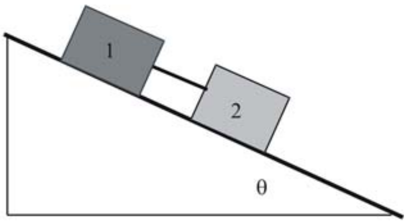
Fachhochschule Hannover | vorgezogene Wiederholungsklausur | 19. 03. 04
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) | Formelsammlung zur Vorlesung

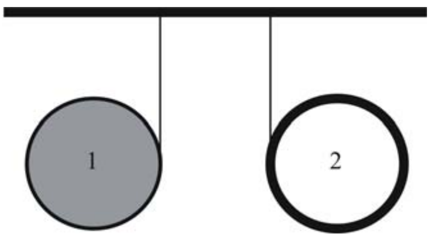
**1.** Ein PKW(1) ($m_1 = 800\ kg$), der vor einer Ampel steht, beginnt beim Umschalten von Rot- auf Grünlicht (konstant) zu beschleunigen. In diesem Augenblick wird er von einem anderen PKW(2) ($m_2 = 1800\ kg$) überholt, der (konstant) mit $v_2 = 36\,km\,h^{-1}$ weiterfährt. Nach 100 m erreicht PKW(1) wieder PKW(2), überholt diesen und beendet seine Beschleunigung.
**a.** Wie groß ist die Beschleunigung von PKW(1)?
**b.** Nach welcher Zeit findet der Überholvorgang statt?
**c.** Welche Endgeschwindigkeit hat PKW(1)?
**d.** Welche Beschleunigungskraft benötigt PKW(1)?
**e.** Wie groß ist die maximale Beschleunigungsleistung?
**f.** Wie groß ist die maximale kinetische Energie von PKW(1) und PKW(2)?
**g** Skizzieren Sie für beide Fahrzeuge die *s-t*, *v-t* und *a-t*-Funktionen.

**2.** Zwei miteinander verbundene Massen mit jeweils $m = 1\,kg$ aus Gummi (1) und Holz (2) liegen auf einer schiefen Ebene aus Holz mit Neigungswinkel θ .
(<u>Haftreibungszahlen:</u> Gummi/Holz: $\mu^1_{H,\max} = 0{,}8$ und Holz/Holz: $\mu^2_{H,\max} = 0{,}6$; <u>Gleitreibungszahlen:</u> Gummi/Holz: $\mu^1_G = 0{,}7$ und Holz/Holz; $\mu^2_G = 0{,}5$)




**a.** Bis zu welchem Winkel $\theta \le \theta_{grenz}$ rutschen die Massen nicht?
**b**. Bei $\theta \ge \theta_{grenz}$ gleiten die Massen. Wie groß ist die Beschleunigung für $\theta \cong \theta_{grenz}$ **?**
**c**. Welche Seilkraft $F_S$ wirkt im Gleitfall?

**3.** Zwei Körper (Vollzylinder (1) und Hohlzylinder (2)), um die jeweils ein Seil gewickelt worden ist, sollen fallen gelassen werden. Das freie Seilende ist an einer Aufhängung befestigt. Beide Zylinder haben gleiche Massen ($m = 1\,kg$) und gleichen Radius ($R = 0{,}1\,m$).




**a.** Mit welcher Beschleunigung fallen die <u>beiden verschiedenen Zylinder</u>?

**b.** Wie groß sind die Seilkräfte?
**c.** Wie groß ist die Winkelbeschleunigung des <u>Vollzylinders</u>?
**d.** Wie groß sind die kinetischen Energien der Translation und der Rotation des <u>Hohlzylinders</u> nach einem Fallweg von $s = 1\,m$ ?

**4.** Zwei Schwungscheiben mit den Massen $m_1 = 1\,kg$ und $m_2 = 2\,kg$ und gleichem Radius $R = 0{,}1\,m$ sind auf einer gemeinsamen Achse montiert. Scheibe(1) dreht sich mit der Drehzahl $n_1 = 600\ \min^{-1}$, während die andere Scheibe still steht. Die Scheiben werden zusammen gekuppelt und drehen anschießend gemeinsam.
**a.** Wie groß ist die gemeinsame Drehzahl nach dem Kupplungsvorgang?
**b.** Welche Energie wird bei dem Kupplungsvorgang in Wärme verwandelt?
**c.** An der Kupplung wird ein Drehmoment von 0,209 Nm gemessen. Wie lange dauert der Kupplungsvorgang?

**Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g$ = 10 m s$^{-2}$**

**Lösungen:**

**1a**. Bezeichne mit $t_a$ die Dauer des Beschleunigungsvorgangs von PKW(1). Der in dieser Zeit zurückgelegte Weg $s_1$ ist gleich der Strecke $s_2 = s_1 = 100\ m$, die PKW(2)mit konstanter Geschwindigkeit $v_2$ in der gleichen Zeit zurücklegt.

