Fachhochschule Hannover 20.01.07
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 0607 Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

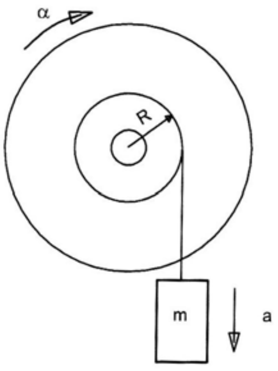
1. Ein Tennisball soll 15 m senkrecht nach oben geworfen werden.

a. Welche Anfangsgeschwindigkeit muss der Ball haben? (10)

b. Wie weit fliegt ein Ball, der mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit unter einem Winkel von 50° geworfen wird? (10)

c. Wie weit könnte der Ball mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit maximal geworfen werden? Unter welchem Winkel muss der Ball geworfen werden? (10)

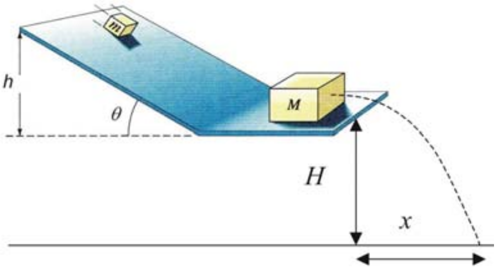
2. Ein Drehmomentenrad erfährt um seine horizontale Achse eine Winkelbeschleunigung, die durch die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 5\,kg$ erzeugt wird, der an einem um die Achse ($R = 5\,cm$) gewickelten Faden hängt. Lässt man den Körper (m) los, so bewegt er sich in $t = 4\,s$ um die Strecke $s = 1\,m$ nach unten. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_{ges} des Systems Rad/Achse,



a. indem Sie die am System wirkenden **Kräfte und Momente betrachten**, (20)

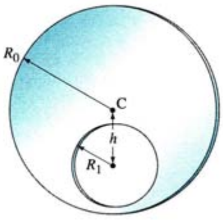
b. indem Sie den **Energieerhaltungssatz anwenden**. (20)

3. Betrachten Sie eine schiefe Ebene auf einem Tisch mit der Höhe $H = 1{,}0\,m$. Ein Block der Masse $m = 1\,kg$ gleitet diese schiefe Ebene mit Neigungswinkel $\theta = 40°$ hinab. In der Ausgangshöhe $h = 80\,cm$ besitzt er die Geschwindigkeit $v_0 = 3\,m\,s^{-1}$. Am Ende der Ebene stößt er auf einen Block der Masse $M = 5\,kg$. Der gestoßene Block verlässt die Ebene und fällt die Tischhöhe H hinab. Der Aufschlagpunkt liegt $x = 55{,}9\,cm$ von der Tischkante entfernt.



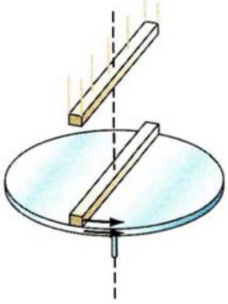
a. Wie viel Prozent der ursprünglichen kinetischen Energie der Masse m gehen beim Stoß der Massen m und M durch Verformung und/oder Wärme verloren? (<u>Hinweis:</u> Die Blöcke können als Massenpunkte behandelt werden, die reibungsfrei gleiten.) (30)

4. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für die gezeigte zylindrische Scheibe mit außermittigem Loch bezüglich einer Drehachse, die senkrecht zur Scheibe verläuft und durch den Mittelpunkt C geht. Es soll gelten: $R_i = \frac{1}{3} R_0$ und $h = \frac{1}{2} R_0$. Geben Sie das Ergebnis in der Form $\frac{J}{m R_0^2}$ an.



(15)

5. Eine homogene Scheibe mit der Masse m und dem Radius R dreht sich reibungsfrei mit der Drehzahl $n_{Sch} = 10\,s^{-1}$ auf einer stehenden Welle. Ein nichtrotierender Stab gleicher Masse und der Länge $L = 2R$ wird auf die drehende Scheibe (wie gezeigt) fallen gelassen. Wie groß ist die gemeinsame Drehzahl? (20)



Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. Man betrachte die Bewegung des Balls entlang der senkrechten y-Achse.

Für die Geschwindigkeit gilt: $v_y(t) = v_{y0} - g\,t$

Für den Weg gilt: $y(t) = v_{y0}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$

Beim Erreichen der Maximalhöhe ist die Geschwindigkeit gleich Null.

