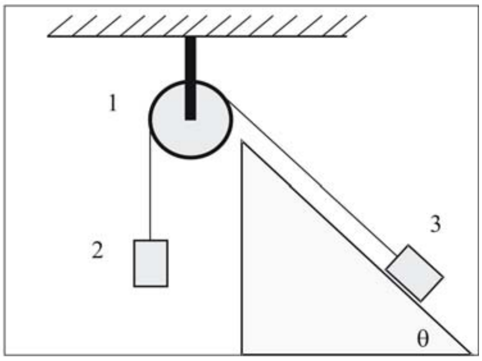
Fachhochschule Hannover | M1B/M1C | 17.01.06
Fachbereich Maschinenbau | | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 2005/06 | | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. In einem Baustellenbereich fahren zwei PKW mit gleicher Geschwindigkeit $v_0 = 80\, km\, h^{-1}$ im Abstand von 60m hintereinander (Nr. 1 fährt voraus, Nr. 2 folgt). Am Ende der Geschwindigkeitsbegrenzung beginnen beide PKW gleichmäßig zu beschleunigen: Fahrzeug (2) mit $a_2 = 1\, m\, s^{-2}$, Fahrzeug (1) mit 80% der Beschleunigung a_2.

Setzen Sie den Zeitpunkt $t_{01} = 0$, wenn Fahrzeug (1) das Ende der Geschwindigkeitsbegrenzung passiert.

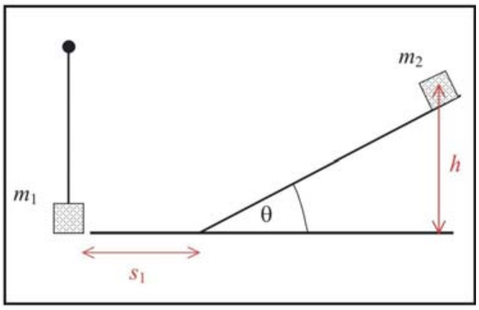
a. Zeichnen Sie das *a*-*t*-, das *v*-*t*- und das *s*-t-Diagramm für die beiden Fahrzeuge.
b. In welcher Entfernung vom Ende der Baustelle erreicht Fahrzeug (2) das Fahrzeug (1)?
c. Welche Geschwindigkeit haben die beiden Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt?
d. Zu welchem Zeitpunkt (bzgl. t_{01}) besitzen beide Fahrzeug gleiche Geschwindigkeit?

2. Ein Seil (Masse vernachlässigbar) wird mit einer Umlenkrolle (1) (homogener Zylinder, Radius $R_1 = 0{,}1\, m$) umgelenkt. An einem Ende hängt die Masse (2), das andere ist mit einer Masse auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel $\theta = 45°$ verbunden. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0{,}3$. Die Massen sind gleich: $m_1 = m_2 = m_3 = 1\, kg$.



a. Welche Drehrichtung hat die Umlenkrolle (1)?
b. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung ?
c. Wie groß ist die Beschleunigung der Massen (2) und (3).
d. Wie groß sind die Seilkräfte links (F_l) und rechts (F_r) der Umlenkrolle?

3. Die Masse $m_2 = 2\, kg$ gleitet aus der Höhe $h = 1\, m$ eine Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta = 40°$ hinab und rutscht dann horizontal auf einer Strecke von $s_1 = 0{,}5\, m$. Am Ende stößt sie auf ein Pendel der Masse $m_1 = 1\, kg$. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0{,}25$. Berechnen Sie, wie hoch das Pendel mit der Masse m_1 ausschwingt (Pendelstange kann vernachlässigt werden), für folgende Bedingungen:



