Fachhochschule Hannover | 06.07.07
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im SS07 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Auf einer ebenen Kreisbahn mit Durchmesser von 200 m wird ein Motorrad getestet. Die Testfahrt erfolgt zunächst gleichmäßig beschleunigt bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit und anschließend gleichförmig. Zur Kontrolle der Beschleunigung befinden sich Lichtschranken im Abstand von 10 m und 22,5 m nach dem Start zur Messung der Zeitdifferenz Δt.

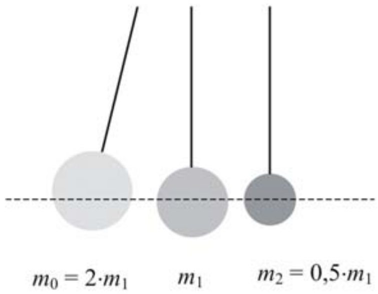
a. Wie groß ist Δt, wenn die Bahnbeschleunigung $a_B = 5\,m\,s^{-2}$ beträgt?

b. Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$, die dadurch gegeben sein soll, dass das Motorrad eine Schräglage von 45° erreicht hat?

c. Der Weg bis zum Erreichen von $v_{\max}$ sei $S_{\max}$. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung nach der Wegstrecke $S_{\max}/2$ und welche Schräglage hat das Motorrad an diesem Punkt?

d. Welche Zeit benötigt das Motorrad für die ersten fünf Runden?

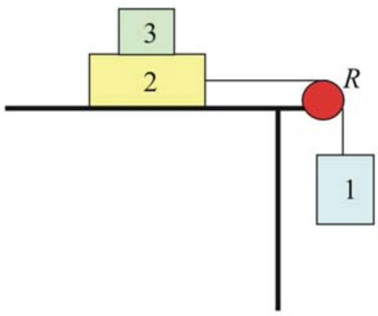
2. Ein Pendel mit der Masse $m_0 = 2 \cdot m_1$ und der Geschwindigkeit $v_0 = 1\,m\,s^{-1}$ stößt elastisch auf zwei in Ruhe nebeneinander hängende Pendel mit der Masse m_1 und $m_2 = 0{,}5\,m_1$.
Beim Stoßvorgang befinden sich alle Schwerpunkte auf gleicher Höhe (gestrichelte Linie).



a. Wie groß ist die Geschwindigkeit u_0 der Masse m_0 und die Geschwindigkeit u_2 der Masse m_2 nach dem Stoß?

b. Welcher Anteil der ursprünglichen Energie von m_0 wird auf m_2 übertragen?

3. Auf einem Tisch liegen zwei Blöcke $m_2 = 2\,kg$ und $m_3 = 1\,kg$ übereinander. Die Gleitreibungszahlen zwischen Block (**2**) und dem Tisch und zwischen den beiden Blöcken (**2**) und (**3**) betragen $\mu_G = 0{,}20$, die Haftreibungszahl $\mu_{H,\max} = 0{,}25$. Die Blöcke (**1**) und (**2**) sind mit einem Seil verbunden, das über eine Umlenkrolle (**R**) der Masse $m_R = 1\,kg$ geführt ist.



a. Wie groß muss die Masse des Blocks (**1**) mindestens sein (m_{1a}), damit Block (**2**) zusammen mit (**3**) relativ zum Tisch bewegt werden kann?

b. Wie groß darf die Masse des Blocks (**1**) höchstens sein (m_{1b}), damit sich Block (**3**) relativ zu Block (**2**) nicht bewegt?

c. Wie groß ist die Beschleunigung von Block (**2**), wenn $m_1 = 1{,}5\,kg$?

d. Wie groß ist die Beschleunigung von Block (**2**) und Block (**3**), wenn $m_1 = 3\,kg$? (10) (ZP10)
(Teil **d.** ist Zusatzaufgabe. Hinweis zu **c.** und **d.**: Man überlege zunächst, was bei gegebenem m_1 entsprechend den Lösungen von **a.** und **b.** mit dem Block (**3**) passiert).