Es gilt: $v_y(t_H) = v_{y0} - g\,t_H = 0$

die entsprechende Steigzeit ist: $t_H = \frac{v_{y0}}{g}$

Es folgt: $y(t_H) = v_{y0}\,t_H - \frac{1}{2} g\,t_H^2 = \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{y0}^2}{g}$

$$y(t_H) = \frac{v_{y0}^2}{2g} = 15\,m$$

Lösung: $v_{y0} = \sqrt{2g\,y(t_H)} = 17{,}3\,m\,s^{-1}$

1b. Der Geschwindigkeitsvektor mit Betrag von $v_0 = |v_0| = 17{,}3\,m\,s^{-1}$ kann in eine Vertikal- und eine Horizontal-Komponente (entsprechend x,y-Komponente) zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 50° = 11{,}13\,m\,s^{-1}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 50° = 13{,}27\,m\,s^{-1}$$

Steigzeit: $t_H = \frac{v_{y0}}{g} = 1{,}327\,s$

Gesamte Flugzeit des Balls: $t_{ges} = 2\,t_H = 2{,}654\,s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges} $x(t_{ges}) = v_{x0}\,t_{ges} = 29{,}54\,m$

1c. Maximum der Reichweite bei einem Winkel von 45°. Die Geschwindigkeit $v_0 = 17{,}3\,m\,s^{-1}$ kann in x,y-Komponenten zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 12{,}25\,m\,s^{-1}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 45° = 12{,}25\,m\,s^{-1}.$$

Steigzeit: $t_H = \frac{v_{y0}}{g} = 1{,}225\,s$

Gesamte Flugzeit: $t_{ges} = 2\,t_H = 2{,}449\,s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges}: $x(t_{ges}) = v_{x0}\,t_{ges} = 30{,}0\,m$

2a. **Lösungsweg auf der Basis von Kräften und Momenten:**

Der Körper mit der Masse m fällt gleichmäßig beschleunigt.

Gleichm. beschleunigte Bewegung: $s = \frac{1}{2} a\,t^2$

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2m}{16\,s^2} = 0{,}125\,m\,s^{-2}$$

Kräfte, die auf m wirken: Gewichtskraft F_g und entgegengesetzt die Seilkraft F_S

D'Alembertsches Prinzip für m: $\left(\sum_i F_i\right) - m\,a = 0 = \left(F_g - F_S\right) - ma$

Die Seilkraft F_S erzeugt ein Drehmoment am System Rad/Achse:

$$M = F_S \cdot R$$

Das Drehmoment erzeugt eine Winkelbeschleunigung::

$$M = J \cdot \alpha$$

Für Beschleunigung a der Masse m und Winkelbeschleunigung α vom System Rad/Achse gilt der Zusammenhang:

$$a = R \cdot \alpha$$

Es folgt: $$F_S \cdot R = J \frac{a}{R}$$

$$F_S = J \frac{a}{R^2}$$

Es folgt: $$\left(F_g - F_S\right) - ma = m\left(g - a\right) - \frac{J\,a}{R^2} = 0$$

$$J = m R^2 \frac{g-a}{a}$$

$$J = 5 \cdot \left(0,05\right)^2 \frac{10-0,125}{0,125} kg\, m^2 = 0.9875\, kg\, m^2$$

2b. Lösung mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes:

Setze (oBdA) die Gesamtenergie im Ausgangszustand (Index 0) gleich Null. Dann ist im Endzustand (Index 1) (also dann, wenn die Masse m die Strecke $s = 1m$ gefallen ist) die Gesamtenergie ebenfalls Null.

$$E_{ges,0} = 0 = E_{pot,1} + E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{trans} = E_{ges,1}$$

Potentielle Energie im Endzustand: $$E_{pot,1} < E_{pot,0} = 0$$

Kinetische Energie der Rotation: $$E_{kin,1}^{rot} > E_{kin,0}^{rot} = 0$$

Kinetische Energie der Translation: $$E_{kin,1}^{trans} > E_{kin,0}^{trans} = 0$$

Es folgt: $$-E_{pot,1} = E_{kin,1}^{trans} + E_{kin,1}^{rot}$$

$$-\left(m\,g\left(-s\right)\right) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J\,\omega^2$$