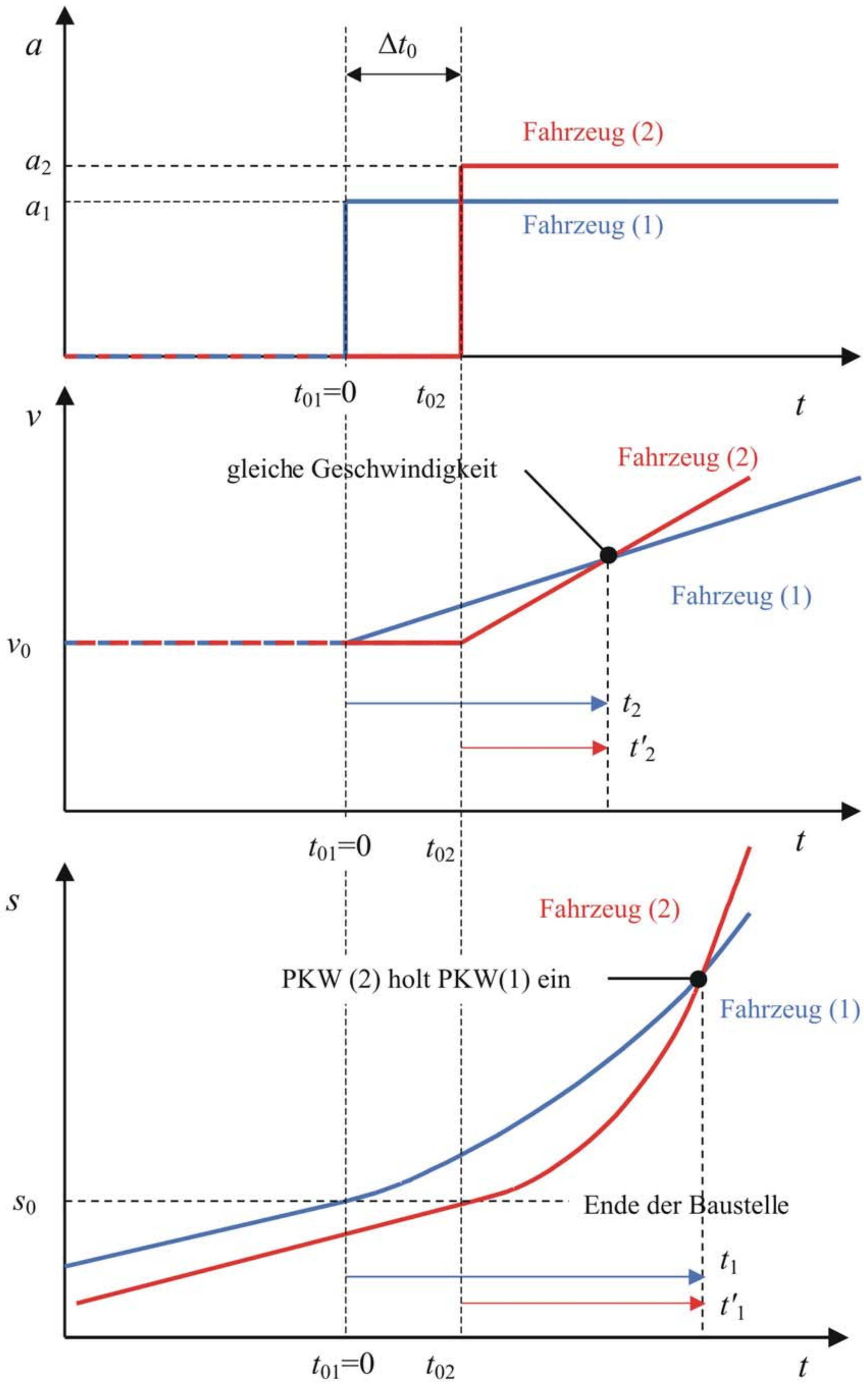
a. Einen (vollkommen) **elastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1.
b. Einen **vollkommen unelastischen Stoß**.

4. Zwei Schwungräder in Form homogener Vollzylindern mit $m_1 = 0{,}5\, kg$ und $m_2 = 1{,}5\, kg$ und Radien $R_1 = R_2 = 15\, cm$ haben die Drehzahlen $n_1 = 1800\, \min^{-1}$ und $n_2 = 900\, \min^{-1}$. Die beiden Schwungräder werden gekuppelt. Der Vorgang dauert $\Delta T = 0{,}6\, s$.

a. Welche gemeinsame Drehfrequenz haben die Schwungräder nach dem Kuppeln?
b. Bestimmen Sie die Änderung des Drehimpulses vor und nach dem Kupplungsvorgang getrennt für beide Schwungräder.
c. Welches Drehmoment hat beim Kupplungsvorgang gewirkt?
d. Welche Energien hatten die Schwungräder vor, welche Energie haben sie nach der Kupplung?. Gilt der Energieerhaltungssatz?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:
1a.



a
Δt0
Fahrzeug (2)
a2
a1
Fahrzeug (1)
t01=0
t02
t
v
gleiche Geschwindigkeit
Fahrzeug (2)
Fahrzeug (1)
v0
t2
t'2
t01=0
t02
t
s
Fahrzeug (2)
PKW (2) holt PKW(1) ein
Fahrzeug (1)
s0
Ende der Baustelle
t1
t'1
t01=0
t02
t

1b. Die Bezeichnung des Wegpunktes am Ende der Baustelle sei s_0.