4. Ein Schleifstein (Vollzylinder der Masse $4\,kg$ und Radius $8\,cm$) wird durch einen Motor auf der Drehzahl $1500\,\text{min}^{-1}$ gehalten. Bei $t_0 = 0$ wird der Schleifstein abgekuppelt und mit konstantem Drehmoment gebremst. Bei $t_1 = 20\,s$ beträgt die Drehzahl $900\,\text{min}^{-1}$.

a. Wie groß ist das Bremsmoment M_B?

b. Wie groß ist die maximale, wie groß die mittlere Bremsleistung?

c. Wie viele Umdrehungen macht der Schleifstein nach dem Abkuppeln bis zum Stillstand?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Für Lichtschranke 1 gilt: $s_1 = \frac{1}{2} a_B t_1^2$ (*)

Für Lichtschranke 2 gilt: $s_2 = \frac{1}{2} a_B t_2^2$

mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $t_2 = t_1 + \Delta t$

und $\Delta s = s_2 - s_1 = 12{,}5\,m$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} a_B t_2^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2 = \frac{1}{2} a_B \left(t_1 + \Delta t\right)^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + a_B t_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_B \Delta t^2 - \frac{1}{2} a_B t_1^2$$

$$\frac{1}{2} a_B \Delta t^2 + a_B t_1 \Delta t = \Delta s$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{t_1^2 + \frac{2\,\Delta s}{a_B}} - t_1$$

aus (*) folgt: $t_1 = \sqrt{\frac{2\,s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = \sqrt{4}\ s = +2\,s$

(nur pos. Lös. möglich)

$$\Delta t = \pm\sqrt{t_1^2 + \frac{2\,\Delta s}{a_B}} - t_1$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{4\,s^2 + \frac{2 \cdot 12{,}5\,m}{5\,m\,s^{-2}}} - 2\,s$$

$$\Delta t = \pm\sqrt{4\,s^2 + 5\,s^2} - 2\,s = \left(\pm 3 - 2\right) s$$

nur pos. Lösung möglich: $\Delta t_1 = +1\,s$

Es geht aber auch einfacher, wenn man gleich mit Zahlen rechnet.

Für Lichtschranke 1 gilt: $s_1 = \frac{1}{2} a_B t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a_B}} = \sqrt{\frac{20\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = 2\,s$

Für Lichtschranke 2 gilt: $s_2 = \frac{1}{2} a_B t_2^2 \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{a_B}} = \sqrt{\frac{45\,m}{5\,m\,s^{-2}}} = 3\,s$

Lösung: $\Delta t = t_2 - t_1 = 3\,s - 2\,s = 1\,s$

1b. Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung gleich dem Betrag der Erdbeschleunigung.

Es gilt: $\frac{v_{\max}^2}{R} = g$

Es folgt: $v_{\max} = \sqrt{R\,g} = \sqrt{100\,m \cdot 10\,m\,s^{-2}} = 31{,}62\,\frac{m}{s}$

$$v_{\max} = 31{,}62\frac{m}{s} = 114\frac{km}{h}$$

1c. Zeit zum Erreichen von $v_{\max}$: $t_{\max} = \frac{v_{\max}}{a_B} = \frac{31{,}62\,m\,s^{-1}}{5\,m\,s^{-2}} = 6{,}32\,s$

Gesamte Fahrtstrecke bis $v_{\max}$: $s_{\max} = \frac{1}{2}a_B\,t_{\max}^2 = \frac{1}{2}5\,m\,s^{-2}\,(6{,}32\,s)^2 = 100\,m$

Halbe Fahrtstrecke: $\frac{s_{\max}}{2} = 50\ m$

Für $\frac{s_{\max}}{2}$ gilt: $\frac{s_{\max}}{2} = \frac{1}{2}a_B\,t_{\max/2}^2 = \frac{v^2(s_{\max/2})}{2\cdot a_B}$

Geschwindigkeit bei $\frac{s_{\max}}{2}$: $v(s_{\max/2}) = \sqrt{2\,a_B\frac{s_{\max}}{2}} = \sqrt{2\cdot 5\cdot 50}\ \frac{m}{s} = 22{,}36\frac{m}{s}$

Die Gesamtbeschleunigung ist die Vektorsumme von Radial- und der Tangentialbeschleunigung.