Weg PKW(1): $s_1 = \frac{1}{2} a_1\, t_a^2$

Weg PKW(2): $s_1 = s_2 = v_2\, t_a$

Beschleunigung: $a_1 = \frac{2\, v_2^2}{s_1} = 2\ ms^{-2}$

**1b.** Beschleunigungszeit: $t_a = \frac{s_1}{v_2} = 10\, s$

**1c.** Endgeschwindigkeit PKW(1): $v_1 = a_1\ t_a = 20\ ms^{-1} = 72\ km\, h^{-1}$

**1d.** Beschleunigungskraft PKW(1): $F_a^1 = m\ a_1 = 1600\ N$

**1e.** Max. Beschleunigungsleistung: $P_{\max}^1 = F_a^1\ v_{\max} = 1600\ N \cdot 20\ ms^{-1} = 32\ kW$

**1f.** Kinetische Energie PKW(1) $E_{kin}^1 = \frac{1}{2} m\ v_1^2 = 160\ kJ$

**1g.** siehe Vorlesung

**2a.** Da die beiden Massen verbunden sind und die Haftreibungskraft der oberen Masse (1) größer ist als die der Masse (2), wirken beide Haftreibungskräfte $F_{H,\max}$ zusammen gegen die Summe der Hangabtriebskräfte = Tangentialkomponente der Gewichtskraft $F_T$. Die Normalkomponente der Gewichtskraft wird als $F_N$ bezeichnet.

Haftreibungsbedingung: $F_{H,\max}^1 + F_{H,\max}^2 = F_T^1 + F_T^2$

Haftreibungskräfte: $F_{H,\max}^1 + F_{H,\max}^2 = \mu_{H,\max}^1 F_N^1 + \mu_{H,\max}^2 F_N^2$

$F_{H,\max}^1 + F_{H,\max}^2 = \left(\mu_{H,\max}^1 + \mu_{H,\max}^2\right)\ m\, g \cos\theta$

Hangabtriebskräfte: $F_T^1 + F_T^2 = m_1\ g\ \sin\theta + m_1\ g\ \sin\theta = 2\, m\, g \sin\theta$

Es folgt: $2\, m\, g \sin\theta = \frac{\mu_{H,\max}^1 + \mu_{H,\max}^2}{2}\, 2\, m\, g \cos\theta$

$$\theta_{grenz} = \arctan\left(\frac{\mu_{H,\max}^1 + \mu_{H,\max}^2}{2}\right) = \arctan 0{,}7 = 35°$$

**2b.** Zur Berechnung der Beschleunigung im Gleitreibungsfall setze man für $\theta = 35°$ die Gleitreibungszahlen ein und berechne die Gleitreibungskräfte.

Gleitreibungskraft an Masse(1): $F_G^1 = \mu_G^1\ F_N^1 = \mu_G^1\ m_1\ g \cos\theta_{grenz} = 5{,}734\ N$

Gleitreibungskraft an Masse(2): $F_G^2 = \mu_G^2\ F_N^2 = \mu_G^2\ m_2\ g \cos\theta_{grenz} = 4{,}095\ N$

Hangabtriebskraft Masse(1) und (2): $F_T^1 = F_T^2 = mg \sin\theta = 5{,}735\, N$

Reibungskräfte und Hangabtriebskräfte haben entgegen gesetzte Richtung. Entsprechen dem D'Alembertschen Prinzip gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i - m_{ges}\ \vec{a} = 0$$

Es folgt: $F_T^1 + F_T^2 - F_G^1 - F_G^2 - \left(m_1 + m_2\right) a = 0$

Lösung: $$a = \frac{F_T^1 + F_T^2 - F_G^1 - F_G^2}{m_1 + m_2} = \frac{1{,}641\ N}{2\ kg} = 0{,}82\ ms^{-2}$$

**2c.** Trägheitskraft Masse(2): $\left|F_{Tr}^2\right| = \left|m_2\ a\right| = 0{,}82\ N$

Seilkraft an Masse(2): $F_S^2 = F_T^2 - F_G^2 - F_{Tr}^2 = 0{,}82\ N$

Seilkraft an Masse(1): $F_S^1 = F_T^1 - F_G^1 - F_{Tr}^1 = -0{,}82\ N$

**3a.** Die Gewichtskraft der Zylinder ist: $F_G = m \cdot g$

Die Zylinder erfahren beim Fallen eine Winkelbeschleunigung $\alpha$, deren Ursache ein Drehmoment $M_Z$ sein muss.

Es gilt: $M_Z = J\ \alpha$

Das Drehmoment $M_Z$ ist eine Folge der Seilkraft $F_S$.

Es gilt: $$F_S = \frac{M_Z}{R}$$

Gewichtskraft $F_G$ und Seilkraft $F_S$ sind entgegengesetzt gerichtet.

