigung ist die Vektorsumme von Radial- und der Tangentialbeschleunigung.

Radialbeschleunigung: $$a_R = \frac{\left[v(s_{max/2})\right]^2}{R} = \frac{500\,m^2 s^{-2}}{100\,m} = 5\,m\,s^{-2}$$

Tangentialbeschleunigung: $$a_t = a_B = 5\,m\,s^{-2}$$

Gesamtbeschleunigung: $$a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}\,m\,s^{-2} = 7{,}07\,m\,s^{-2}$$

Schräglage: Winkel φ gegen die Senkrechte mit Gegenkathete a_R und Ankathete g

$$\tan\varphi = \frac{5\,m\,s^{-2}}{10\,m\,s^{-2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 27°$$

30d. Welche Zeit benötigt das Motorrad für die ersten fünf Runden?

Zeit für die ersten fünf Runden:

Gesamtlänge von fünf Runden:	$s_{ges} = 5 \cdot (\pi \cdot D) = 3142\,m$
Weg für Beschleunigung	$s_a = s_{\max} = 100\,m$ in $t_a = t_{\max} = 6{,}32\,s$
Weg für gleichförmige Bewegung:	$s_v = s_{ges} - s_a = (3142 - 100)\,m = 3042\,m$
Zeit für gleichförmige Bewegung:	$t_v = \frac{s_v}{v_{\max}} = \frac{3042 m}{31{,}62\,m\,s^{-1}} = 96{,}2\,s$
Zeit für fünf Runden:	$t_{ges} = t_a + t_v = (6{,}32 + 96{,}20)\,s = 102{,}5\,s$