Radialbeschleunigung: $a_R = \frac{\left[v(s_{\max/2})\right]^2}{R} = \frac{500\,m^2 s^{-2}}{100\,m} = 5\,m\,s^{-2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_t = a_B = 5\,m\,s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} = \sqrt{5^2+5^2}\ m\,s^{-2} = 7{,}07\,m\,s^{-2}$

Schräglage: Winkel φ gegen die Senkrechte mit Gegenkathete a_R und Ankathete g

$$\tan\varphi = \frac{5\ m\,s^{-2}}{10\ m\,s^{-2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 27°$$

1d. Zeit für die ersten fünf Runden:

Gesamtlänge von fünf Runden: $s_{ges} = 5\cdot(\pi\cdot D) = 3142\ m$

Weg für Beschleunigung: $s_a = s_{\max} = 100\,m$ in $t_a = t_{\max} = 6{,}32\,s$

Weg für gleichförmige Bewegung: $s_v = s_{ges} - s_a = (3142-100)\,m = 3042\,m$

Zeit für gleichförmige Bewegung: $t_v = \frac{s_v}{v_{\max}} = \frac{3042m}{31{,}62\,m\,s^{-1}} = 96{,}2\,s$

Zeit für fünf Runden: $t_{ges} = t_a + t_v = (6{,}32+96{,}20)\,s = 102{,}5\,s$

2a. Es handelt sich um <u>zwei separate</u> zentral elastische Stöße: Zunächst stößt m_0 auf m_1, dann stößt m_1 auf m_2.

Die allgemeine Gleichungen für die Stoßpartner m_1 mit $\vec{v}_1$ (vorher) und $\vec{u}_1$ (nachher) und m_2 mit $\vec{v}_2$ und $\vec{u}_2$ für einen zentralen elastischen Stoß lauten (siehe Formelsammlung):

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_2$$

1. Anwendung auf ersten Stoß: $m_0 = 2\,m_1$ mit $v_0 = 1\,m\,s^{-1}$ stößt auf m_1 mit $v_1 = 0$:

Geschwindigkeit u_0 von m_0 nach dem ersten Stoß:

$$u_0 = \frac{2m_1}{m_0+m_1}v_1 + \frac{m_0-m_1}{m_0+m_1}v_0$$

Lösung: $u_0 = \frac{2\,m_1 - m_1}{2m_1+m_1}v_0 = +\frac{1}{3}v_0 = +0,3333\,m\,s^{-1}$

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem ersten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_0}{m_0+m_1}v_0 + \frac{m_1-m_0}{m_0-m_1}v_1$$

$$u_1 = \frac{2\cdot 2\,m_1}{2\,m_1+m_1}v_0 = \frac{2\cdot 2}{3}v_0 = \frac{4}{3}v_0 = 1,3333\,m\,s^{-1}$$

2. Anwendung auf zweiten Stoß: m_1 mit $v_1 = 1,3333\,m\,s^{-1}$ stößt auf $m_2 = 0,5\,m_1$ mit $v_2 = 0$:

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem zweiten Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

$$u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 = \frac{m_1-0,5\,m_1}{m_1+0,5\,m_1}v_1 = \frac{0,5}{1,5}v_1$$

$$u_1 = 0,3333\cdot 1,333\,m\,s^{-1} = -0,4444\,m\,s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_2 von m_2 nach dem zweiten Stoß:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1-m_2}v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{2}{1+0,5}v_1 = 1,3333\cdot 1,3333\,m\,s^{-1}$$

Ergebnis: $u_2 = 1,3333\cdot 1,3333\,m\,s^{-1} = 1,7777\,m\,s^{-1}$

2b. Energie der Masse m_0 vor dem ersten Stoß:

$$E_{kin,0}^{vorher} = \frac{1}{2}m_0\,v_0^2 = \frac{1}{2}\left(2\,m_1\right)1^2\,\frac{m^2}{s^2} = m_1\cdot 1\frac{m^2}{s^2}$$

