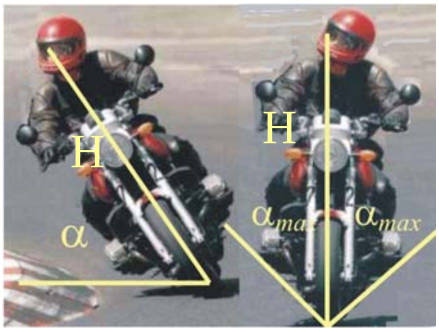
Fachhochschule Hannover | Klausur M1A | 30.09.05
Fachbereich Maschinenbau | | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im SS 2005 | | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Motorräder fahren Kurven mit Schräglage (charakterisiert durch den Winkel α im Bild rechts), so dass die Resultierende aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft parallel zur Hochachse (**H**) verläuft. Bauartbedingt soll im Beispiel eine Schräglage von $\alpha_{\max} = 45°$ nicht überschritten werden können.

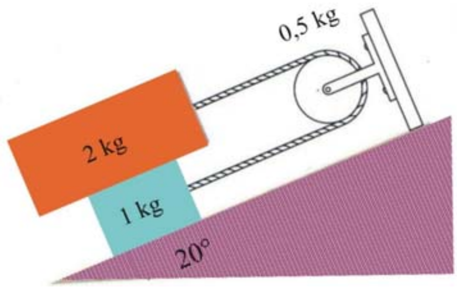


a. Betrachten Sie eine Motorradfahrt mit gleichförmiger Bahngeschwindigkeit $v_B = 36\,km/h$ auf einer Kreisstrecke mit dem Radius $R = 40\,m$. Welche Schräglage hat das Motorrad?

b. Betrachten Sie jetzt eine Fahrt mit gleichmäßiger Bahnbeschleunigung $a_B = 2\,m\,s^{-2}$. Nach welcher Zeit $t_{\max}$ und welcher Fahrtstrecke $s_{\max}$ auf dem Kreis wird (von der Geschwindigkeit Null ausgehend) die maximale Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ erreicht?

c. Welche Gesamtbeschleunigung a_{ges} hat das Motorrad am Ende der in **1b**. beschriebenen beschleunigten Bewegung (gesucht: $a_{ges}(t_{\max})$)?

2. Die Massen $m_o = 2\,kg$ (oben) und $m_u = 1\,kg$ (unten) sind entsprechend der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine Umlenkrolle (Vollzylinder) mit m_R = 0,5 kg umgelenkt wird. Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene betrage $\theta = 20°$.



a. Die Haftreibungszahlen für m_1 und m_2 sollen gleich groß sein. Bestimmen Sie den kleinsten Wert den die Haftreibungszahl $\mu_{H,\max}$ haben kann. (Hinweis: Beim Unterschreiten des gesuchten Wertes würden die Massen nicht mehr haften können, sondern zu gleiten beginnen.)

b. Wie groß sind die Seilkräfte zwischen m_o und der Rolle (F_S^o) und m_u und der Rolle (F_S^u) im Haftreibungsfall?

c. Beim Gleiten soll die Gleitreibungszahl 10% kleiner sein, als die in **2a** bestimmte kleinste Haftreibungszahl. Wie groß ist die Beschleunigung a, mit der die Massen gleiten?

d. Wie groß sind die Seilkräfte F_S^o und F_S^u im Gleitreibungsfall?

3. Eine Rangierlok der Masse 25 t, die einen (nicht angekuppelten) Waggon der Masse 8 t vor sich her schiebt, wird gleichmäßig beschleunigt. Sie soll in 5 s aus dem Stand heraus eine Endgeschwindigkeit von 6 m/s erreichen. Dabei ist ständig eine Reibungskraft von 10 kN vorhanden.

a. Wie groß ist die maximale und wie groß die mittlere Leistung, die die Lok aufbringen muss?

Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit bremst die Lok, der geschobene Waggon löst sich und rollt mit dieser Geschwindigkeit weiter. Nach einer reibungsfreien Fahrt stößt er auf drei stehende, aneinander gekuppelte gleiche Waggons mit jeweils 10 t Masse und kuppelt automatisch an diese an.

b. Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit rollen die vier Waggons weiter?

c. Wie groß ist der relative Energieumsatz in der Kupplung? (Hinweis: Gesucht ist der Energieverlust Q beim Stoß geteilt durch die kinetische Energie E_{kin}^0 des stoßenden Waggons.)

d. Welche Kraft muss die Kupplung aufbringen, wenn die Ankupplungszeit circa 0,8s beträgt?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Gewichtskraft: $F_g = m\,g$

Zentrifugalkraft $F_{Zf} = m\dfrac{v^2}{R}$

F_g und F_{Zf} stehen senkrecht aufeinander. Die Resultierende von F_g und F_{Zf} verläuft parallel zur Hochachse des Motorrades.

