Fachhochschule Hannover | vorgezogen Wiederholungsklausur | 09.03.07
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 0607 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

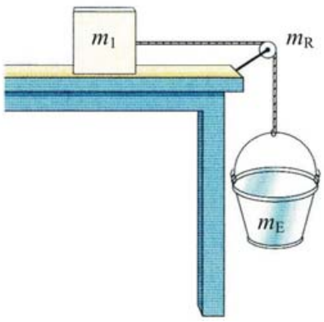
1. Ein Ball wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus der Höhe H horizontal geworfen. Nach $t_1 = 1s$ trifft er auf den Boden bei $H = 0$. Der Betrag der Auftreffgeschwindigkeit v_1 ist zweimal so groß wie der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

a. Wie groß ist v_0? (10)

b. Wie groß ist H? (5)

c. Welche horizontale Strecke hat der Ball zurückgelegt? (5)

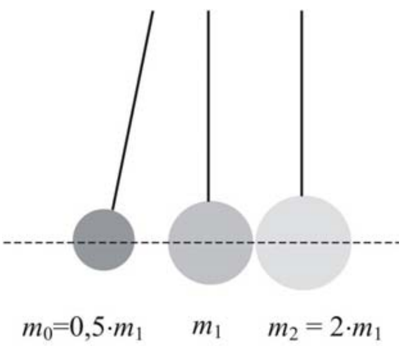
2. Eine Masse $m_1 = 10\,kg$, die auf einem Tisch ruht, ist über ein Seil mit einem Eimer (Masse des leeren Eimers $m_E = 1 kg$) verbunden. Das (masselose) Seil wird über eine zylinderförmige Umlenkrolle mit $m_R = 1 kg$ umgelenkt.



a. Die Haftreibungszahl der Masse m_1 auf dem Tisch beträgt $\mu_{H,\max} = 0,5$. Welche Masse Wasser muss in den Eimer gefüllt werden, damit die Masse gleitet? (10)

b. Die Gleitreibungszahl der Masse m_1 auf dem Tisch beträgt $\mu_{H,\max} = 0,4$. Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Eimer mit der in **2a.** bestimmten Masse Wasser gefüllt ist? (20)

3. Eine Pendelmasse $m_0 = \frac{1}{2} m_1$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 1\,m\,s^{-1}$ stößt elastisch auf zwei in Ruhe nebeneinander hängende Pendel mit der Masse m_1 und $m_2 = 2 m_1$ (siehe Abb.). Beim Stoßvorgang befinden sich alle Schwerpunkte auf gleicher Höhe (gestrichelten Linie).



a. Wie groß ist nach dem Stoß die Geschwindigkeit u_0 der Masse m_0 und die Geschwindigkeit u_2 der Masse m_2? (15)

b. Wie viel Prozent der ursprünglichen Energie von m_0 wird auf m_2 übertragen? (10)

c. Wo befindet sich die Restenergie nach den Stoßvorgängen? (10)

4. Ein Schleifstein, der als Vollzylinder mit der Masse $m = 2\,kg$ und Radius $R = 5\,cm$ betrachtet werden kann, wird im Betriebzustand durch einen Motor auf einer Drehzahl $n_0 = 1200\,\text{min}^{-1}$ gehalten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schleifstein vom Motor abgekuppelt und mit konstantem Drehmoment abgebremst. Nach $t_1 = 10\,s$ beträgt die Drehzahl $n_1 = 720\,\text{min}^{-1}$.

a. Wie groß ist das Bremsmoment M_B? (10)

b. Wie groß ist die maximale, wie groß die mittlere Bremsleistung? (10)

c. Welchen Drehimpuls hat der Schleifstein zum Zeitpunkt t_1? (5)

d. Wie viele Umdrehungen macht der Schleifstein nach dem Abkuppeln des Motors bis zum Stillstand? (5)

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Kinematische Lösung:

Betrag Geschwindigkeit am Anfang: $\left|\vec{v}_0\right| = \sqrt{v_x^2} = \sqrt{v_0^2}$

Betrag Geschwindigkeit am Ende: $\left|\vec{v}_1\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(g\,t_1\right)^2}$