PKW (1) ist zur Zeit t_{01} bei s_0**:** $\quad s_1(t_{01}) = s_0$

PKW (2) ist zur Zeit t_{02} bei s_0**:** $\quad s_2(t_{02}) = s_0$

Der Abstand der beiden PKW vor dem Ende der Baustelle ist $\Delta s_0 = 60\,m$. Dies entspricht dem zeitlichen Abstand von: $\quad \Delta t_0 = t_{02} - t_{01}$,

und es gilt: $\quad v_0 = \dfrac{\Delta s_0}{\Delta t_0} = \dfrac{\Delta s_0}{t_{02} - t_{01}}$

Die Zeitdifferenz Δt_0 ist: $\quad \Delta t_0 = \dfrac{\Delta s_0}{v_0} = \dfrac{60\,m \cdot 3{,}6\,s}{80\,m} = 2{,}7\,s$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (1): $\quad s_1(t) = \dfrac{1}{2} a_1 (t - t_{01})^2 + v_0 (t - t_{01}) + s_0$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (2): $\quad s_2(t) = \dfrac{1}{2} a_2 (t - t_{02})^2 + v_0 (t - t_{02}) + s_0$

Wenn PKW (2) den PKW (1) bei t_1 erreicht, gilt: $\quad s_1(t_1) = s_2(t_1)$

$$\frac{1}{2} a_1 (t_1 - t_{01})^2 + v_0 (t_1 - t_{01}) = \frac{1}{2} a_2 (t_1 - t_{02})^2 + v_0 (t_1 - t_{02})$$

Wähle zur Vereinfachung: $\quad t_{01} = 0$ für $s_0 = 0$, dann gilt: $t_{02} = \Delta t_0$

sowie: $\quad a_1 = \chi \cdot a_2 = 0{,}8 \cdot a_2$

Es folgt: $\quad \chi a_2 t_1^2 + 2 v_0 t_1 = a_2 (t_1 - \Delta t_0)^2 + 2 v_0 (t_1 - \Delta t_0)$

$$\chi a_2 t_1^2 = a_2 \left(t_1^2 - 2\,\Delta t_0 t_1 + (\Delta t_0)^2\right) - 2 v_0\,\Delta t_0$$

$$a_2 (1 - \chi) t_1^2 - 2 a_2 \Delta t_0 t_1 = 2 v_0\,\Delta t_0 - a_2 (\Delta t_0)^2$$

Umformung: $$t_1^2 - 2\frac{\Delta t_0}{1-\chi} t_1 + \left(\frac{\Delta t_0}{1-\chi}\right)^2 = \left(\frac{2 v_0}{a_2 \Delta t_0 (1-\chi)} + \left(\frac{1}{1-\chi}\right)^2 - \frac{1}{1-\chi}\right)(\Delta t_0)^2$$

Definiere zur Vereinfachung: $\quad \delta = \dfrac{1}{1-\chi} = \dfrac{1}{1-0{,}8} = 5$

$$(t_1 - \delta\,\Delta t_0)^2 = \left(\frac{2 v_0\,\delta}{a_2\,\Delta t_0} + \delta^2 - \delta\right)\Delta t_0^2$$

$$t_1 = \Delta t_0 \left(\delta \pm \sqrt{\frac{2 v_0\,\delta}{a_2\,\Delta t_0} + \delta^2 - \delta}\right)$$

$$t_1 = 2{,}7\,s \cdot \left(5 \pm \sqrt{82{,}296 + 25 - 5}\right) = 2{,}7\,s \cdot (5 \pm 10{,}114)$$

Positive Lösung: $\quad t_{11} = 40{,}808\,s$

(Negative Lösung: $\quad t_{12} = -13{,}808\,s$ entfällt)

Fahrzeug (1) wird von Fahrzeug (2) nach $t_1 = 40{,}808\,s$ nachdem das Fahrzeug (1) das Ende der Baustelle passiert hat ein. Der zurückgelegte Weg ist:

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_0 t_1$$

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot (40{,}8 s)^2 + 22{,}22 \frac{m}{s} \cdot 40{,}8\,s = 1573\,m$$

Kontrolle: Da Fahrzeug (2) $\Delta t_0 = 2,7\,s$ später als Fahrzeug (1) das Ende der Baustellen erreicht, vergeht die Zeit $t_1' = (40,808 - 2,7)\,s = 38,108\,s$ bis Fahrzeug (2) nach dem Passieren des Endes der Baustelle das Fahrzeug (1) eingeholt hat.

