Fachhochschule Hannover | PT2 | 28.06.06
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im SS06 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Der Anhalteweg eines Pkw ($m_{PKW} = 1800\,kg$) setzt sich aus dem Reaktionsweg (gleichförmige Bewegung vom Erkennen des Hindernisses bis zum Beginn des Bremsens) und dem tatsächlichen Bremsweg (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bis zum Stillstand zusammen. Die Reaktionszeit des Fahrers betrage 0,6 s und die Bremsverzögerung sei – 8 m/s².

a. Skizzieren Sie die *a*-*t*-, *v*-*t*- und *s*-*t*-Diagramme.

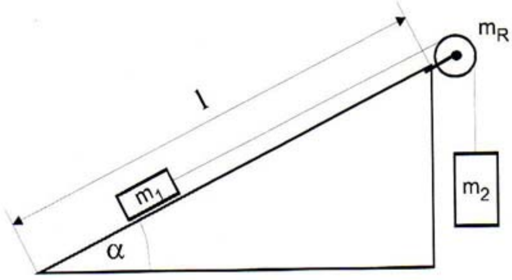
b. Wie groß darf die Geschwindigkeit höchstens sein, wenn der Anhalteweg 10 m nicht überschreiten soll?

c. Wie groß ist die Bremszeit und wie groß sind der Reaktionsweg und der reine Bremsweg?

d. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) für den gesamten Anhalteweg?

e. Wie groß ist die maximale, wie groß die mittlere Bremsleistung?

2. Eine Masse ($m_1 = 1\,kg$) wird von einem zweiten Körper (Masse $m_2 = 2\,kg$) auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 20°$ und der Länge $l = 1\,m$ hochgezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,2$. Die Rolle habe eine Masse von $m_R = 1\,kg$ und kann als <u>Hohlzylinder</u> behandelt werden. Die Masse des Seils soll vernachlässigt werden.



a. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Masse?

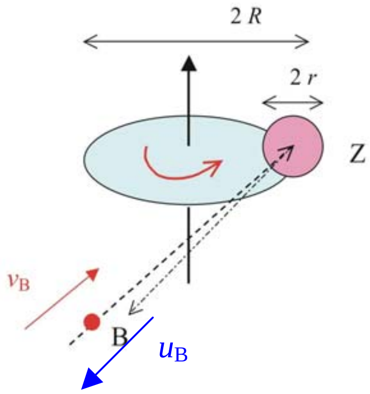
b. Welche Zeit benötigt m_1 , um die Strecke *l* zu durchlaufen? Anfangsbedingung $v(t=0) = 0$.

c. Welche Geschwindigkeit erreicht m_1 am Ende der schiefen Ebene?

d. Vergleichen Sie die Energien in der Anfangs- und Endposition und bestimmen Sie die Reibungsarbeit auf der Strecke *l* mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes.

e. Wie groß sind die Seilkräfte an m_1 und m_2 während der beschleunigten Bewegung?

3. Betrachten Sie den Wurf eines Balls(B) (Masse $m_B = 100\,g$) auf eine Zielscheibe (Z) (Z mit vernachlässigbarer Masse), die senkrecht am äußeren Rand einer drehbaren horizontalen Scheibe (homogener Zylinder mit Masse $m_S = 8\,kg$ und Radius $R = 0,5\,m$) befestigt ist. Ballgeschwindigkeit vor dem Stoß: $v_B = 110\,km\,h^{-1}$.



a. Betrachten Sie den Stoss als (vollkommen) elastisch. Welche Geschwindigkeiten u_B hat der Ball nach dem Stoß?

b. Welche Winkelgeschwindigkeit ω_S hat die Drehscheibe?

c. Man betrachten ein Stück Knetmaterial gleicher Masse und gleicher Anfangsgeschwindigkeit, das nach dem Wurf an der Zielscheibe haftet. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Drehscheibe nach dem vollkommen unelastischen Stoß?

