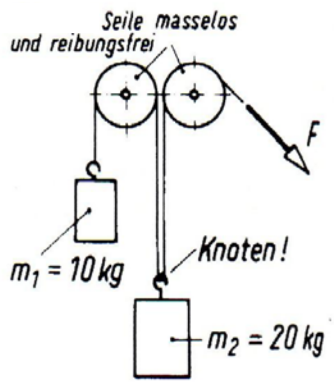
Fachhochschule Hannover | vorgezogen Wiederholungsklausur | 10.03.06
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 2005/06 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Zwei Fahrzeuge fahren mit gleicher Geschwindigkeit $v_0 = 90\,km\,h^{-1}$ an der Raststätte Hildesheim der A7 im zeitlichen Abstand von 20 s vorbei (Fahrzeug 1 fährt voraus, Fahrzeug 2 folgt hinterher). Fahrzeug 1 beginnt in Höhe der Raststätte mit der Bremsbeschleunigung $a_1 = -0{,}2\,m\,s^{-1}$ abzubremsen, während Fahrzeug 2 beim Erreichen der Raststätte beschleunigt ($a_2 = +0{,}2\,m\,s^{-1}$).

a. Zeichnen Sie die *a*-*t*-, das *v*-*t*- und *s*-t-Diagramme beider Fahrzeuge.

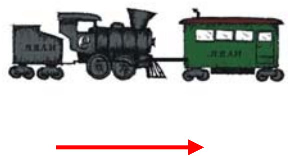
b. In welcher Distanz zur Raststätte Hildesheim hat Fahrzeug 2 das Fahrzeug 1 eingeholt?

2. Auf den Körper m_2 mit einer Masse von 20 kg wirken (links) die Gewichtskraft der Masse $m_1 = 10\,kg$ und die Kraft *F* an dem nach rechts führenden Seilende. Die Rollen sollen als homogene Vollzylinder mit einer Masse von 5 *kg* behandelt werden. Das Seil hingegen sei masselos gedacht. Der Körper m_2 ist mit einem Knoten an den Seilen befestigt.



a. Wie groß ist *F* an dem rechten Seilende, wenn sich der Körper m_2 mit der Beschleunigung $a = \frac{g}{4}$ <u>nach unten</u> bewegt?

3. Eine Rangierlok der Masse 30 t, die einen (nicht angekuppelten) Waggon der Masse 10 t vor sich her schiebt, wird gleichmäßig beschleunigt. Sie soll in 7 s aus dem Stand heraus eine Endgeschwindigkeit von 7 m/s erreichen. Dabei ist ständig eine Reibungskraft von 12 kN vorhanden.



a. Wie groß ist die maximale und wie groß die mittlere Leistung der Lok?
Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit bremst die Lok, der geschobene Waggon löst sich und rollt mit der Endgeschwindigkeit weiter. Nach einer reibungsfreien Fahrt stößt er auf <u>drei</u> stehende, aneinander gekuppelte gleiche Waggons mit jeweils 10 t Masse und kuppelt automatisch an diese an.

b. Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit rollen die <u>vier</u> Waggons weiter?

c. Wie groß ist der relative Energieumsatz in der Kupplung? (<u>Hinweis</u>: Gesucht ist der Energieverlust *Q* beim Stoß geteilt durch die kinetische Energie E^0_{kin} des stoßenden Waggons.)

d. Welche Kraft muss die Kupplung aufbringen, wenn die Ankupplungszeit circa 0,6 s beträgt?

4. Zwei Schwungräder in Form homogener Halbkugeln mit $m_1 = 1{,}5\,kg$ und $m_2 = 0{,}5\,kg$ und Radien $R_1 = R_2 = 12{,}5\,cm$ haben die Drehzahlen $n_1 = 1200\,\text{min}^{-1}$ und $n_2 = 600\,\text{min}^{-1}$. Die beiden Halbkugeln werden gekuppelt.