Laut Aufgabenstellung gilt: $\left|\vec{v}_1\right| = 2 \cdot \left|\vec{v}_0\right|$

Einsetzen: $\sqrt{v_0^2 + \left(g\,t_1\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{v_0^2}$

$$\left(g\,t_1\right)^2 = 4 \cdot v_0^2 - v_0^2 = 3 v_0^2$$

$$v_0 = \frac{g\,t_1}{\sqrt{3}} = 5{,}77\; m\,s^{-1}$$

Lösung mit Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin,0} + E_{pot,0} = E_{kin,1}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m\,g\,H = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m\,g\,H = \frac{1}{2} m \left(2 v_0\right)^2$$

$$v_0^2 + 2g\,H = 4 v_0^2$$

Verwende $H = \frac{1}{2} g\,t_1^2$ $\quad 3 v_0^2 = 2g\,H = 2g\left(\frac{1}{2} g\,t_1^2\right)$ (*)

$$v_0 = \frac{g\,t_1}{\sqrt{3}} = 5{,}77\; m\,s^{-1}$$

1b. Verwende (*) $\quad 3 v_0^2 = 2g\,H$

$$H = \frac{3 v_0^2}{2\,g} = \frac{3 \cdot 50}{2 \cdot 10} m = 5 m$$

1c. Horizontaler Weg $\quad s_x = v_0 \cdot t_1 = 5{,}77\, m$

2a. Die Masse m_1 bewegt sich, wenn die Gewichtskraft von Eimer und Wasserfüllung $F_{g,E} + F_{g,W}$ größer ist, als die Haftreibungskraft $F_{H,\max}$.

$$F_{g,E} + F_{g,W} = \left(m_E + m_W\right) g > \mu_{H,\max}\, m_1\, g = F_{H,\max}$$

Lösung $\quad m_W > \mu_{H,\max}\, m_1 - m_E = 0{,}5 \cdot 10\, kg - 1 kg = 4\, kg$

2b. D'Alembertsches Prinzip für m_E: $\quad \left(\left(F_{g,E} + F_{g,W}\right) - F_{Sr}\right) - \left(m_E + m_W\right) a = 0$ (*)

mit $\quad F_{Sr}$ - Seilkraft rechts der Umlenkrolle

Die Seilkraft erzeugt ein Drehmoment M_R an der Umlenkrolle.

Es gilt: $\quad F_{Sr} = \frac{M_R}{R} + F_{Sl}$

mit $\quad F_{Sl}$ - Seilkraft links der Umlenkrolle

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\quad \left(F_{Sl} - F_G\right) - m_1\, a = 0$ (**)

mit $\quad F_G$ - Gleitreibungskraft der Masse m_1

Es folgt aus(**): $\quad F_{Sl} = F_G + m_1\, a$

Einsetzen in (*): $\left(\left(m_E + m_W\right) g - \frac{M_R}{R} - F_G - m_1\, a\right) - \left(m_E + m_W\right) a = 0$

mit: $M_R = J\,\alpha = \frac{1}{2} m_R\, R^2 \frac{a}{R}$

und: $F_G = \mu_G\, m_1\, g$

Einsetzen: $\left(\left(m_E + m_W\right) g - \frac{\frac{1}{2} m_R R^2 \frac{a}{R}}{R} - \mu_G\, m_1\, g\right) - \left(m_E + m_W + m_1\right) a = 0$

$$\left(m_E + m_W - \mu_G\, m_1\right) g - \left(\frac{1}{2} m_R + m_E + m_W + m_1\right) a = 0$$

$$a = \frac{m_E + m_W - \mu_G\, m_1}{0{,}5\, m_R + m_E + m_W + m_1}\, g = \frac{1 + 4 - 0{,}4 \cdot 10}{0{,}5 + 1 + 4 + 10} \cdot g$$

Ergebnis: $a = \frac{1}{15{,}5} \cdot g = \frac{2}{31} \cdot g = 0{,}0645 \cdot g = 0{,}645\, m\, s^{-2}$

3a. Es handelt sich um zwei separate zentral elastische Stöße: Zunächst stößt m_0 auf m_1, dann stößt m_1 auf m_2.