Energie der Masse m_2 nach dem zweiten Stoß:

$$E_{kin,2}^{nachher} = \frac{1}{2}m_2\,u_2^2 = \frac{1}{2}0,5\,m_1\cdot 1,7777^2\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,2}^{nachher} = \frac{1}{2}0,5\,m_1\cdot 1,7777^2\,\frac{m^2}{s^2} = m_1\cdot 0,7901\frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $P_1 = \frac{E_{kin,2}^{nachher}}{E_{kin,0}^{vorher}} = \frac{0,7901}{1,0000} = 79,0\%$

3. Bezeichnungen:

Gewichtskraft der Masse m_1: $F_{g1} = m_1\,g$

Seilkraft rechts der Rolle: F_{Sr}

Seilkraft links der Rolle: F_{Sl}

Radius der Rolle (**R**) r

Drehmoment an der Rolle: $M_R = r\cdot\left(F_{Sr} - F_{Sl}\right)$

Haftreibungskraft $F_{H,\max 2}$ und Gleitreibungskraft F_{G2} für die Kontaktfläche zwischen Block (2) und der Unterlage (Tisch):

$$F_{H,\max 2} = \mu_{H,\max} F_n = \mu_{H,\max}(m_2 + m_3)g$$
$$F_{H,\max 2} = 0,25 \cdot 3kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 7,5N$$
$$F_{G2} = \mu_G F_n = \mu_G (m_2 + m_3) g$$
$$F_{G2} = 0,20 \cdot 3kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 6\,N$$

Haftreibungskraft $F_{H,\max 3}$ und Gleitreibungskraft F_{G3} für die Kontaktfläche zwischen Block (**3**) und der Unterlage (Block (**2**)):

$$F_{H,\max 3} = \mu_{H,\max} F_n = \mu_{H,\max} m_3 g$$
$$F_{H,\max 3} = 0,25 \cdot 1kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 2,5N$$
$$F_{G3} = \mu_G F_n = \mu_G m_3 g$$
$$F_{G3} = 0,2 \cdot 1kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 2\,N$$

3a. Es handelt sich um ein **statisches Problem**: Der Block (**2**) wird bewegt, wenn die Gewichtskraft F_{g1} von Block (**1**) größer als die Haftreibungskraft $F_{H,\max 2}$ zwischen Block (**2**) und seiner Unterlage ist:

$$F_{g1} = m_{1a} g > \mu_{H,\max}(m_2 + m_3) g = F_{H,\max 2}$$
$$m_{1a} > \mu_{H,\max}(m_2 + m_3)$$
$$m_{1a} > 0,25 \cdot (2\,kg + 1\,kg) = 0,75\,kg$$

Lösung: $m_{1a} = 0,75\,kg$

3b. Der Block (**3**) haftet auf dem Block (**2**), wenn der Betrag der Trägheitskraft der Masse m_3 kleiner als der Betrag der Haftreibungskraft $F_{H,\max 3}$ zwischen Block (**3**) und seiner Unterlage ist.

$$F_{Tr3} = m_3 a_3 < \mu_{H,\max} m_3 g = 6\,N$$

Bedingung für Haftreibung: $a_3 < \mu_{H,\max} \cdot g$ (*)

Die Beschleunigung des Block (**3**) darf also einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Um den gesuchten Wert Masse m_{1b} zu ermitteln, muss zunächst die allgemeine Gleichung für die Beschleunigung im Haftreibungsfall von Block (**2**) und (**3**) ermittelt werden.

Nebenbedingung: Im Haftreibungsfall sind die Beschleunigungen von Block (**2**) und Block (**3**) gleich:

$$a_3 = a_2$$

D'Alembertsches Prinzip $\sum_i \vec{M}_i - J\,\vec{\alpha} = 0$

oder: $\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0$

Anwendung:

1. Drehmomente an der Umlenkrolle: $M_R - J_R\,\alpha_R = 0$

Einsetzen: $r(F_{Sr} - F_{Sl}) - \frac{1}{2} m_R\, r^2 \alpha_R = 0$ (Gl. c.1)

2. Kräfte an Block (1) $(F_{g1} - F_{Sr}) - m_1 a_1 = 0$ (Gl. c.2)

3. Kräfte an Block (2) und (3): $(F_{Sl} - F_{G2}) - (m_2 + m_3) a_2 = 0$ (Gl. c.3)

Hinweis: Da der Haftreibungsfall zwischen Block (2) und Block (3) angenommen wird, muss die Trägheitskraft für die Summe beider Massen $m_2 + m_3$ eingesetzt werden. Die Beschleunigung von Block (2) und (3) wird durch die Differenzkraft aus Seilkraft F_{Sl} und Gleitreibungskraft F_{G2} für Block (2) und (3) erzeugt.