Der zurückgelegte Weg berechnet sich mit Hilfe von t_1':

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2} a_2 (t_1')^2 + v_0\, t_1'$$

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2} 1 \frac{m}{s^2} (38,1)^2 + 22,22 \frac{m}{s} \cdot 38,1\,s = 1573\,m$$

1c. Geschwindigkeit von Fahrzeug (1): $v_1(t) = a_1\, t + v_0$

Geschwindigkeit für $t_1 = 40,8\,s$: $v_1(t_1) = a_1\, t_1 + v_0 = (0,8 \cdot 40,8 + 22,22) \frac{m}{s} = 54,87 \frac{m}{s}$

$$v_1(t_1) = 197,5 \frac{km}{h}$$

Geschwindigkeit von Fahrzeug (2): $v_2(t) = a_2\, t + v_0$

Geschwindigkeit für $t_1' = 38,1\,s$: $v_2(t_1') = a_2\, t_1' + v_0 = (1 \cdot 38,1 + 22,22) \frac{m}{s} = 60,33 \frac{m}{s}$

$$v_2(t_1') = 217,2 \frac{km}{h}$$

1d. Die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge sind gleich, wenn gilt:

$$a_1\, t_2 + v_0 = a_2 (t_2 - \Delta t_0) + v_0$$

$$a_1\, t_2 = a_2\, t_2 - a_2\, \Delta t_0$$

$$t_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} \Delta t_0 = \frac{1}{1 - 0,8} \Delta t_0 = 5\, \Delta t_0 = 13,5\,s$$

$$t_2' = t_2 - \Delta t_0 = 4\, \Delta t_0 = 10,8\,s$$

2a. Betrachtung der statischen Kräfte: Die Seilkraft links von der Umlenkrolle entspricht der Gewichtskraft der Masse (2): $F_{S,links} = m_2\, g$

Die Seilkraft rechts der Umlenkrolle entspricht der Tangentialkomponente der Gewichtskraft der Masse (3): $F_{S,rechts} = m_3\, g \cdot \sin\theta$

Es folgt bei gleichen Massen: $F_{S,links} > F_{S,rechts}$

Die Umlenkrolle wird also nach "links" drehen.

2b. Die Seilkräfte erzeugen Drehmomente an der Umlenkrolle. Da die Differenz der Drehmomente ungleich Null ist, entsteht die Winkelbeschleunigung α_1:

$$\Delta M = M_{links} - M_{rechts} = R_1 (F_{S,2} - F_{S,3}) = R_1 \cdot \Delta F_S = J_1\, \alpha_1$$

J_1 ist das Massenträgheitsmoment der Umlenkrolle:

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1\, R_1^2$$

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $0 = \sum_i F_i - m_1\, a = (F_{g,2} - F_{S,2}) - m_2\, a_2$

Es folgt: $F_{S,2} = F_{g,2} - m_2\, a_2 = m_2\, g - m_2\, a_2$

Rollbedingung: $a_2 = R_1 \cdot \alpha_1$

Einsetzen: $F_{S,2} = m_2\, g - m_2\, R_1\, \alpha_1$

D'Alembertsches Prinzip für m_3: $0=\sum_i F_i - m_3\,a = \left(F_{S,3}-F_{t,3}-F_{G,3}\right)-m_3\,a_3$

Es gilt: $a_3 = a_2 = R_1\,\alpha_1$

Einsetzen: $F_{S,3} = F_{t,3}+F_{G,3}+m_3\,R\,\alpha_1$

Tangentialkomponente von $F_{g,3}$: $F_{t,3} = F_{g,3}\cdot\sin\theta = m_3\,g\cdot\sin\theta$