Allgemeine Gleichungen für die Stoßpartnern m_1 mit $\vec{v}_1$ (vorher) und $\vec{u}_1$ (nachher) und m_2 mit $\vec{v}_2$ und $\vec{u}_2$ für einen zentralen elastischen Stoß (siehe Formelsammlung):

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2$$

1. Anwendung auf ersten Stoß: $m_0 = \frac{1}{2} m_1$ **mit** $v_0 = 1\, m\, s^{-1}$ **stößt auf** m_1 **mit** $v_1 = 0$**:**

Geschwindigkeit u_0 von m_0 nach dem ersten Stoß:

$$u_0 = \frac{2m_1}{m_0 + m_1} v_1 + \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} v_0$$

Lösung: $u_0 = \frac{0{,}5\, m_1 - m_1}{0{,}5 m_1 + m_1} v_0 = -\frac{0{,}5}{1{,}5} v_0 = -0{,}3333\, m\, s^{-1}$

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem ersten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} v_0 + \frac{m_1 - m_0}{m_0 - m_1} v_1$$

$$u_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} v_0 = \frac{2 \cdot 0{,}5}{1{,}5} v_0 = \frac{1}{1{,}5} v_0 = 0{,}6666\, m\, s^{-1}$$

2. Anwendung auf zweiten Stoß: m_1 **mit** $v_1 = 0{,}666\, m\, s^{-1}$ **stößt auf** $m_2 = 2\, m_1$ **mit** $v_2 = 0$**:**

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem zweiten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 2}{1 + 2} v_1$$

$$u_1 = -0{,}3333 \cdot 0{,}6666\, m\, s^{-1} = -0{,}2222\, m\, s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_2 von m_2 nach dem zweiten Stoß:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{1+2} v_1 = 0{,}6666 \cdot 0{,}6666\, m\, s^{-1}$$

Ergebnis: $u_2 = 0{,}6666 \cdot 0{,}6666\, m\, s^{-1} = 0{,}4444\, m\, s^{-1}$

3b. Energie der Masse m_0 vor dem ersten Stoß:

$$E_{kin,0}^{vorher} = \frac{1}{2} m_0\, v_0^2 = \frac{1}{2}(0{,}5\, m_1)1^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0{,}2500 \frac{m^2}{s^2}$$

Energie der Masse m_2 nach dem zweiten Stoß:

$$E_{kin,2}^{nachher} = \frac{1}{2} m_2\, u_2^2 = \frac{1}{2} 2\, m_1 \cdot 0{,}4444^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0{,}1975 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $P_1 = \dfrac{E_{kin,2}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = \dfrac{0{,}1975}{0{,}2500} = 79{,}0\%$

3c. Restenergie entspricht der kinetischen Energie der Massen m_0 und m_1.

Energie der Masse m_0 nach dem ersten Stoß:

$$E_{kin,0}^{nachher} = \frac{1}{2} m_0\, u_0^2 = \frac{1}{2}(0{,}5\, m_1) \cdot (-0{,}3333)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,0}^{nachher} = \frac{1}{2}(0{,}5\, m_1) \cdot (-0{,}3333)^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0{,}0278 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $P_2 = \dfrac{E_{kin,0}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = \dfrac{0{,}0278}{0{,}2500} = 11{,}1\%$

Energie der Masse m_1 nach dem zweiten Stoß:

$$E_{kin,1}^{nachher} = \frac{1}{2} m_0\, u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot (-0{,}2222)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,0}^{nachher} = \frac{1}{2} m_1 \cdot (-0{,}2222)^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0{,}0247 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $P_3 = \dfrac{E_{kin,0}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = \dfrac{0{,}0247}{0{,}2500} = 9{,}9\%$

Prüfung: $P_1 + P_2 + P_3 = 79{,}0\,\% + 11{,}1\% + 9{,}9\,\% = 100{,}0\,\%$

4a. Drehmoment ist gleich Massenträgheitsmoment mal Winkelbeschleunigung:

$$M_B = J\, \alpha$$

Massenträgheitsmoment: $J = \dfrac{1}{2} m\, R^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2\, kg \cdot (0{,}05)^2\, m^2 = 0{,}0025\, kg\, m^2$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = \dfrac{2\pi \cdot (n_1 - n_0)}{t_1 - t_0}$

