
KINEMATIK

Translation

Verschiebung: $\vec{s}$

Geschwindigkeit: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}$

Beschleunigung: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{\mathrm{d}t^2}$

Gleichförmige Geschwindigkeit

$\vec{s} = \vec{v} \cdot t \qquad \vec{v} = const. \qquad \vec{a} = 0$

Gleichförmige Beschleunigung

$\vec{s} = \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \qquad \vec{v} = \vec{a} \cdot t \qquad \vec{a} = const.$

Rotation

Drehwinkel: $\vec{\varphi}$

Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$

Winkelbeschleunigung: $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$

Gleichförmige Winkelgeschwindigkeit

$\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot t \qquad \vec{\omega} = const. \qquad \vec{\alpha} = 0$

Gleichförmige Winkelbeschleunigung

$\vec{\varphi} = \dfrac{1}{2}\vec{\alpha} \cdot t^2 \qquad \vec{\omega} = \vec{\alpha} \cdot t \qquad \vec{\alpha} = const.$

Bahngröße = Radius * Winkelgröße: $s = r \cdot \varphi \qquad v = r \cdot \omega \qquad a = r \cdot \alpha$

Drehzahl: $n = \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$

Umdrehungszeit: $T = \dfrac{1}{n}$

Bahngeschwindigkeit: $v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot n$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot n$

Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \dfrac{v^2}{r} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r$

Zerlegung einer beliebigen Beschleunigung in Tangential-($\vec{T}$) - und Normalbeschleunigung ($\vec{N}$)

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t} \qquad a_N = \frac{\mathrm{d}v_N}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$$

$$a_T = \frac{v_x}{v} \cdot a_x + \frac{v_y}{v} \cdot a_y + \frac{v_z}{v} \cdot a_z \qquad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

DYNAMIK

Translation

Masse: m

Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Arbeit: $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Leistung: $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Bewegungsenergie: $E_{trans} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2$

Rotation

Trägheitsmoment: $J = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m$

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J \cdot \vec{\omega}$

Arbeit: $\mathrm{d}W = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$

$W = \int \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$

Leistung: $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Bewegungsenergie: $E_{rot} = \dfrac{1}{2} \cdot J \cdot \vec{\omega}^2$

Feder- Drehfederkräfte, elastische Verformungsarbeit

Federkonstante: D Winkelrichtgröße: D^*

Federkraft: $\vec{F}_{el} = -D \cdot \vec{s}$ Drehfedermoment: $\vec{M}_{el} = -D^* \cdot \vec{\phi}$

Verformungsarbeit: $W_{el} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$ Verformungsarbeit: $W_{el} = \frac{1}{2} D^* \cdot \varphi^2$

Reibungskräfte, Reibungsarbeit

Haftreibungszahl: μ_H Gleitreibungszahl: μ_G Rollreibungszahl: μ_R

Haftreibungskraft: $F_{H,\max} = \mu_H \cdot F_N$

Gleitreibungskraft: $F_G = \mu_G \cdot F_N$ Gleitreibungsarbeit: $W_G = F_G \cdot s = \mu_G \cdot F_N \cdot s$

Rollreibungskraft: $F_R = \mu_R \cdot F_N$ Rollreibungsarbeit: $W_R = F_R \cdot s = \mu_R \cdot F_N \cdot s$

Gravitationskräfte, potentielle Energie im Gravitationsfeld

Gravitationskonstante: $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$

Gravitationskraft: $\vec{F}_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ potentielle Energie: $E(r) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Masse der Erde: M_E Erdradius: R_E Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

Gewichtskraft: $F_g = m \cdot \left(G \cdot \frac{M_E}{R_E^2} \right) = m \cdot g$ potentielle Energie: $E(h) = m \cdot g \cdot h$

Erhaltungssätze

Fehlen äußere Kräfte: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ Fehlen Drehmomente: $\sum_i \vec{M}_i = 0$

gilt Impulserhaltung: $\sum_i \vec{p}_i = konst.$ gilt Drehimpulserhaltung: $\sum_i \vec{L}_i = konst.$

In einem System mit konservativen Kräften bleibt die mechanische Energie erhalten:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{trans}^{kin} + E_{rot}^{kin}$$

In einem System mit nicht-konservativen Kräften (z.B. Reibungskräften) geht ein Teil Q der mechanischen Gesamtenergie verloren (z. B. in Wärme oder Verformungsenergie):

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{trans}^{kin} + E_{rot}^{kin} + Q$$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{E_{ges} - Q}{E_{ges}} = \frac{W_{nutz}}{E_{ges}}$

Anwendungen

Wird ein Körper der Masse M um eine Achse gedreht, deren Abstand zum Schwerpunkt h ist, gilt:

$$J_{ges} = M \cdot h^2 + J_S,$$

wobei J_S das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes bezeichnet (Steinerscher Satz).