Es gilt:
$$\tan\alpha = \frac{F_g}{F_{Zf}} = \frac{m\,g}{m\,v^2/R} = \frac{R\,g}{v^2} = \frac{40\,m\cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{100\,\frac{m^2}{s^2}} = 4$$

$$\alpha = \arctan\frac{R\,g}{v^2} = 76°$$

1b. Für die maximale Schräglage gilt: $\tan 45° = \dfrac{R\,g}{v_{\max}^2} = 1$

Maximalgeschwindigkeit: $v_{\max} = \sqrt{R\,g} = \sqrt{40\cdot 10}\,\dfrac{m}{s} = 20\,\dfrac{m}{s} = 72\,\dfrac{km}{h}$

Gleichmäßig beschleunigte Bew.: $v_{\max} = a_B\,t_{\max}$

für $a_B = 2\,m\,s^2$ $\qquad t_{\max} = \dfrac{v_{\max}}{a_B} = \dfrac{20\,m\,s^{-1}}{2\,m\,s^{-2}} = 10\,s$

$$s_{\max} = \frac{1}{2}a_B\,t_{\max}^2 = \frac{1}{2}a_B\frac{v_{\max}^2}{a_B^2} = \frac{v_{\max}^2}{2\,a_B} = 100\,m$$

1c. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2}$

Radialbeschleunigung = Zentripetalbeschleunigung = - Zentrifugalbeschleunigung

Zentrifugalbeschleunigung: $|a_R| = |a_{zf}| = \dfrac{v_{\max}^2}{R} = 10\,m\,s^{-2}$

Gesamtbescheunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_B^2 + a_R^2} = \sqrt{2^2 + 10^2}\;\,m\,s^{-1} = 10{,}2\,m\,s^{-2}$

2a. Die Masse m_o ist größer als die Masse m_u.. Ohne Haftreibungskräfte würde sich m_o also abwärts und m_u aufwärts bewegen. Mit Haftreibungskräften muss deshalb gelten:

$F_t^o \le F_{H,\max}^o + F_s^o$, wobei

F_t^o = Hangabtriebskraft oben: $F_t^o = m_o g \sin\theta = 20N\cdot\sin 20° = 6{,}84\,N$

$F_{H,\max}^o$ = Haftreibungskraft oben: $F_{H,\max}^o = \mu_{H,\max}\,F_N^o = \mu_{H,\max}\,20N\cos 20° = \mu_{H,\max}\,18{,}8N$

und F_S^o = Seilkraft oben bedeutet.

Im statischen Fall gilt: $F_S^o = F_S^u$

F_S^u = Seilkraft unten: $F_S^u = F_t^u + F_{H,\max}^u$

F_t^u = Hangabtriebskraft unten: $F_t^u = m_u g \sin\theta = 10N\cdot\sin 20° = 3{,}42\,N$

$F_{H,\max}^u$ = Haftreibungskraft unten: $F_{H,\max}^u = \mu_{H,\max}\,F_N^u$

Es gilt: $F_N^u = (m_o + m_u)\,g = 30\,N$

Es folgt: $F_{H,\max}^u = \mu_{H,\max}\,F_N^u = \mu_{H,\max}\,30N\cos 20° = \mu_{H,\max}\,28{,}2N$

Bedingung für $\mu_{H,\max}$: $F_t^o \le F_{H,\max}^o + F_{H,\max}^u + F_t^u$

$$m_o\, g \sin\theta \le \mu_{H,\max} \left(m_o + m_o + m_u\right) g \cos\theta + m_u g \sin\theta$$

$$\mu_{H,\max} \ge \frac{m_o - m_u}{2\, m_o + m_u} \tan\theta = \frac{1}{5} \tan 20° = 0{,}0728$$

2b. Im statischen Fall sind die Seilkräfte oben und unten gleich:

Es gilt: $F_S^o = F_t^o - F_{H,\max}^o = 6{,}84\, N - 0{,}0728 \cdot 18{,}8 N$

$$F_S^o = F_t^o - F_{H,\max}^o = \left(6{,}84 - 1{,}37\right) N = 5{,}47\, N$$

<u>Probe:</u> $F_S^u = F_t^u + F_{H,\max}^u = 3{,}42\, N + 0{,}0728 \cdot 28{,}2 N = 5{,}47\, N$

2c. Betrachte die obere Masse m_o und verwende das D'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_i F_i^o - m_o\, a = 0$$

Summe der Kräfte oben: $\sum_i F_i^o = F_t^o - F_S^o = m_o\, g \cdot \sin\theta - F_S^o - F_R^o$

Reibungskraft oben: $F_R^o = \mu_G\, F_N^o = \mu_G\, m_o\, g \cos\theta$

Mit: $\mu_G = \mu_{H,\max} - 0{,}1 \cdot \mu_{H,\max} = 0{,}9 \cdot 0{,}0728 = 0{,}0655$

(Genauer: $\mu_G = 0{,}065515$)