Gleitreibungskraft: $F_{G,3} = \mu_G\,m_3\,g\cdot\cos\theta$

Es folgt für $F_{S,3}$: $F_{S,3} = m_3\,g\cdot\sin\theta+\mu_G\,m_3\,g\cdot\cos\theta+m_3\,R_1\,\alpha_1$

$$\frac{J_1\,\alpha_1}{R_1} = \left(m_2\,g - m_2\,R_1\,\alpha_1\right)-\left(m_3\,g\cdot\sin\theta+\mu_G\,m_3\,g\cdot\cos\theta+m_3\,R_1\,\alpha_1\right)$$

$$\alpha_1\left(\frac{J_1}{R_1}+m_2\,R_1+m_3\,R_1\right)=m_2\,g-m_3\,g\left(\sin\theta+\mu_G\cdot\cos\theta\right)$$

$$\alpha_1=\frac{g}{R_1}\cdot\frac{m_2-m_3\left(\sin\theta+\mu_G\cdot\cos\theta\right)}{\frac{J_1}{R_1^2}+m_2\ +m_3}$$

$$\alpha_1=\frac{g}{R_1}\cdot\frac{m_2-m_3\left(\sin\theta+\mu_G\cdot\cos\theta\right)}{0,5\,m_1+m_2\ +m_3}$$

$$\alpha_1=\frac{10}{0,1}\cdot\frac{1-\left(0,7071+0,3\cdot 0,7071\right)}{0,5+1\ +1}\,s^{-2}$$

$$\alpha_1=\frac{10}{0,1}\cdot\frac{0,08077}{2,5}\,s^{-2}=3,23\,s^{-2}$$

2c. Es gilt: $\frac{J_1\,\alpha_1}{R_1}=m_2\,g-m_2\,a_2-m_3\,g\cdot\sin\theta-\mu_G\,m_3\,g\cdot\cos\theta-m_3\,a_3$

und: $a=a_3=a_2=R_1\,\alpha_1$

folgt: $a\left(\frac{J_1}{R_1^2}+m_2+m_3\right)=m_2\,g-m_3\,g\cdot\left(\sin\theta+\mu_G\cos\theta\right)$

$$a=g\,\frac{m_2-m_3\left(\sin\theta+\mu_G\cos\theta\right)}{0,5\,m_1+m_2+m_3}$$

$$a=g\,\frac{1-\left(\sin\theta+\mu_G\cos\theta\right)}{2,5}=g\cdot 0,0323$$

$$a=g\cdot 0,0323=0,323\,m\,s^{-2}$$

2d. Es gilt (siehe **2b.**): $F_{S,2}=m_2\,g-m_2\,a=m_2\left(g-a\right)=9,677\,N$

Es gilt (siehe **2b.**): $F_{S,3}=m_3\,g\cdot\left(\sin\theta+\mu_G\cos\theta\right)+m_3\,a$

$$F_{S,3}=m_3\,g\cdot\sin\theta+\mu_G\,m_3\,g\cdot\cos\theta+m_3\,R_1\,\alpha_1$$

$$F_{S,3}=10N\left(\sin\theta+\mu_G\cos\theta\right)+0,323\,N$$

$$F_{S,3}=9,192\,N+0,323\,N=9,515\,N$$

3 Anfangsenergie Masse m_2: $E_{pot,2}=m_2\,g\,h=20\,J$

Weg auf schiefer Ebene: $s_0=\frac{h}{\sin\theta}=1,556\,m$

Reibungsarbeit auf s_0: $W_{R0}=\mu_G\,m_2\,g\cos\theta\,s_0=5,959\,J$

Reibungsarbeit s_1: $W_{R0} = \mu_G\, m_2\, g\, s_1 = 2{,}5\,J$

Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = 8{,}459\,J$

Kinetische Energie des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$E_{kin,2} = E_{pot,2} - W_{R,ges} = 11{,}541\,J$$

Geschwindigkeit des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin,K}}{m_2}} = 3{,}397\,m\,s^{-1}$$

3a. Elastischer Stoß mit $v_1 = 0$:

Impulserhaltungssatz: $m_2\, v_2 = m_1\, u_1 + m_2\, u_2$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, u_2^2$

Geschwindigkeit u_1: $u_1 = \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

wenn $v_1 = 0$ $u_1 = \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{4}{3} v_2 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}397\,m\,s^{-1} = 4{,}529\,m\,s^{-1}$

<u>Zusatz:</u> Geschwindigkeit u_2: $u_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$

wenn $v_1 = 0$ $u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = +\frac{1}{3} v_2 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}397\,ms^{-1} = 1{,}132\,ms^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{elastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2$

$$h_{elastisch} = \frac{u_1^2}{2\,g} = \frac{4{,}592^2}{20} m = 1{,}054\,m$$

3b. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Impulserhaltungssatz: $m_2\, v_2 = \left(m_1 + m_2\right) u$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2 + Q_{vu}$

Lösung für u: $u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2}{3} v_2 = \frac{2}{3} \cdot 3{,}397\,m\,s^{-1} = 2{,}265\,m\,s^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{vollk.unelastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u^2_{vollk.unelastisch,1}$

$$h_{vollk.unelastisch} = \frac{u^2}{2\,g} = \frac{2{,}265^2}{20} m = 0{,}257\,m$$

4a. Die beiden Schwungräder haben Drehimpuls.