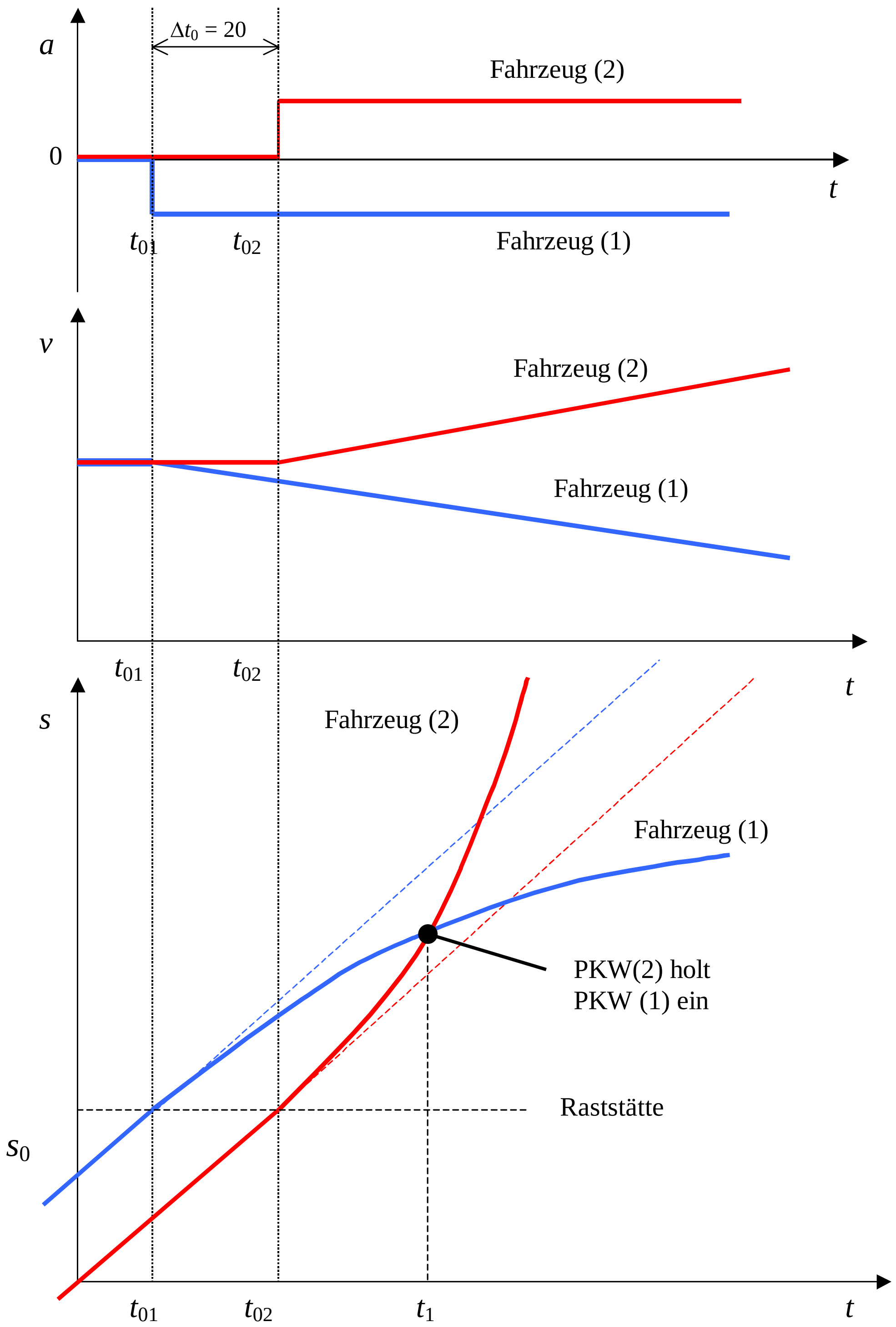
a. Welche gemeinsame Drehfrequenz haben sie nach dem Kuppeln?

b. Bestimmen Sie die Änderung des Drehimpulses vor und nach dem Kupplungsvorgang getrennt für beide Halbkugeln.

c. Welche Energien hatten die Halbkugeln vor, welche Energie haben sie nach der Kupplung? Gilt der Energieerhaltungssatz?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:
1a.