Es gilt für F_S^o: $F_S^o = \frac{M_R}{r} + F_S^u$

Drehmoment der Rolle M_R: $M_R = J_R\, \alpha = \frac{1}{2} m_R r^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2} m_R r\, a$

Seilkraft F_S^u: $F_S^u = F_t^u + F_{Tr}^u + F_R^u = m_u g \cdot \sin\theta + m_u\, a + \mu_G\, F_N^u$

Einsetzen: $m_o\, g \cdot \sin\theta - \frac{1}{2} m_R\, a - m_u\, g \cdot \sin\theta - m_u a - \mu_G \left(F_N^o + F_N^u\right) - m_u a = 0$

Lösung: $a = g \cdot \frac{\left(m_o - m_u\right) \sin\theta - \mu_G \left(2m_o + m_u\right) \cos\theta}{m_o + m_u + \frac{1}{2} m_R}$

$$a = g \cdot \frac{\left(2-1\right) \sin 20° - \mu_G \left(4+1\right) \cos 20°}{2 + 1 + \frac{1}{2} 0{,}5}$$

$$a = g \cdot \frac{\sin 20° - 0{,}328 \cos 20°}{3{,}25} = 0{,}0105232 \cdot g$$

$$a = 0{,}105 \frac{m}{s^2}$$

(Genauer: $a = 0{,}105232 \frac{m}{s^2}$)

3d. Im Gleitreibungsfall gilt: $F_S^o > F_S^u$

Seilkraft oben F_S^o: $F_S^o = F_t^o - F_{Tr}^o - F_R^o$

$$F_S^o = (6{,}840 - 0{,}210 - 1{,}231)\, N = 5{,}399\, N$$

(Genauer Wert: $F_S^o = 5{,}398660\, N$)

Seilkraft unten F_S^u: $F_S^u = F_t^u + F_{Tr}^u + F_R^u$

$$F_S^u = \left(3{,}420 + 0{,}105 + 1{,}846\right) N = 5{,}371 N$$

(Genauer Wert: $F_S^u = 5{,}372352\, N$)

Die Differenz von $F_S^o - F_S^u = 0,026308\,N$ dient zur Erzeugung des Drehmoments an der Umlenkrolle.

Probe: $F_M = \frac{M_R}{r} = \frac{1}{2} m_R\, a = \left(0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,105232\right) N$

$F_M = 0,026308\,N$

3a. Masse der Lok: $m_L = 25\,t$

Masse des Waggons: $m_W = 8\,t$

Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\,m\,s^{-1} - 0}{5\,s - 0} = 1,2\,m\,s^{-2}$

Beschleunigungskraft: $F_a = m_{ges}\; a = \left(m_L + m_W\right) a = 33000 \cdot 1,2\; N = 39,6\;kN$

Reibungskraft: $F_R = 10\;kN$

Gesamtkraft: $F_{ges} = F_a + F_R = 49,6\;kN$

Maximale Leistung: $P_{\max} = F_{ges}\; v_{\max} = 49,6 \cdot 6 = 297,6\;kW$

Mittlere Leistung: $P_{mittel} = F_{ges}\; v_{mittel} = 49,6 \cdot 3 = 148,8\;kW$

3b. Waggon Nr. 1 vor dem Stoß: $v_1 = 6\,m\,s^{-1}$

Waggon Nr. 2,3,4 vor dem Stoß: $v_i = 0,\;\; für\; i = 2,3,4$

Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right) u$

Geschwindigkeit nach dem Stoß: $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} v_1 = \frac{8}{8 + 10 + 10 + 10} v_1 = \frac{8}{38} v_1$

$u = 1,263\;m\;s^{-1}$

3.c Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{2} m_i\, u^2\right) + Q = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right) u^2 + Q$

Energieumsatz in der Kupplung: $Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right) u^2$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right) m_1^2 v_1^2}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)^2} = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\right) E_{kin}^1$$

$$Q = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\right) E_{kin}^1 = 0,789 \cdot 144\,kJ = 113,6\,kJ$$

Relativer Energieumsatz: $\frac{Q}{E_{kin}^1} = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{8}{38} = 21,1\%$

3d. Kraft = Impulsänderung: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{End} - p_{Anf}}{\Delta t}$

Für Waggon Nr. 1: $F_1 = \frac{m_1\, u - m_1\, v_1}{\Delta t} = \frac{m_1\left(u - v_1\right)}{\Delta t}$

$$F_1 = \frac{8000\left(1,263-6\right)}{0,8} N = -47,37\, kN$$

Für Waggon Nr.2,3,4: $$F_{234} = \frac{\left(m_2 + m_3 + m_4\right) u - 0}{\Delta t} = \frac{\left(m_2 + m_3 + m_4\right) u}{\Delta t}$$

$$F_{234} = \frac{30000 \cdot 1,263}{0,8} = +47,36\, kN$$

Man sieht auch in diesem Fall gilt: Actio = Reactio.