Die Radien sind gleich: $R = R_1 = R_2$

Schwungrad (1): $L_1 = J_1\, \omega_1 = J_1\, 2\pi\, n_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2\, 2\pi\, n_1$

$$L_1 = m_1\, R^2 \pi\, n_1$$

Schwungrad (2): $L_2 = m_2\, R^2 \pi\, n_2$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L_{ges}^{vorher} = L_{ges}^{nachher}$$

Es gilt: $L_{ges}^{vorher} = L_1 + L_2 = \pi R^2 \left(m_1 n_1 + m_2 n_2 \right)$

undt: $L_{ges}^{nachher} = \left(J_1 + J_2 \right) \omega_{gem} = \left(J_1 + J_2 \right) 2\pi n_{gem}$

$$L_{ges}^{nachher} = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \right) 2\pi n_{gem}$$

$$L_{ges}^{nachher} = \pi R^2 n_{gem} \left(m_1 + m_2 \right)$$

$$n_{gem} = \frac{\pi R^2 \left(m_1 n_1 + m_2 n_2 \right)}{\pi R^2 \left(m_1 + m_2 \right)}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(0,5 \cdot 1800 + 1,5 \cdot 900 \right) \min^{-1}}{0,5 + 1,5}$$

$$n_{gem} = 1125 \min^{-1}$$

4b. Änderung des Drehimpulses (1): $\Delta L_1 = 2\pi J_1 \left(n_{gem} - n_1 \right) = 2\pi J_1 \left(1125 - 1800 \right) s^{-1}$

$$\Delta L_1 = 2\pi J_1 \left(n_{gem} - n_1 \right) = \pi \cdot m_1 R^2 \left(-\frac{675}{60\,s} \right)$$

$$\Delta L_1 = \pi \cdot m_1 R^2 \left(-\frac{675}{60\,s} \right) = -0,3976 \frac{kg\,m^2}{s}$$

Änderung des Drehimpulses (2): $\Delta L_2 = 2\pi J_2 \left(n_{gem} - n_2 \right) = 2\pi J_2 \left(1125 - 900 \right) s^{-1}$

$$\Delta L_2 = \pi \cdot m_2 R^2 \left(+\frac{225}{60\,s} \right)$$

$$\Delta L_2 = \pi \cdot m_2 R^2 \left(+\frac{225}{60\,s} \right) = +0,3976 \frac{kg\,m^2}{s}$$

Die Verringerung der Drehimpulses (1) ist gleich der Vergrößerung des Drehimpulses (2).

4c. Drehmoment: $M = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0,3976\,kg\,m^2}{0,6\,s^2} = 0,6627\,Nm$

4d. Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 \right) 4\pi^2 n_1^2$

Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = m_1 R^2 \pi^2 n_1^2 = 99,93\,J$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,2}^{rot} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 R^2 \right) 4\pi^2 n_2^2$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,1}^{rot} = m_2 R^2 \pi^2 n_2^2 = 74,95\,J$

Rotationsenergie nach der Kupplung: $E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2} \left(J_1 + J_2 \right) \omega_{gem}^2$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 \right) R^2 \right) 4\pi^2 n_{gem}^2$$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \left(m_1 + m_2 \right) R^2 \pi^2 n_{gem}^2 = 156,14\,J$$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges} = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} = E_{kin,1+2}^{rot} + Q$

Energieverlust: $Q = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} - E_{kin,1+2}^{rot}$

$$Q = \left(99,93 + 74,95 - 156,14 \right) J = 18,74\,J$$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{ges}} = \frac{18,74}{174,88} = 0,107 \widehat{=} 10,7\%$

Die Rotationsenergien vor und nach dem Kupplungsvorgang sind <u>nicht gleich</u>. Der Energieverlust beträgt 10,7%.