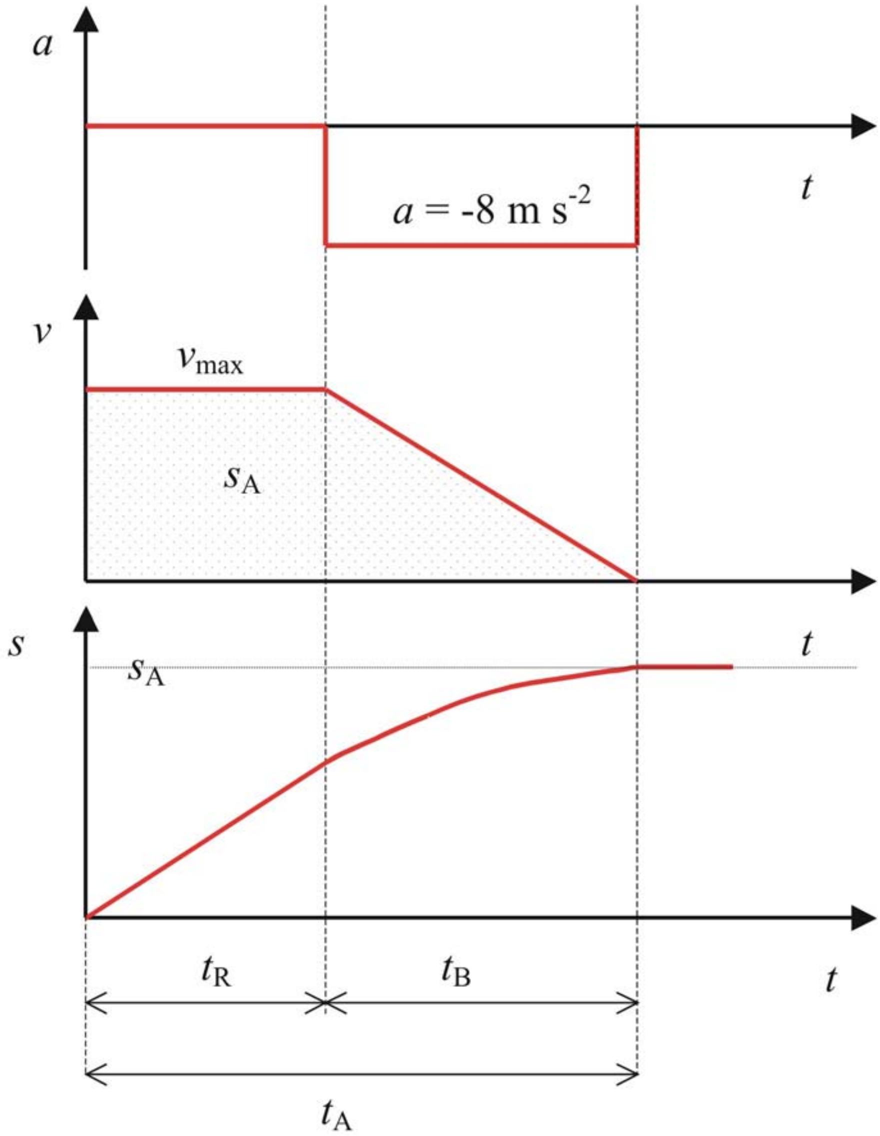
d. Welcher relative Energieanteil Q / E_{kin} wird im Fall **3c.** in Wärme/Verformung umgewandelt?

e. Nehmen Sie an, dass im Aufgabenteil **a.** und **c.** die Kontaktzeiten des Balls bzw. der Knete mit der Scheibe jeweils 0,1 s beträgt. Mit welcher Kraft wirken der Ball bzw. die Knete auf die Scheibe?

(<u>Hinweise</u>: Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, die dimensionslose Größe $\hat{J} = J \big/ \left(m_B R^2 \right)$ zu verwenden)

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:
1a.