1b. PKW (1) ist zur Zeit t_{01} an der Raststätte: $s_1(t_{01}) = s_0$

PKW (2) ist zur Zeit t_{02} an der Raststätte: $s_2(t_{02}) = s_0$

Der zeitliche Abstand der beiden PKW an der Raststätte $\Delta t_0 = t_{02} - t_{01} = 20\,s$. Dies entspricht einem Abstand von: $\Delta s = v_0 \cdot \Delta t_0 = 500\,m$,

Weg-Zeit-Funktion für PKW (1): $s_1(t) = \frac{1}{2} a_1 (t - t_{01})^2 + v_0 (t - t_{01}) + s_0$

Weg-Zeit-Funktion für PKW (2): $s_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - t_{02})^2 + v_0 (t - t_{02}) + s_0$

Wenn PKW (2) den PKW (1) bei t_1 erreicht, gilt: $s_1(t_1) = s_2(t_1)$

Einsetzen: $\frac{1}{2}a_1(t_1 - t_{01})^2 + v_0(t_1 - t_{01}) = \frac{1}{2}a_2(t_1 - t_{02})^2 + v_0(t_1 - t_{02})$

Wähle zur Vereinfachung: $t_{01} = 0$ für $s_0 = 0$, Es gilt dann: $t_{02} = \Delta t_0$

sowie: $a_1 = -a$ und $a_2 = +a$ mit $a = |a_1| = |a_2| = 0{,}2\,m\,s^{-1}$

Es folgt: $-a t_1^2 + 2v_0 t_1 = a(t_1 - \Delta t_0)^2 + 2v_0(t_1 - \Delta t_0)$

$$-a t_1^2 = a\left(t_1^2 - 2\Delta t_0 t_1 + (\Delta t_0)^2\right) - 2v_0\,\Delta t_0$$

$$2a t_1^2 - 2a\,\Delta t_0 t_1 = 2v_0\,\Delta t_0 - a(\Delta t_0)^2$$

Umformung: $t_1^2 - 2\frac{\Delta t_0}{2}t_1 + \left(\frac{\Delta t_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{a\Delta t_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)(\Delta t_0)^2$

$$\left(t_1 - \frac{\Delta t_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{a\,\Delta t_0} - \frac{1}{4}\right)\Delta t_0^2$$

$$t_1 - \frac{\Delta t_0}{2} = \Delta t_0 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{v_0}{a\,\Delta t_0} - \frac{1}{4}}\right)$$

$$t_1 = \Delta t_0\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{v_0}{a\,\Delta t_0} - \frac{1}{4}}\right)$$

$$t_1 = 20\,s\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25\,m\,s^{-1}}{0{,}2\,m\,s^{-2}\cdot 20\,s} - \frac{1}{4}}\right) = 20\,s\left(0{,}5 \pm \sqrt{6}\right)$$

Positive Lösung: $t_{11} = 58{,}98\,s$

(Negative Lösung: $t_{12} = -38{,}98\,s$ entfällt)

Fahrzeug 1 wird von Fahrzeug 2 $t_1 = 58{,}98\,s$ nachdem Fahrzeug 1 die Raststätte Hildesheim passiert hat, eingeholt. Der zurückgelegte Weg ist:

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_0 t_1$$

$$s_1(t_1) = \frac{1}{2}\left(-0{,}2\frac{m}{s^2}\right)(58{,}98s)^2 + 25\frac{m}{s}\cdot 58{,}98\,s = 1126\,m$$

Kontrolle: Da Fahrzeug 2 $\Delta t_0 = 20\,s$ später als Fahrzeug 1 die Raststätte erreicht, vergeht die Zeit $t_1' = (58{,}98 - 20{,}00)\,s = 38{,}98\,s$ bis Fahrzeug 2 nach dem Passieren der Raststätte das Fahrzeug (1) eingeholt hat.

Der zurückgelegte Weg berechnet sich mit Hilfe von t_1':

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2}a_2(t_1')^2 + v_0\,t_1'$$

$$s_2(t_1') = \frac{1}{2}\left(+0{,}2\frac{m}{s^2}\right)(38{,}98\,s)^2 + 25\frac{m}{s}\cdot 38{,}98\,s = 1126\,m$$

2a. Wenn sich die Masse m_2 nach unten bewegt, gilt nach dem D'Alembertsches Prinzip für m_2:

Gleichung (1): $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\,a = 0 = \left(F_{g2} - \left(F_{Sl} + F_{Sr} + \frac{2M_R}{R}\right)\right) - m_2 a$

mit Seilkraft links F_{Sl} (hinter der Rolle)

und Seilkraft rechts $F_{Sr} = F$ (hinter der Rolle) und Drehmoment Rolle: $M_R = J \cdot \alpha = J \dfrac{a}{R}$

und der Gewichtskraft: $F_{g2} = m_2\, g$

Die Seilkraft F_{Sl} wird mit Hilfe des Seils auf die Masse m_1 übertragen. Die Gewichtskraft F_{g1} wirkt entgegen.

