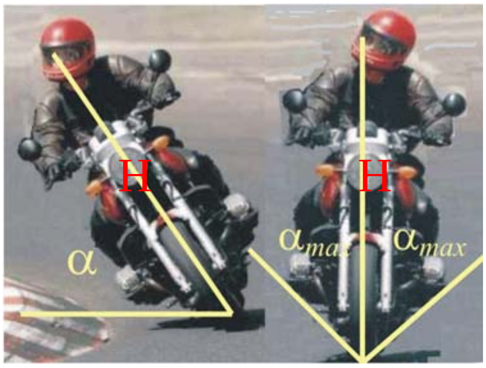
Fachhochschule Hannover | Klausur M1A | 29.06.05
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im SS 2005 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Motorräder fahren Kurven mit Schräglage (charakterisiert durch den Winkel α im Bild rechts), so dass die Resultierende aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft parallel zur Hochachse (**H**) verläuft. Bauartbedingt kann im Beispiel die Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ nicht überschritten werden.

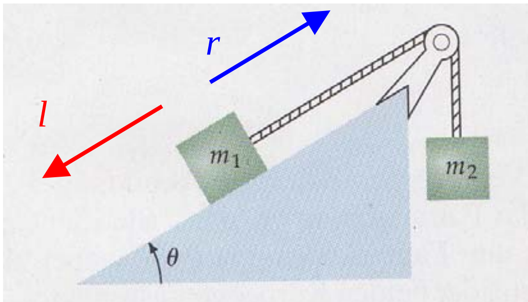


a. Betrachten Sie eine gleichmäßig beschleunigte Motorradfahrt auf einer Kreisstrecke mit Radius $R = 62{,}5\ m$. In Abständen von 10 m und 20 m nach dem Start passiert das Motorrad Lichtschranken. Die Messung der Zeitdifferenz ergibt 2,0 s. Wie groß ist die Bahnbeschleunigung?

b. Nach welcher Fahrtstrecke auf dem Kreis wird die maximale Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ erreicht?

c. Welche Gesamtbeschleunigung a_{ges} hat das Motorrad in diesem Punkt?

2. Die Massen m_1 und m_2 sind in der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine (voll-) zylinderförmige Umlenkrolle mit $m_R = 1$ kg umgelenkt wird. Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\theta = 30°$, die Haftreibungszahl $\mu_{H,\max} = 0{,}25$ und die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}20$.



a. Die Masse 2 sei $m_2 = 1\ kg$. In welchem Wertebereich muss m_1 liegen, damit das System weder nach links (l) noch nach rechts (r) gleitet? (gesucht: $m_1^{\min}$ für r und $m_1^{\max}$ für l!)

b. Berechnen Sie die Beschleunigung a_l wenn $m_1 \cong m_1^{\max}$ und das System nach links gleitet.

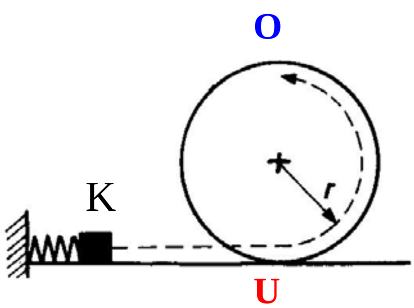
c. Berechnen Sie die Beschleunigung a_r wenn $m_1 \cong m_1^{\min}$ und das System nach rechts gleitet.

d. Wie groß ist die Seilkraft im Haftreibungsfall?

e. Wie groß sind die Seilkräfte links und rechts der Umlenkrolle (F_S^{links} und F_S^{rechts}) im Gleitreibungsfall, wenn das System nach rechts gleitet? (entspricht Aufgabe **2c**).

f. Die Gesamtenergie in der gezeigten Ausgangslage sei Null. Berechnen Sie für die Gleitbewegung nach rechts (Aufgabe **2c**) die kinetische und potentielle Energie in dem Punkt, in dem m_2 um $s_2 = 1m$ gefallen ist und zeigen Sie die Gültigkeit des Energieerhaltungssatz.