Es gilt: $$\omega = \frac{v}{R}$$

Einsetzen von ω: $$m\,g\,s = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2}$$

Umstellen: $$J = \left(2\,m\,g\,s - m v^2\right) \frac{R^2}{v^2}$$

$$J = mR^2 \left(\frac{2\,g\,s}{v^2} - 1\right)$$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$$s = \frac{1}{2} a\,t^2$$

und: $$v = a\,t \text{ oder } a = \frac{v}{t}$$

Einsetzen von a: $$v = \frac{2s}{t^2} t = \frac{2s}{t}$$

$$J = mR^2 \left(\frac{2\,g\,s\,t^2}{4s^2} - 1\right) = mR^2 \left(\frac{g\,t^2}{2\,s} - 1\right)$$

$$J = 5\,kg \cdot 0{,}05^2\,m^2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 4^2}{2 \cdot 1} - 1\right)$$

$$J = 0{,}0125\,kg\,m^2 \cdot 79 = 0{,}9875\,kg\,m^2$$

3a. Bestimmung der Geschwindigkeit der Masse m vor dem Stoß mit der Masse M :

Bezeichnung: Index (0) für Ausgangsposition, Index (1) für Position vor dem Stoß mit M . Die potentielle Energie in Position (1) wird Null gesetzt.

Energieerhaltungssatz: $$E_{ges,0} = m\,g\,h + \frac{1}{2} m\,v_0^2 = \frac{1}{2} m\,v_1^2 = E_{ges,1}$$

es folgt für Geschwindigkeit v_1: $$v_1 = \sqrt{2\,g\,h + v_0^2} = \sqrt{16+9}\,\frac{m}{s} = 5\,\frac{m}{s}$$

Bestimmung der Horizontalgeschwindigkeit der Masse M nach dem Stoß mit m :

Prinzip der Überlagerung: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung in vertikaler Richtung und gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung.

Notation: Zeit vom Verlassen der Ebene bis zum Aufschlagpunkt: t_2

Geschwindigkeit der Masse M nach dem Stoß mit Masse m : u_M

Vertikal: $$H = \frac{1}{2} g\,t_2^2$$

Horizontal: $$x = u_M\,t_2$$

Lösung für u_M : $$u_M = \frac{x}{t_2} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} = \frac{0{,}5590\,m}{0{,}4472\,s} = 1{,}25\,\frac{m}{s}$$

Verhältnis $\frac{u_M}{v_1}$ $$\frac{u_M}{v_1} = \frac{1{,}25\,m\,s^{-1}}{5\,m\,s^{-1}} = \frac{1}{4}$$

Erhaltungssätze für einen unelastischen (aber nicht vollkommen unelastischen) **Stoß der Massen m und M :**

Impulserhaltungssatz: $$m\,v_1 = m\,u_m + M\,u_M$$

Umformung: $$\frac{u_m}{v_1} = 1 - \frac{M}{m}\frac{u_M}{v_1} \qquad (*)$$

Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m\,v_1^2 = \frac{1}{2} m\,u_m^2 + \frac{1}{2} M\,u_M^2 + Q$$

Gesuchte Größe: $$\varepsilon = \frac{Q}{\frac{1}{2} m\,v_1^2}$$

einsetzen: $$\frac{1}{2} m\,v_1^2 = \frac{1}{2} m\,u_m^2 + \frac{1}{2} M\,u_M^2 + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} m\,v_1^2$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} m\,v_1^2 - \frac{1}{2} m\,u_m^2 - \frac{1}{2} M\,u_M^2}{\frac{1}{2} m\,v_1^2} = \frac{v_1^2 - u_m^2 - \frac{M}{m} u_M^2}{v_1^2}$$

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{u_m}{v_1}\right)^2 - \frac{M}{m}\left(\frac{u_M}{v_1}\right)^2$$

Einsetzen von (*): $$\varepsilon = 1 - \left(1 - \frac{M}{m}\frac{u_M}{v_1}\right)^2 - \frac{M}{m}\left(\frac{u_M}{v_1}\right)^2$$

Einsetzen: $\frac{M}{m} = 5$ und $\frac{u_M}{v_1} = \frac{1}{4}$

$$\varepsilon = 1 - \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{5}{16} = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$$

$$\varepsilon = 62{,}5\,\%$$

4. Das Trägheitsmoment der gezeigten Scheibe ergibt sich als Differenz der einer homogenen Scheibe mit Radius R_0 ohne Loch (Index 0, also Masse m_0) und einer homogenen Scheibe mit Radius R_1 (Index 1, also Masse m_1), deren Schwerpunkt um die Strecke h gegenüber der Drehachse versetzt ist.