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot (n_1 - n_0)}{t_1 - t_0} = \frac{2\pi \cdot (720 - 1200) \min^{-1}}{(10 - 0)\, s}$$

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot (720-1200)}{(10-0) \cdot 60\, s^2} = -5{,}03\, s^{-2}$$

Ergebnis: $$M_B = J\,\alpha = -0{,}0025 \cdot 5{,}03\, kg\, \frac{m^2}{s^2} = -0{,}0126\, kg\, \frac{m^2}{s^2}$$

4b. Bremsleistung wurde in der Vorlesung als Quotient von Arbeit und Zeit oder als Produkt von Kraft und Geschwindigkeit hergeleitet. Überträgt man die physikalischen Größen für die Translation auf die entsprechenden Größen der Rotation, so folgt, dass Leistung auch als Produkt von Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden kann.

Leistung: $$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cdot v = M \cdot \omega$$

Maximalleistung: $$P_{\max} = |M_B| \cdot \omega_0 = |-0{,}0126|\, kg\, \frac{m^2}{s^2} \cdot 1200\, \text{min}^{-1}$$

Ergebnis Maximalleistung: $$P_{\max} = 0{,}0126\, kg\, \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{2\pi \cdot 1200}{60\, s} = 1{,}579\, \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Mittlere Leistung (1): $$P_{mittel} = |M_B| \cdot \omega_{mittel} = |M_B| \cdot \frac{\omega_{\max}}{2}$$

Ergebnis mittlere Leistung (1): $$P_{mittel} = \frac{P_{\max}}{2} = 0{,}7896\, \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Mittlere Leistung (2): $$P_{mittel} = \frac{\Delta W_{ges}}{\Delta t_{ges}} = \frac{\frac{1}{2} J\, \omega_0^2}{\Delta t_{ges}}$$

Gesamtzeit des Abbremsens: $$\Delta t_{ges} = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot \frac{1200}{60}\, s^{-1}}{5{,}03\, s^{-2}} = 25{,}0\, s$$

$$P_{mittel} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}0025 \cdot 4\pi^2 \cdot 20^2}{25} \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Ergebnis mittlerer Leistung (2): $$P_{mittel} = 0{,}7896\, \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

4c. Drehimpuls (1): $$L = J \cdot \omega$$

Drehimpuls bei t_1: $$L(t_1) = J \cdot \omega_1 = 0{,}0025\, kg\, m^2 \cdot 2\pi \frac{720}{60} s^{-1}$$

Ergebnis (1): $$L(t_1) = J \cdot \omega_1 = 0{,}1885\, \frac{kg\, m^2}{s}$$

Drehimpuls (2) $$M_B = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t_1) - L(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$L(t_1) = M_B \cdot (t_1 - t_0) + L(t_0)$$

$$L(t_1) = -0{,}0126\, \frac{kg\, m^2}{s^2} \cdot 10\, s + 0{,}0025 \cdot \frac{2\pi \cdot 1200}{60} \frac{kg\, m^2}{s}$$

Ergebnis (1): $$L(t_1) = (-0{,}1257 + 0{,}3142) \frac{kg\, m^2}{s} = 0{,}1885 \frac{kg\, m^2}{s}$$

4d. Zahl der Umdrehungen bis zum Stillstand:

$$N = \int_{t=0}^{t_{ges}} n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t_{ges}} \omega(t)\, dt$$

Die Funktion $\omega(t)$ ist linear fallend von ω_0 bis $\omega = 0$. Das Integral entspricht einer Dreicksfläche mit den Seiten $t_{ges} = 25\,s$ und $\omega(t=0) = 2\pi\frac{1200}{60}s^{-1} = 125{,}66\,s^{-1}$

Ergebnis: $$N = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{125{,}66\,s^{-1}\cdot 25\,s}{2} = 250$$