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0 = \left(F_{Sl} - F_{g1}\right) - m_1 a \qquad (2)$

mit der Gewichtskraft: $F_{g1} = m_1\, g$

Aus Gl. (1) folgt: $F = F_{Sr} = F_{g2} - 2\dfrac{Ja}{R^2} - F_{Sl} - m_2 a$

setze F_{sl} aus Gl. (2) ein: $F = F_{Sr} = F_{g2} - 2\dfrac{Ja}{R^2} - \left(F_{g1} + m_1 a\right) - m_2 a$

$$F = F_{Sr} = F_{g2} - F_{g1} - 2\frac{\frac{1}{2} m_R R^2 a}{R^2} - m_1 a - m_2 a$$

$$F = F_{Sr} = F_{g2} - F_{g1} - m_R a - m_1 a - m_2 a$$

mit $a = \dfrac{g}{4}$ $\quad F = g \cdot \left[\left(m_2 - m_1\right) - \dfrac{\left(m_R + m_1 + m_2\right)}{4}\right]$

$$F = g \cdot \left(10\,kg - 8{,}75\,kg\right) = 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}25\,kg = 12{,}5\,N$$

3a. Masse der Lok: $m_L = 30\,t = 30000\,kg$

Masse des Waggons: $m_W = 10\,t = 10000\,kg$

Beschleunigung: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{7\,m\,s^{-1} - 0}{7\,s - 0} = 1{,}0\,m\,s^{-2}$

Beschleunigungskraft: $F_a = m_{ges}\, a = \left(m_L + m_W\right) a$

$$F_a = 40000\,kg \cdot 1{,}0\,\frac{m}{s^2} = 40\,kN$$

Reibungskraft: $F_R = 12\,kN$

Gesamtkraft: $F_{ges} = F_a + F_R = 52\,kN$

Maximale Leistung: $P_{\max} = F_{ges}\, v_{\max} = 52\,kN \cdot 7\dfrac{m}{s} = 364\,kW$

Mittlere Leistung: $P_{mittel} = F_{ges}\, v_{mittel} = 52\,kN \cdot 3{,}5\dfrac{m}{s} = 182\,kW$

3b. Waggon Nr. 1 vor dem Stoß: $v_1 = 7\,m\,s^{-1}$

Waggon Nr. 2,3,4 vor dem Stoß: $v_i = 0,\ \textit{für } i = 2,3,4$

Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right) u$

Geschwindigkeit nach dem Stoß: $u = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} v_1$

$$u = \frac{10}{10+10+10+10} v_1 = \frac{10}{40} v_1 = \frac{1}{4} v_1$$

$$u = 1{,}75\,m\,s^{-1}$$

3c. Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}m_i u^2\right)+Q$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}m_i\right)u^2+Q$$

Energieumsatz in der Kupplung:

$$Q=\frac{1}{2}m_1 v_1^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}m_i\right)u^2$$

$$Q=\frac{1}{2}m_1 v_1^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}m_i\right)m_1^2v_1^2}{2\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}m_i\right)^2}=\left(1-\frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4}m_i}\right)E_{kin}^1$$

$$Q=\left(1-\frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4}m_i}\right)E_{kin}^1=0{,}75\cdot 245\,kJ=183{,}75\,kJ$$

Relativer Energieumsatz:

$$\frac{Q}{E_{kin}}=1-\frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4}m_i}=1-\frac{10}{40}=75\%$$

3d. Kraft = Impulsänderung:

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{p_{End}-p_{Anf}}{\Delta t}$$

Für Waggon Nr. 1:

$$F_1=\frac{m_1 u-m_1 v_1}{\Delta t}=\frac{m_1(u-v_1)}{\Delta t}$$

$$F_1=\frac{10000(1{,}75-7)}{0{,}6}N=-87{,}50\,kN$$

Für Waggon Nr.2,3,4:

$$F_{234}=\frac{(m_2+m_3+m_4)u-0}{\Delta t}=\frac{(m_2+m_3+m_4)u}{\Delta t}$$

$$F_{234}=\frac{30000\cdot 1{,}75}{0{,}6}=+87{,}50\,kN$$

Auch in diesem Fall gilt also: Actio = Reactio.

4a. Die beiden Halbkugeln haben Drehimpuls.