3. Ein Körper (K) mit der Masse 50 g soll mit einer Feder (Federkonstante: D = 1500 N/m) in eine Schleifenbahn (Loopingbahn) mit Radius $r = 0{,}4\ m$ geschossen werden.



a. Betrachten Sie zunächst den Körper als Massenpunkt ($r_K = 0$), der die Bahn reibungsfrei durchläuft. Wie stark muss die Feder gespannt werden (Federweg?), damit er die Loopingbahn ohne im oberen Punkt (**O**) zu fallen durchlaufen kann?

b. Wie groß ist die Normalkraft im unteren Punkt (**U**) der Bahn?

c. Betrachten Sie jetzt eine Kugel gleicher Masse mit Radius $r_K = 2\ cm$. Wie stark muss die Feder in diesem Fall gespannt werden, damit die Kugel die Loopingbahn durchläuft ohne herab zu fallen?

d. Wie groß sind E_{pot}, E_{kin}^{trans} und E_{kin}^{rot} für die Kugel im oberen Punkt (**O**)?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. **Achtung:** Die Lösung für Aufgabe 1 wurde am 16.01.2005 überarbeitet. Die frühere Lösungsversion war in Bezug auf die Formulierung in der Aufgabenstellung nicht korrekt.

Gleichmäßige Beschleunigung: $s(t) = \frac{1}{2} a_B t^2 + s_0$

Erster Messpunkt: $s_1 = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + s_0$

Für $s_2 = 20\,m$ gilt: $s_2 = \frac{1}{2} a_B t_2^2 + s_0$ mit $t_2 = t_1 + \Delta t$ und $\Delta t = 2\,s$

Einsetzen: $s_2 = \frac{1}{2} a_B (t_1 + \Delta t)^2 + s_0 = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B \Delta t^2 + s_0$

Für $s_2 - s_1$ gilt: $s_2 - s_1 = a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B \Delta t^2$

Es gilt: $t_1 = \sqrt{\frac{2(s_1 - s_0)}{a_B}}$

Einsetzen: $s_2 - s_1 = a_B \sqrt{\frac{2(s_1 - s_0)}{a_B}} \Delta t + \frac{1}{2} a_B \Delta t^2$

$$(s_2 - s_1) - \frac{1}{2} a_B \Delta t^2 = \sqrt{2(s_1 - s_0) a_B}\, \Delta t$$

$$(s_2 - s_1)^2 - (s_2 - s_1) a_B \Delta t^2 + a_B^2 \frac{\Delta t^4}{4} = 2(s_1 - s_0) a_B \Delta t^2$$

In vorliegenden Fall ist: $s_2 - s_1 = s_1 - s_0 = \Delta s = 10\,m$

$$\Delta s^2 - \Delta s\, a_B \Delta t^2 + a_B^2 \frac{\Delta t^4}{4} = 2 \Delta s\, a_B \Delta t^2$$

$$\Delta s^2 + a_B^2 \frac{\Delta t^4}{4} = 3 \Delta s\, a_B \Delta t^2$$

$$\frac{4 \Delta s^2}{\Delta t^4} + a_B^2 = 12 \cdot a_B \frac{\Delta s}{\Delta t^2}$$

$$a_B^2 - 2 \cdot 6 \cdot a_B \frac{\Delta s}{\Delta t^2} = -4 \frac{\Delta s^2}{\Delta t^4}$$

$$a_B^2 - 2 \cdot 6 \cdot a_B \frac{\Delta s}{\Delta t^2} + 6^2 \frac{\Delta s^2}{\Delta t^4} = 36 \frac{\Delta s^2}{\Delta t^4} - 4 \frac{\Delta s^2}{\Delta t^4} = 32 \frac{\Delta s^2}{\Delta t^4}$$

$$a_B = \left(\pm\sqrt{32} + 6\right) \frac{\Delta s}{\Delta t^2}$$

Lösung: $a_B = 0{,}343145 \frac{\Delta s}{\Delta t^2} = 0{,}85786\, m\, s^{-2}$

weil: $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0{,}85786}}\, s = 4{,}8284\, s$

und: $s_2 = s(t_1 + \Delta t) = s(6{,}82843\, s)$

$$s_2 = \frac{1}{2} 0{,}85786 \frac{m}{s^2} \cdot (6{,}82843\, s)^2 = 20\, m$$

1b. Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ ist die Zentrifugalkraft gleich der Gewichtskraft.