1b. Anhalteweg s_A: $$s_A = v_{\max} \cdot t_R + \frac{1}{2}|a| t_B^2$$

t_R Reaktionszeit, t_B Bremszeit, $t_A = t_R + t_B$ gesamte Anhaltezeit

Bei gleichmäßiger Bremsbeschleunigung gilt: $$|a| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{v_{\max}}{t_B}$$

Einsetzen: $$s_A = v_{\max} \cdot t_R + \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{|a|}$$

$$v_{\max}^2 + 2\, v_{\max}\, |a| t_R = 2|a| s_A$$

$$v_{\max} = \pm\sqrt{|a|^2\, t_R^2 + 2|a| s_A} - |a| t_R$$

$$v_{\max} = \left(\pm\sqrt{8^2\, 0{,}6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10} - 8 \cdot 0{,}6\right)\frac{m}{s}$$

$$v_{\max} = 8{,}7292 \frac{m}{s} = 31{,}4 \frac{km}{h}$$

1c. Bremszeit:

$$t_B = \frac{v_{\max}}{|a|} = \frac{8{,}7292}{8} s = 1{,}09\,s$$

$$s_R = v_{\max} \cdot t_R = (8{,}7292 \cdot 0{,}6)\,m = 5{,}24\,m$$

$$s_B = \frac{1}{2}|a|\,t_B^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1{,}09^2\right) m = 4{,}76\,m$$

1d. Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\overline{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{10\,m}{(0{,}6+1{,}09)\,s} = 5{,}92\frac{m}{s} = 21{,}3\frac{km}{h}$$

1e. Maximale Bremsleistung:

$$P_{\text{Brems,max}} = F \cdot v_{\max} = m_{PKW} \cdot a \cdot v_{\max}$$

$$P_{\text{Brems,max}} = (1800 \cdot 8 \cdot 8{,}7292)\,W = 125{,}7\,kW$$

Mittlere Bremsleistung

$$P_{\text{Brems,max}} = \left(1800 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}7292\right) W = 62{,}85\,kW$$

2a. D'Alembertsches Prinzip für m_2:

$$\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0$$

Es wirkt die Gewichtskraft F_{g2} nach unten und die Seilkraft F_{S2} nach oben.

$$\left(F_{g2} - F_{S2}\right) - m_2\, a = 0 \qquad (1)$$

D'Alembertsches Prinzip für m_1:

$$\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0$$

Es wirken die Seilkraft F_{g1} nach oben, die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{t1} und die Gleitreibungskraft F_{G1} nach unten.

$$\left(F_{S1} - F_{t1} - F_{G1}\right) - m_1\, a = 0 \qquad (2)$$

Die Kräfte an den beiden Seilenden sind nicht gleich, da die Masse der Umlenkrolle nicht vernachlässigbar ist und die Seilkraft F_{S2} ("rechts") größer als die Seilkraft F_{S1} ("links") sein muss, um ein Drehmoment M_R an der Umlenkrolle rechts erzeugen zu können.

$$F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} \qquad (3)$$

Für starre Körper (Rolle) gilt: $M_R = J_R \cdot \alpha_R = k\, m_R\, R^2\, \alpha_R = 1 m_R\, R^2\, \alpha_R$

"Rollbedingung" für Seil-Rolle: $a = R \cdot \alpha_R$

Einsetzen in (3): $F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} = \frac{m_R\, R^2\, a}{R^2} = m_R\, a$

Aus (1) ergibt sich: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\, a = m_2\, g - m_2\, a$

Aus (2) ergibt sich: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

Einsetzen in (3) ergibt: $(m_2 g - m_2 a) - (F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a) = m_R\, a$

Hangabtriebskraft von m_1: $F_{t1} = m_1\, g \sin\alpha$

Gleitreibungskraft von m_1: $F_{G1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha$

Einsetzen: $m_2 g - m_2 a - m_1\, g \sin\alpha - \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha - m_1\, a = m_R\, a$

Lösung:

$$a = g \cdot \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu_G \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_R}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{2 - 1(0{,}3420 + 0{,}2 \cdot 0{,}9396)}{1+2+1}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,3675 = 3,67\,m\,s^{-2}$$

2b. Bei gleichmäßiger Beschleunigung gilt: $s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2$

Für die Strecke *l* folgt: $s(t_l) = l = \frac{1}{2}a\,t_l^2$

Für die Strecke *l* gilt: $t_l = \sqrt{\frac{2\cdot l}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1m}{3,67\,m\,s^{-2}}} = 0,738\,s$

2c. Bei gleichmäßiger Beschleunigung gilt: $v(t) = a\cdot t$

Es folgt für $s(t_l) = l$: $v(t_l) = a\cdot t_l$

Lösung: $v(t_l) = 3,67\frac{m}{s^2}\cdot 0,738\,s = 2,71\frac{m}{s}$

2d. <u>Definition:</u> Für $t=0$ soll für die Masse m_1 gelten: $E_{pot,1}(t=0) = 0$