Es gilt (D'Alembertsches Prinzip): $$(F_G - F_S) - ma = 0 = mg - \frac{J\ \alpha}{R} - ma$$

Beim Abrollen der Zylinder gilt: $$\alpha = \frac{a}{R}$$

Es folgt: $$g - \frac{J\ \alpha}{m\ R} - a = g - \frac{J\ a}{m\ R^2} - a = 0$$

Beschleunigung: $$a = g\,\frac{m\ R^2}{J + m\ R^2}$$

Massenträgheitsmoment des VZ: $$J_{VZ} = \frac{1}{2} mR^2$$

Massenträgheitsmoment des HZ: $J_{HZ} = m\,R^2$

Beschleunigung des Vollzylinders: $$a_{VZ} = g\,\frac{m\ R^2}{3/2\ m\ R^2} = \frac{2}{3} g = 6{,}66\ \frac{m}{s^2}$$

Beschleunigung des Hohlzylinders: $$a_{HZ} = g\,\frac{m\ R^2}{2\ m\ R^2} = 5\ \frac{m}{s^2}$$

**3.b.** Seilkraft beim Vollzylinder: $$F_S^{VZ} = m\,g - \frac{m\ R^2\ a_{VZ}}{R \cdot R} = m\,g - m\,a_{VZ} = 3{,}34\ N$$

Seilkraft beim Hohlzylinder: $F_S^{HZ} = m\,g - m\,a_{HZ} = 5\ N$

**3.c.** Winkelbeschleunigung VZ: $$\alpha_{VZ} = \frac{a_{VZ}}{R} = \frac{6{,}66\ m/s^2}{0{,}1\,m} = 66{,}6\ s^{-2}$$

**3.d.** Energieerhaltungssatz: $$mgh = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_{HZ}\,\omega^2$$

mit Abrollbedingung: $$\omega = \frac{v}{R}$$

folgt für den Hohlzylinder: $$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = mv^2$$

Geschwindigkeit HZ für $s = 1\,m$: $$v = \sqrt{gh} = 3{,}16\ \frac{m}{s}$$

Kinetische Energie der Translation: $\left(E_{kin}^{trans}\right)_{HZ} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ g\ h = 5\ J$

$$\left(E_{kin}^{rot}\right)_{HZ} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}m \cdot gh = 5\ J$$

**4a.** Trägheitsmoment der Scheibe 1: $J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 = 0{,}005\ kg\ m^2$

Trägheitsmoment der Scheibe 2: $J_2 = \frac{1}{2}m_2R^2 = 0{,}010\ kg\ m^2$

Drehimpuls vor der Kupplung: $L_1 = J_1\ \omega_1 = J_1\ 2\pi\ n_1 = 0{,}3142\ kg\ m^2\ s^{-2}$

Drehimpuls nach der Kupplung: $L_g = \left(J_1 + J_2\right)\omega_g = \left(J_1 + J_2\right)2\pi\ n_g$

Drehimpulserhaltungssatz: $L_1 = L_g$

Drehzahl nach der Kupplung: $n_g = \frac{J_1}{J_1 + J_2}n_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}n_1 = \frac{1}{3}n_1 = 200\ \text{min}^{-1}$

**4b.** Anfangsenergie: $E_{rot}^1 = \frac{1}{2}J_1\ \omega_1^2 = \frac{1}{4}m_1\ R^2\ 4\pi^2\ n_1^2 = 9.87\ J$

Endenergie: $E_{rot}^g = \frac{J_1 + J_2}{2}\omega_g^2 = \frac{m_1 + m_2}{4}\ R^2\ 4\pi^2\ n_g^2 = 3{,}29\ J$

Energieerhaltungssatz: $E_{rot}^1 = E_{rot}^g + Q$

Energieverlust: $Q = E_{rot}^1\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = 9{,}87\ J \cdot \frac{2}{3} = 6{,}58\ J$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{rot}^1} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = 66{,}6\ \%$

**4c.** Winkelbeschleunigung Scheibe 1: $\alpha_1 = \frac{\omega_g - \omega_1}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \left(n_g - n_1\right)}{\Delta t} = -\frac{2\pi \cdot 400\ \text{min}^{-1}}{\Delta t}$

Winkelbeschleunigung Scheibe 2: $\alpha_2 = \frac{\omega_g - 0}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \left(n_g - 0\right)}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot 200\ \text{min}^{-1}}{\Delta t}$

Drehmoment an Scheibe 1: $M_1 = J_1\ \alpha_1 = \frac{-0{,}005\ kg\ m^2 \cdot 41{,}89\ s^{-1}}{\Delta t} = -\frac{0{,}209\ \frac{kg\,m^2}{s}}{\Delta t}$

Drehmoment an Scheibe 2: $M_2 = J_2\ \alpha_2 = \frac{0{,}010\ kg\ m^2 \cdot 20{,}94\ s^{-1}}{\Delta t} = +\frac{0{,}209\ kg\ \frac{m^2}{s}}{\Delta t}$

Kuppelungsdauer: $\Delta t = \frac{0{,}209\ kg\ m^2\ s^{-1}}{\left|M\right|} = \frac{0{,}209\ kg\ m^2\ s^{-1}}{0{,}209\ kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ s$