Es gilt: $F_{zf} = m\dfrac{v_{\max}^2}{R} = m\,g = F_g$

Es folgt: $v_{\max} = \sqrt{R\,g} = \sqrt{62{,}5\,m \cdot 10\,m\,s^{-2}} = 25\,m\,s^{-1}$

Zeit zum Erreichen von $v_{\max}$: $t_{\max} = \dfrac{v_{\max}}{a_B} = \dfrac{25\,m\,s^{-1}}{0{,}85786\,m\,s^{-2}} = 29.142\,s$

Fahrtstrecke: $s_{\max} = \dfrac{1}{2} a_B\, t_{\max}^2 = \dfrac{1}{2}\, 0{,}85786\,m\,s^{-2}\left(29{,}142\,s\right)^2 = 364{,}3\,m$

1c. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2}$

Radialbeschleunigung = Zentripetalbeschleunigung = - Zentrifugalbeschleunigung

Zentrifugalbeschleunigung: $\left|a_R\right| = \left|a_{zf}\right| = \dfrac{v_{\max}^2}{R} = 10\,m\,s^{-2}$

Gesamtbescheunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2} = \sqrt{0{,}85786^2 + 10^2}\;\; m\,s^{-1} = 10{,}04\,m\,s^{-2}$

2a. Bedingung für den Haftreibungsfall in Bezug auf eine Bewegung nach rechts:

$$m_2\, g \le m_1\, g \cdot \sin\theta + \mu_{H,\max}\, m_1\, g \cdot \cos\theta$$

$$m_1 \ge m_1^{\min} = \frac{m_2}{\sin\theta + \mu_{H,\max} \cos\theta}$$

$$m_1 \ge m_1^{\min} = \frac{1\,kg}{0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}866} = 1{,}396\,kg$$

Bedingung für den Haftreibungsfall in Bezug auf eine Bewegung nach links:

$$m_2\, g \ge m_1\, g \sin\theta - \mu_{H.\max}\, m_1\, g \cdot \cos\theta$$

$$m_1 \le m_1^{\max} = \frac{m_2}{\sin\theta - \mu_{H,\max} \cos\theta}$$

$$m_1 \le m_1^{\max} = \frac{1\,kg}{0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}866} = 3{,}527\;kg$$

<u>Lösung</u>: Haftbedingung für: $1{,}396\,kg \le m_1 \le 3{,}527\,kg$

Gleiten nach rechts: $m_1 < 1{,}396\,kg$

Gleiten nach links: $m_1 > 3{,}527\,kg$

2b. Beschleunigung beim Gleiten nach links, wenn $m_1 \cong m_1^{\max} = 3{,}527\,kg$:

Beschleunigung verursachende Kraft: $F_t^1 = m_1\, g \cdot \sin\theta = 17{,}64\,N$

Bilanz der Kräfte: $F_t^1 = F_R^1 + F_{Tr}^1 + \dfrac{M_R}{R} + F_{Tr}^2 + F_g^2$

Es gilt für die Rolle: $\dfrac{M_R}{R} = \dfrac{J\,\alpha}{R} = \dfrac{J\,a}{R^2} = \dfrac{0{,}5\,m_R\,R^2\,a}{R^2} = 0{,}5\,m_R\,a$

Es folgt: $F_t^1 = \mu_G\, m_1\, g \cos\theta + \left(m_1 + 0{,}5 m_R + m_2\right) a + m_2\, g$