Für $t=0$ soll für die Masse m_2 gelten: $E_{pot,2}(t=0) = m_2\,g\,l$

und: $E_{kin,1} = E_{kin,2} = E_{rot} = 0$

Es folgt: Für $t = t_l$ gilt für die Masse m_1: $E_{pot,1}(t=t_l) = m_1\,g\,H$

Mit Höhe *H*: $H = l\cdot\sin\alpha = 0,3420\,m$

Für $t = t_l$ gilt für die Masse m_2: $E_{pot,2}(t=t_l) = 0$

Energieerhaltungssatz: $E_{pot,2} = E_{kin,1} + E_{kin,2} + E_{rot} + E_{pot,1} + W_{R,1}$

mit Reibungsarbeit: $W_{R,1} = \mu_G\,m_1\,g\cos\alpha\cdot l$

$W_{R,1} = (0,2\cdot 1\cdot 10\cdot 0,9396\cdot 1)\,J = 1,879\,J$

$E_{pot,2}(t=0) = m_2\,g\,l = 2\cdot 10\cdot 1\cdot 1 = 20,000\,J$

$E_{pot,1}(t_l) = m_1\,g\,H = 1\cdot 10\cdot 1\cdot 0,3420 = 3,420\,J$

$E_{kin,1} = \frac{1}{2}m_1 v^2(t_l) = 0,5\cdot 1\cdot 2,71^2\,J = 3,670\,J$

$E_{kin,2} = \frac{1}{2}m_2 v^2(t_l) = 0,5\cdot 2\cdot 2,71^2\,J = 7,340\,J$

Rotationsenergie: $E_{rot} = E_{pot,2} - E_{kin,1} - E_{kin,2} - E_{pot,1} - W_{R,1}$

$E_{rot} = (20,000 - 3,670 - 7,340 - 3,420 - 1,897)\,J$

$E_{rot} = 3,670\,J$

Vergleich: Wenn die Masse m_1 die Strecke *l* durchlaufen hat und die Geschwindigkeit $v(t=t_l)$ besitzt, gilt für die Winkelgeschwindigkeit der Rolle:

$$\omega_R(t=t_l) = \frac{v(t=t_l)}{R}$$

Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{1}{2}J_R\,\omega_R^2$

mit: $J_R = m_R\,R^2$

Einsetzen: $E_{rot} = \frac{1}{2}m_R\,R^2\frac{v^2(t=t_l)}{R^2} = \frac{1}{2}m_R\,v^2(t=t_l)$

$E_{rot} = 0,5\cdot 1\cdot 2,709^2\,J = 3,670\,J$

2e. Seilkraft an m_2: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\,a = m_2\,g - m_2\,a$

$$F_{S2} = 20,0N - 7,34N = 12,66N$$

Seilkraft an m_1: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

$$F_{S1} = m_1\, g \cdot \sin\alpha + \mu_G\, m_1\, g \cdot \cos\alpha + m_1\, a$$

$$F_{S1} = 3,42\,N + 1,88N + 3,67\,N = 8,97\,N$$

Differenz: $F_{S2} - F_{S1} = 3,69\,J$

<u>Probe:</u> $F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} = \frac{Ja}{R^2} = \frac{m_R R^2}{R^2} a = m_R\, a$

$$F_{S2} - F_{S1} = m_R\, a = 1 \cdot 3,67\,N = 3,67\,N$$

Bis auf die Rundungsfehler sind die Ergebnisse gleich.

3a. Bezeichnungen:

m_B Masse des Balls

m_S Masse der drehbaren Scheibe

v_B Geschwindigkeit des Balls vor dem Stoß

u_B Geschwindigkeit des Balls vor dem Stoß

ω Kreisfrequenz der drehbaren Scheibe

R Radius der drehbaren Scheibe

J Trägheitsmoment der drehbaren Scheibe

$\hat{J} = \frac{J}{m_B\, R^2}$ Trägheitsmoment (dimensionslos) der drehbaren Scheibe in Einheiten des Trägheitsmoments des Balls (als Massenpunkt)

$R\,\omega = u_R$ Bahngeschwindigkeit eines Massenpunktes am Rand der Drehscheibe

Es handelt sich um einen <u>vollkommen elastischen</u> Stoß.