Trägheitsmoment der Scheibe (0): $J_0 = \frac{1}{2} m_0 R_0^2$

Trägheitsmoment der Scheibe (1): $J_{S,1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$

Gesamtes Trägheitsmoment J unter Verwendung des Steinerschen Satzes:

$$J = J_0 - \left(J_{S,1} + m_1 h^2\right)$$

Da die Scheibe homogen ist, verhalten sich die Massen proportional zu den Flächen:

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_0^2} = \frac{R_1^2}{R_0^2}$$

Masse der Scheibe mit Loch: $m = m_0 - m_1 = m_0\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) = m_0\left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right)$

Einsetzen:

$$\frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} m_0 R_0^2 - \frac{1}{2} m_1 R_1^2 - m_1 h^2}{(m_0 - m_1) R_0^2}$$

$$\frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} m_0 - \frac{1}{2} m_1 \frac{R_1^2}{R_0^2} - m_1 \frac{h^2}{R_0^2}}{m_0 - m_1}$$

$$\frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} m_0 - \frac{1}{2} m_1 \frac{R_1^2}{R_0^2} - m_1 \frac{h^2}{R_0^2}}{m_0\left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right)}$$

$$\frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_0} \frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{m_1}{m_0} \frac{h^2}{R_0^2}}{\left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R_1^2}{R_0^2}\right)^2 - \frac{R_1^2}{R_0^2} \frac{h^2}{R_0^2}}{\left(1 - \frac{R_1^2}{R_0^2}\right)}$$

$$k = \frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)}$$

$$k = \frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{162} - \frac{1}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{162 - 2 - 9}{324}}{\frac{8}{9}}$$

$$k = \frac{J}{m R_0^2} = \frac{\frac{162-2-9}{324}}{\frac{8}{9}} = \frac{151}{324} \cdot \frac{9}{8} = \frac{151}{36 \cdot 8} = \frac{151}{288}$$

$$k = \frac{J}{m R_0^2} = \frac{151}{288} = 0{,}5243$$

5. Die Scheibe besitzt in der Ausgangsposition den Drehimpuls $L_{Sch,0}$

$$L_{Sch,0} = J_{Sch} \cdot \omega_{Sch,0}$$

Drehimpuls des Stabes in der Ausgangsposition:

$$L_{St,0} = 0$$

In der Endposition drehen Scheibe und Stab mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit.

Drehimpuls der Endposition: $L_{Sch+St,1} = J_{Sch+St} \cdot \omega_{Sch+St,1} = \left(J_{Sch} + J_{St}\right) \cdot \omega_{Sch+St,1}$

Drehimpulserhaltungssatz: $L_{Sch,0} + L_{St,0} = L_{Sch,0} + 0 = L_{Sch+St,1}$

$$L_{Sch,0} = J_{Sch} \cdot \omega_{Sch,0} = \left(J_{Sch} + J_{St}\right) \cdot \omega_{Sch+St,1} = L_{Sch+St,1}$$

$$\omega_{Sch+St,1} = \frac{J_{Sch}}{J_{Sch} + J_{St}} \cdot \omega_{Sch,0}$$

Massenträgheitsmoment der Scheibe: $J_{Sch} = \frac{1}{2} m_{Sch} R^2$

Massenträgheitsmoment des Stabes: $J_{St} = \frac{1}{12} m_{St} L^2 = \frac{1}{12} m_{St} \left(2R\right)^2 = \frac{1}{3} m_{St} R^2$

da die Massen gleich sind gilt: $\omega_{Sch+St,1} = \frac{\frac{1}{2} m R^2}{\frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{3} m R^2} \cdot \omega_{Sch,0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3+2}{6}} \cdot \omega_{Sch,0}$

$$\omega_{Sch+St,1} = \frac{3}{5} \cdot \omega_{Sch,0} = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot n_{Sch} = 2\pi \cdot 6\, s^{-1}$$

Gemeinsame Drehzahl: $n_{Sch+St,1} = \frac{\omega_{Sch+St,1}}{2\pi} = 6\, s^{-1}$