Trägheitsmoment geometrischer Körper: $J = k \cdot m \cdot r^2$
Hohlzylinder (Ring): $k = 1$, Vollzylinder (Scheibe): $k = 1/2$, Vollkugel: $k = 2/5$, Hohlkugel: $k = 2/3$
dünner Stab mit Drehpunkt Mitte: $k = 1/12$, dünner Stab mit Drehpunkt Ende: $k = 1/3$,
Trägheitsmoment flacher Körper (Ausdehnung in x- und y-Richtung): $J_z = J_x + J_y$

Trägheitskräfte im beschleunigten Bezugssystem:

Trägheitskraft: $\vec{F}_{Tr} = -m\vec{a}$

Zentrifugalkraft: $\vec{F}_{Zf} = -m\dfrac{v^2}{r}$

Corioliskraft: $\vec{F}_{Cor} = -2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_r$

Raketengleichung:

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$: $\vec{v}_0$ Masse zum Zeitpunkt t = 0: m_0

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $\vec{v}(t)$ Masse zum Zeitpunkt t: $m(t)$

Ausströmungsgeschwindigkeit: $\vec{u}_{aus}$

$$\vec{v}(t) = -\vec{u}_{aus} \cdot \ln\frac{m_0}{m(t)} + \vec{v}_0$$

Zentraler elastischer Stoß:

Vor dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{v}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{v}_2$.
Nach dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{u}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{u}_2$.

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_1 \qquad \vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_2$$

Zentraler vollkommen unelastischer Stoß:

Vor dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{v}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{v}_2$.
Nach dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{u}$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \vec{v}_2$$

Verformungsarbeit beim vollkommen unelastischen Stoß: ΔW_Q

$$\Delta W_Q = \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \cdot \vec{v}_2^{\,2} - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{u}^{\,2}$$

$$\Delta W_Q = E_{kin}^1 \cdot \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) + E_{kin}^2 \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) - \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1+m_2}$$

Gleiten, Rotieren, Rollen

Gleiten:	$\vec{v}(-\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_S$	Geschwindigkeit des Schwerpunktes:	$\vec{v}_S$
Rotieren:	$\vec{v}(-\vec{r}) = -\vec{v}(\vec{r})$	Geschwindigkeit des Schwerpunktes:	$\vec{v}_S = 0$
Rollen:	$\vec{v}_{Kontakt} = 0$	Geschwindigkeit des Schwerpunktes:	$\vec{v}_S = \vec{R} \cdot \vec{\omega}$
Rollen:		Verschiebung des Schwerpunktes:	$\vec{s}_S = \vec{R} \cdot \vec{\varphi}$
Rollen:		Beschleunigung des Schwerpunktes:	$\vec{a}_S = \vec{R} \cdot \vec{\alpha}$

Formelzeichen und Einheiten

$\vec{a}$	Beschleunigung	$1\ \mathrm{m\ s^{-2}}$
D	Federkonstante	$1\ \mathrm{N\ m^{-1}}$
D^*	Winkelrichtgröße	$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$
E	Energie	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N\ m} = 1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$
$\vec{F}$	Kraft	$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$
g	Erdbeschleunigung	$9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$
G	Gravitationskonstante	$6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$
J	Trägheitsmoment	$1\ \mathrm{kg\ m^2}$
$\vec{L}$	Drehimpuls	$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$
m	Masse	$1\ \mathrm{kg}$
$\vec{M}$	Drehmoment	$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$
n	Drehzahl	$1\ \mathrm{s^{-1}}$
N	Zahl der Umdrehungen	
$\vec{p}$	Impuls	$1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$
P	Leistung	$1\ \mathrm{J\ s^{-1}} = 1\ \mathrm{N\ m\ s^{-1}} = 1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}}$
Q	Wärmeenergie	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N\ m} = 1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$
r	Radius	$1\ \mathrm{m}$
$\vec{s}$	Verschiebung	$1\ \mathrm{m}$
t	Zeit	$1\ \mathrm{s}$
T	Umdrehungszeit	$1\ \mathrm{s}$
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$1\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
W	Arbeit	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N\ m} = 1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$
$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung	$1\ \mathrm{s^{-2}}$
η	Wirkungsgrad	
μ_H	Haftreibungszahl	
μ_G	Gleitreibungszahl	
μ_R	Rollreibungszahl	
$\vec{\varphi}$	Drehwinkel	
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	$1\ \mathrm{s^{-1}}$