Drehimpulserhaltungssatz: $m_B\, v_B\, R = J\,\omega + m_B\, u_B\, R$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2$

Umstellung Drehimpulsgleichung: $v_B = \frac{J}{m_B\, R^2}(R\,\omega) + u_B$

Umstellung Energiegleichung: $m_B\, v_B^2 = \frac{J}{m_B\, R^2}(R\omega)^2 + u_B^2$

Zur Vereinfachung verwende man: $\hat{J} = \frac{J}{m_B R^2} = \frac{\frac{1}{2} m_S\, R^2}{m_B\, R^2} = \frac{0,5 \cdot 8000}{100} = 40$

und u_R: $u_R = R\,\omega$, so folgt aus dem

Energieerhaltungssatz: $v_B^2 = \hat{J}\, u_R^2 + u_B^2$ (1)

aus dem Drehimpulserhaltungssatz: $v_B = \hat{J}\, u_R + u_B$ (2)

Aus Gl (2) erhält man: $u_R = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B)$

Dies eingesetzt in Gl (1) ergibt: $v_B^2 = \frac{1}{\hat{J}} \cdot (v_B - u_B)^2 + u_B^2$

Es folgt: $\hat{J}\, v_B^2 = v_B^2 - 2v_B\, u_B + u_B^2 + \hat{J}_B\, u_B^2$

$$u_B^2 \cdot (1 + \hat{J}) - 2\, v_B\, u_B = v_B^2 \cdot (\hat{J} - 1)$$

$$u_B^2 - 2\frac{1}{1+\widehat{J}}v_B\,u_B = v_B^2\frac{\widehat{J}-1}{1+\widehat{J}}$$

Zur Vereinfachung verwende man: $\alpha = \frac{1}{1+\widehat{J}} = \frac{1}{1+40} = \frac{1}{41}$

sowie: $\beta = \frac{\widehat{J}-1}{1+\widehat{J}} = \frac{40-1}{1+50} = \frac{39}{41}$

Es folgt: $u_B^2 - 2\,\alpha\, v_B\, u_B = \beta\, v_B^2$

Lösungen der quadratischen Gl. $u_B = \left(\pm\sqrt{\alpha^2+\beta}+\alpha\right)\cdot v_B$

$$\frac{u_B}{v_B} = \pm\sqrt{\frac{1}{41^2}+\frac{39}{41}}+\frac{1}{41} = \pm\sqrt{\frac{1}{41^2}+\frac{39\cdot 41}{41^2}}+\frac{1}{41}$$

Die zur positiven Wurzel gehörende Lösung scheidet aus, da u_B und v_B entgegengesetzte Richtungen haben.

Lösung: $\frac{u_B}{v_B} = \frac{1}{41}-\frac{\sqrt{1600}}{41} = \frac{1-40}{41} = -\frac{39}{41} = -0{,}951$

$$u_B = -0{,}951\cdot 110\,km\,h^{-1} = -104{,}6\,km\,h^{-1}$$

3b. Die Winkelgeschwindigkeit ω erhält man am einfachsten aus den Beziehungen

für u_R und $\frac{u_B}{v_B}$ aus **4a**: $u_R = R\,\omega = \frac{1}{\widehat{J}}\left(v_B-u_B\right) = \frac{1}{\widehat{J}}\left(1-\frac{u_B}{v_B}\right)\cdot v_B$

$$u_R = R\,\omega = \frac{1}{40}\left(1+\frac{39}{41}\right)\cdot v_B = \frac{80}{40\cdot 41}\cdot v_B = \frac{80}{1640}\cdot v_B$$

1 $u_R = R\,\omega = \frac{80}{1640}\cdot v_B = \frac{2}{41} = 0{,}0488\cdot v_B = 4{,}9\,m\,s^{-1}$

Es folgt: $\omega = \frac{2}{41}\cdot\frac{v_B}{R} = \frac{2}{41}\cdot\frac{30{,}55\,m\,s^{-1}}{0{,}5\,m} = 2{,}98\,s^{-1} \cong 3\,s^{-1}$

3c. Es handelt sich um einen <u>vollkommen unelastischen</u> Stoß.