Lösung: $a = \dfrac{m_1\left(\sin\theta - \mu_G \cos\theta\right) - m_2}{m_1 + 0{,}5\,m_R + m_2} \cdot g$

$$a = \frac{3,527 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,866) - 1}{3,527 + 0,5 + 1} \cdot g = 0,0304 \cdot g$$

$$a = 0,0304 \cdot g = 0,304\, ms^{-2}$$

2c. Beschleunigung beim Gleiten nach rechts, wenn $m_1 \cong m_1^{\max} = 1,396\, kg$:

Beschleunigung verursachende Kraft: $F_g^2 = m_2\, g = 10\, N$

Bilanz der Kräfte: $F_g^2 = F_{Tr}^2 + \frac{M_R}{R} + F_{Tr}^1 + F_t^1 + F_R^1$

Es folgt: $F_g^2 = (m_2 + 0,5\, m_R + m_1)\, a + m_1\, g \cdot \sin\theta + \mu_G\, m_1\, g \cos\theta$

Lösung: $a = \frac{m_2 - m_1 (\sin\theta + \mu_G \cos\theta)}{m_1 + 0,5\, m_R + m_2} \cdot g$

$$a = \frac{1 - 1,396 (0,5 + 0,2 \cdot 0,866)}{1,396 + 0,5 + 1} \cdot g = 0,0209\, g$$

$$a = 0,0209\, g = 0,209\, ms^{-2}$$

2d. Die Seilkraft tritt im <u>Haftreibungsfall</u>, wenn $m_1 = 3,527\, kg$, beträgt:

Seilkraft rechts: $F_S^{rechts} = m_2\, g = 10\, N$

<u>Kontrolle:</u> Seilkraft links: $F_S^{links} = m_1\, g \cdot (\sin\theta - \mu_{H,\max} \cdot \cos\theta)$

$$F_S^{links} = (35,27 \cdot (0,5 - 0,25 \cdot 0,866))\, N$$

$$F_S^{links} = 10 N$$

<u>Zum Verständnis</u>: Die Seilkraft tritt im <u>Haftreibungsfall</u>, wenn $m_1 = 1,396\, kg$, beträgt:

Seilkraft nach rechts: $F_S^{rechts} = m_2\, g = 10\, N$

<u>Kontrolle:</u> Seilkraft nach links: $F_S^{links} = m_1\, g \cdot (\sin\theta + \mu_{H,\max} \cdot \cos\theta)$

$$F_S^{links} = (13,96 \cdot (0,5 + 0,25 \cdot 0,866))\, N$$

$$F_S^{links} = 10 N$$

2e. Seilkräfte rechts und links der Rolle im Gleitreibungsfall:

Seilkraft rechts: $F_S^{rechts} = m_2\, g - m_2 a = 10\, N - 0,209\, N = 9,791\, N$

Seilkraft links: $F_S^{links} = F_t^1 + F_{Tr}^1 + F_R^1 = m_1\, g \cdot (\sin\theta + \mu_G \cos\theta) + m_1 a$

$$F_S^{links} = 13,96 N \cdot (0,5 + 0,2 \cdot 0,866) + 1,396 \cdot 0,21 N$$

$$F_S^{links} = 9,398 N + 0,291\, N = 9,689 N$$

<u>Kontrolle:</u> $F_S^{rechts} - F_S^{links} = \frac{M_R}{R} = \frac{J\,\alpha}{R} = \frac{J\, a}{R^2} = 0,5\, m_R\, a$

$$F_S^{rechts} - F_S^{links} = 0,102 N \cong 0,5 \cdot 1 \cdot 0,21 N = 0,104 N = \frac{M_R}{R}$$

2f. Ausgangsposition: $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = 0$ Gesamtenergie gleich Null

In der Endposition, dann wenn die Masse m_2 um $s_2 = 1\, m$ gefallen ist, hat die potentielle Energie abgenommen, die kinetische Energie in Form von Translations- und Rotationsenergie zugenommen und ein Teil der Energie wurde in Reibungsarbeit umgewandelt.