Die Radien sind gleich: $R=R_1=R_2$

Schwungrad (1):

$$L_1=J_1\,\omega_1=J_1\,2\pi\,n_1=\frac{2}{5}m_1R^2\,2\pi\,n_1$$

$$L_1=\frac{4}{5}m_1\,R^2\pi\,n_1$$

Schwungrad (2):

$$L_2=\frac{4}{5}m_2\,R^2\pi\,n_2$$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L_{ges}^{vorher}=L_{ges}^{nachher}$$

Es gilt:

$$L_{ges}^{vorher}=L_1+L_2=\frac{4}{5}\pi\,R^2\left(m_1\,n_1+m_2\,n_2\right)$$

und:

$$L_{ges}^{nachher}=(J_1+J_2)\,\omega_{gem}=(J_1+J_2)\,2\pi\,n_{gem}$$

$$L_{ges}^{nachher}=\left(\frac{2}{5}m_1R^2+\frac{2}{5}m_2R^2\right)2\pi\,n_{gem}$$

$$L_{ges}^{nachher} = \frac{4}{5}\pi R^2\, n_{gem}\left(m_1 + m_2\right)$$

$$n_{gem} = \frac{\frac{4}{5}\pi\, R^2\left(m_1\, n_1 + m_2\, n_2\right)}{\frac{4}{5}\pi\, R^2\left(m_1 + m_2\right)}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1\, n_1 + m_2\, n_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(1,5\cdot 1200 + 0,5\cdot 600\right)\min^{-1}}{1,5 + 0,5}$$

$$n_{gem} = 1050\,\min^{-1}$$

4b. Änderung des Drehimpulses (1):

$$\Delta L_1 = 2\pi\, J_1\left(n_{gem} - n_1\right) = 2\pi\, J_1\left(1050 - 1200\right)s^{-1}$$

$$\Delta L_1 = 2\pi\, J_1\left(n_{gem} - n_1\right) = \frac{4}{5}\pi\cdot m_1\, R^2\left(-\frac{150}{60\,s}\right)$$

$$\Delta L_1 = \frac{4}{5}\pi\cdot m_1\, R^2\left(-\frac{150}{60\,s}\right) = -0,1473\frac{kg\, m^2}{s}$$

Änderung des Drehimpulses (2):

$$\Delta L_2 = 2\pi\, J_2\left(n_{gem} - n_2\right) = 2\pi\, J_2\left(1050 - 600\right)s^{-1}$$

$$\Delta L_2 = \frac{4}{5}\pi\cdot m_2\, R^2\left(+\frac{450}{60\,s}\right)$$

$$\Delta L_2 = \frac{4}{5}\pi\cdot m_2\, R^2\left(+\frac{450}{60\,s}\right) = +0,1473\frac{kg\, m^2}{s}$$

Die Verringerung der Drehimpulses (1) ist gleich der Vergrößerung des Drehimpulses (2).

4c. Energie Schwungrad (1)

$$E_{kin,1}^{rot} = \frac{1}{2}J_1\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m_1 R^2\right)4\pi^2\, n_1^2$$

Energie Schwungrad (1)

$$E_{kin,1}^{rot} = \frac{4}{5}m_1 R^2\pi^2\, n_1^2 = 74,02\, J$$

Energie Schwungrad (2)

$$E_{kin,2}^{rot} = \frac{1}{2}J_2\,\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 R^2\right)4\pi^2\, n_2^2$$

Energie Schwungrad (2)

$$E_{kin,1}^{rot} = \frac{4}{5}m_2 R^2\pi^2\, n_2^2 = 6,17\, J$$

Rotationsenergie nach der Kupplung:

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2\right)\omega_{gem}^2$$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\left(m_1 + m_2\right)R^2\right)4\pi^2\, n_{gem}^2$$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{4}{5}\left(m_1 + m_2\right)R^2\pi^2\, n_{gem}^2 = 75,56\, J$$

Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges} = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} = E_{kin,1+2}^{rot} + Q$$

Energieverlust:

$$Q = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} - E_{kin,1+2}^{rot}$$

$$Q = \left(74,02 + 6,17 - 75,56\right)J = 4,63\, J$$

Relativer Energieverlust:

$$\frac{Q}{E_{ges}} = \frac{4,63}{76,19} = 0,067 \;\widehat{=}\; 6,1\%$$

Die Rotationsenergien vor und nach dem Kupplungsvorgang sind <u>nicht gleich</u>. Der Energieverlust beträgt 6,1%.