Masse Knetmaterial: $m_K = m_B = 100\,g$ und $v_K = v_B = 110\,km\;h^{-1}$

Drehimpulserhaltungssatz: $m_K\,v_K\,R = \left(J+m_K\,R^2\right)\omega$

Aus Drehimpulserhaltungssatz folgt: $\omega = \frac{m_K\,v_K\,R}{J+m_K\,R^2} = \frac{m_K\,v_K\,R}{m_K\,R^2\cdot\left(\widehat{J}+1\right)} = \frac{v_K}{R\cdot\left(\widehat{J}+1\right)}$

$$\omega = \frac{v_K}{R\cdot\left(\widehat{J}+1\right)} = \frac{1}{\widehat{J}+1}\cdot\frac{v_K}{R} = \frac{1}{41}\cdot\frac{30{,}56\,m\,s^{-1}}{0{,}5\,m}$$

$$\omega = 1{,}49\,s^{-1} \cong 1{,}5\,s^{-1}$$

3d. Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}m_K\,v_K^2 = \frac{1}{2}\left(J+m_K\,R^2\right)\omega^2+Q$

$$Q = \frac{1}{2}m_K\,v_K^2-\frac{1}{2}\left(J+m_K\,R^2\right)\omega^2$$

Einsetzen von $\omega = \frac{1}{\widehat{J}+1}\cdot\frac{v_K}{R}$ und $J = \widehat{J}\cdot m_K R^2$

Liefert: $Q = \frac{1}{2}m_K\,v_K^2-\frac{1}{2}\left(\widehat{J}\cdot m_K\,R^2+m_K\,R^2\right)\frac{1}{\left(\widehat{J}+1\right)^2}\frac{v_K^2}{R^2}$

$$Q = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\widehat{J}+1} m_B\, v_B^2$$

$$Q = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 \left(1 - \frac{1}{\widehat{J}+1}\right) = E_0\left(1 - \frac{1}{\widehat{J}+1}\right)$$

$$\frac{Q}{E_{kin}^0} = \frac{41-1}{41} = 0{,}9756$$ also ist die Lösung 97,56%.

3e. Es gilt allgemein: Kraftstoß = Impulsänderung

$$\int F\, dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p$$

Entsprechend Actio = Reactio gilt: Kraftstoß auf die Scheibe = - Impulsänderung des Balls

$$\int F_S\, dt = \bar{F}_S \cdot \Delta t = -\Delta p_B$$

Für den Ballwurf gilt:

$$-\Delta p_B = -\left(p_{End} - p_{Anf}\right) = -m_B\left(u_B - v_B\right)$$

Kraft auf die Scheibe:

$$\bar{F}_{S,B} = \frac{-\Delta p_B}{\Delta t} = -\frac{m_B\left(u_B - v_B\right)}{\Delta t} = \frac{m_B\left(|u_B| + |v_B|\right)}{\Delta t}$$

$$\bar{F}_{S,B} = \frac{m_B\left(|u_B| + |v_B|\right)}{\Delta t} = \frac{0{,}1kg\left(0{,}951+1\right)|v_B|}{0{,}1s} = 59{,}6\,N$$

Für den Wurf mit Knete:

$$-\Delta p_K = -\left(p_{End} - p_{Anf}\right) = -m_K\left(\omega R - v_B\right)$$

Kraft auf die Scheibe:

$$\bar{F}_{S,K} = \frac{-\Delta p_K}{\Delta t} = -\frac{m_B\left(\omega R - v_B\right)}{\Delta t} = \frac{m_B\left(|v_B| - |\omega R|\right)}{\Delta t}$$

$$\bar{F}_{S,K} = \frac{-\Delta p_K}{\Delta t} = \frac{m_B\left(|v_B| - |\omega R|\right)}{\Delta t}$$

$$\bar{F}_{S,K} = \frac{0{,}1kg \cdot \left(30{,}55 - 1{,}49 \cdot 0{,}5\right) m\, s^{-1}}{0{,}1\, s} = 29{,}8\, N$$