Kinetische Energie Translation: $E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$

Gleichmäßig beschleunigte Bew:. $v = a\,t$ und $s = \frac{1}{2}a\,t^2$

Es folgt: $v = a \cdot \sqrt{\frac{2\,s}{a}} = \sqrt{2\,s\,a} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0,209}\ m\,s^{-1} = 0,646\,m\,s^{-1}$

$$E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(2\,s\,a) = (0,5 \cdot 2,396 \cdot 0,417)\,J$$

$$E_{kin}^{trans} = (0,5 \cdot 2,396 \cdot 0,417)\,J = 0,500\,J$$

Kinetische Energie Rotation: $E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_R\,R^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4}m_R\,(2sa)$

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{4}m_R\,(2sa) = (0,25 \cdot 1 \cdot 0,417)\,J = 0,104\,J$$

Potentielle Energie von m_1 nimmt zu: $E_{pot}^{1} = +m_1\,g\,h = +m_1\,g\,s_2 \cdot \sin\theta = 6.980\,J$

Potentielle Energie von m_2 nimmt ab: $E_{pot}^{2} = -m_2\,g\,h = -10,000\,J$

Gesamte potentielle Energie: $E_{pot}^{ges} = E_{pot}^{1} + E_{pot}^{2} = 6,980\,J - 10,000\,J = -3,020\,J$

Reibungsarbeit: $W_R = \mu_G \cdot m_1\,g \cdot \cos\theta \cdot s_2 = 2,418\,J$

Gesamtenergie: $E_{ges} = \left(E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot}\right) + E_{pot}^{ges} + W_R$

$$E_{ges} = (0,500\,J + 0,104\,J) - 3,020\,J + 2,418\,J \cong 0\,J$$

Die Gesamtenergie im Anfangszustand und die Gesamtenergie plus geleisteter Reibungsarbeit im Endzustand sind gleich: Energieerhaltung.

3a. **Bemerkung zur Geometrie:** Um die Formeln möglichst übersichtlich zu halten, soll mit Radius *r*, so wie in der Zeichnung angedeutet, der Abstand vom Zentrum des Loopings bis zu Massenpunkt bezeichnet werden. (Der Massenpunkt läuft also entlang der gestrichelten Bahn.)

Kräfte im oberen Punkt (**O**) der Schleifenbahn:

Gewichtskraft radial zum Zentrum $F_g = m\,g$ (1)

Zentrifugalkraft radial nach außen: $F_{zf} = m\frac{v_O^2}{r}$ (2)

Bedingung: (2) $\geq$ (1) $F_{zf} \geq F_g$

Es folgt: $v_O^2 \geq g\,r$

Nach dem Energieerhaltungssatz wird die Spannarbeit der Feder in kinetische und potentielle Energie umgesetzt.

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}D\,x_0^2 = \frac{1}{2}m\,v_O^2 + m\,g\,h$

Mit $v_O^2 \geq g\,r$ und $h = 2\,r$: $\frac{1}{2}D\,x_0^2 \geq \frac{1}{2}m\,g\,r + m\,g\,2\,r$

Lösung: $x_0 \geq \sqrt{\frac{5\,m\,g\,r}{D}}$

$$x_0 \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 0,050 \cdot 10 \cdot 0,4}{1500}} = 0,0258\,m = 2,58\,cm$$

3b. Kräfte im unteren Punkt (**U**) der Schleifenbahn:

Gewichtskraft radial nach außen: $F_g = m\,g$ (3)

Zentrifugalkraft radial nach außen: $F_{zf} = m\dfrac{v_U^2}{r}$ (4)

Normalkraft: $F_N = F_G + F_Z$

Die potentielle Energie im unteren Punkt der Schleifenbahn ist gleich Null. Die Spannarbeit der Feder wird komplett in kinetische Energie umgewandelt.

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}D\,x_0^2 = \frac{1}{2}m\,v_U^2$

Es folgt: $v_U^2 = \frac{D}{m}x_0^2$

Normalkraft: $F_N = m\,g + \frac{D\,x_0^2}{r} = m\,g + \frac{D}{r}\frac{5\,m\,g\,r}{D} = 6\,m\,g$

$$F_N = 6\,m\,g = (6\cdot 0{,}05\cdot 10)\,N = 3\,N$$

3c. **Bemerkung zur Geometrie:** Um die Formeln möglichst übersichtlich zu halten, soll mit Radius r, so wie in der Zeichnung angedeutet, der Abstand vom Zentrum des Loopings bis zum Schwerpunkt der Kugel bezeichnet werden. Da die Kugel den Radius r_K besitzt, hat der Looping den Radius $(r + r_K)$ (Der Schwerpunkt läuft wie in Aufgabe **3a** entlang der gestrichelten Bahn.) Die Lösungen wurde am 01.09.2005 entsprechend geändert.

Abschuss einer Kugel:

Bedingung für v_O wie in **3a**.: $v_O^2 \geq g\cdot r$

Der Schwerpunkt wird um $h = 2\,r$ angeben.

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}D\,x_0^2 = \frac{1}{2}m\,v_O^2 + \frac{1}{2}J_K\omega^2 + m\,g\,(2\,r)$

Massenträgheitsmoment der Kugel: $J_K = \frac{2}{5}m\,r_K^2$

Aus der Rollbedingung folgt: $\omega = \frac{v_O}{r_K}$ (Näherung für $r_K << r$)

Es folgt: $\frac{1}{2}D\,x_0^2 = \frac{1}{2}m\,v_o^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\,r_K^2\frac{v_o^2}{r_K^2} + m\,g\,2\,r$

$$D\,x_0^2 = m\,v_o^2 + \frac{2}{5}m\,v_o^2 + 4\,m\,g\,r$$

$$D\,x_0^2 = \frac{7}{5}m\,v_o^2 + 4\,m\,g\,r$$

Es folgt: $x_0 = \sqrt{\dfrac{\frac{7}{5}m\,v_o^2 + 4\,m\,g\,r}{D}}$

Lösung: $x_0 \geq \sqrt{\dfrac{\frac{7}{5}m\,g\,r + 4\,m\,g\,r}{D}} = \sqrt{\dfrac{\frac{27}{5}m\,g\,r}{D}}$

$$x_0 \geq \sqrt{\frac{27\cdot m\,g\,r}{5\cdot D}} = \sqrt{\frac{27\cdot 0{,}05\cdot 10\cdot 0{,}40}{5\cdot 1500}}\;m$$

$x_0 \geq 0,0268\, m = 2,68\, cm$

3d. Auch hier soll wieder die Bahn betrachtet werden, bei der der Kugleschwerpunkt auf einem Kreis mit Radius r verläuft.

Abschuss einer Kugel mit einem Federweg von $x_0 = 2,68\ cm$:

Spannarbeit der Feder: $W_e = \frac{1}{2} D\, x_0^2 = 0,54\, J$

Potentielle Energie: $E_{pot} = m\, g\, 2\, r$

$E_{pot} = \left(0,05 \cdot 10 \cdot 0,8\right) J = 0,4\, J$

Kinetische Energie der Translation: $E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, g\, r$

$E_{kin}^{trans} = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,050 \cdot 10 \cdot 0,4\right) J = 0,1\, J$

Kinetische Energie der Rotation: $E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J\, \omega^2 m = \frac{1}{2} \frac{2}{5} m\, r_K^2 \frac{v_o^2}{r_K^2} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} m\, v_o^2\right) = \frac{2}{5} E_{kin}^{trans}$

$E_{kin}^{rot} = \frac{2}{5} 0,1\, J = 0,04\, J$

<u>Kontrolle:</u> $W_{el} = 0,54\, J$

$E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} + E_{pot} = \left(0,1 + 0,04 + 0,4\right) J$

$E_{ges} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} + E_{pot} = 0,54\, J$