4. Da die Blöcke (1) und (2) durch ein Seilverbunden sind und das Seil schlupffrei über die Rolle geführt wird, gilt: $a = a_1 = a_2 = \alpha_R \cdot r$ (Gl c.4)

Einsetzen: $\left(F_{Sl} - \mu_G\left(m_2 + m_3\right)g\right) - \left(m_2 + m_3\right)a = 0$

Es folgt: $F_{Sl} = \left(m_2 + m_3\right)\left(\mu_G\, g + a\right)$ (Gl. c.5)

Setze F_{Sl} aus Gl. c.1 in Gl. c.5: $F_{Sr} - \frac{1}{2} m_R\, r\, \alpha_R = \left(m_2 + m_3\right)\left(\mu_G\, g + a\right)$ (Gl. c.6)

Setze F_{Sr} aus Gl. c.2 und $\alpha_R\, r$ aus Gl. c.4 in Gl. c.6:

$$F_{g1} - m_1\, a - \frac{1}{2} m_R\, a = \left(m_2 + m_3\right)\left(\mu_G\, g + a\right)$$

$$m_1\, g - m_1\, a - \frac{1}{2} m_R\, a - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G\, g - \left(m_2 + m_3\right)a = 0$$

Allgemeine Lösung für a

$$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G}{m_1 + \frac{1}{2} m_R + m_2 + m_3} \cdot g \qquad \text{(Gl. c.7)}$$

Bed. für Haftreibungsfall für Block (**3**) auf Block (**2**) (siehe (*****)):

$$a = a_3 < \mu_{H,\max} \cdot g$$

Einsetzen:

$$\mu_{H,\max}\, g > \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G}{m_1 + \frac{1}{2} m_R + m_2 + m_3} \cdot g$$

$$\mu_{H,\max} > \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G}{m_1 + \frac{1}{2} m_R + m_2 + m_3}$$

$$0{,}25 > \frac{m_1 - 3\,kg \cdot 0{,}2}{m_1 + 3{,}5\,kg}$$

$$m_1 - 0{,}6\,kg < 0{,}25\, m_1 + 0.875\,kg$$

$$m_1 < \frac{\left(0{,}6 + 0{,}875\right)kg}{0{,}75} = 1{,}966\,kg$$

Gesuchter Wert der Masse m_{1b}: $m_{1b} = 1{,}966\,kg$

3c. **<u>Vorüberlegung:</u>** Die Masse des Blocks (1) $m_1 = 1{,}5\,kg$ liegt zwischen $m_{1a} = 0{,}75\,kg$ und $m_{1b} = 1{,}966\,kg$. Damit ist m_1 groß genug, um die Haftreibung zwischen Block (2) und Tisch zu überwinden, aber hinreichend klein, um den Block (3) auf Block (2) haften zu lassen.

Die allgemeine Lösung für die Beschleunigung wurde in Gl. c.7 angegeben.

Bestimmung der Beschleunigung:

$$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G}{m_1 + \frac{1}{2} m_R + m_2 + m_3} \cdot g$$

Lösung:

$$a = \frac{1{,}5 - \left(2 + 1\right) \cdot 0{,}2}{1{,}5 + 0{,}5 + 2 + 1} \cdot g = \frac{0{,}9}{5} \cdot 10\, m\, s^{-2} = 1{,}8\, m\, s^{-2}$$

3d. **<u>Vorüberlegung:</u>** Die Masse von Block (**1**) $m_1 = 3\,kg$ ist größer als $m_{1b} = 1{,}966\,kg$. Deshalb kann der Block (**3**) nicht mehr auf Block (**2**) haften. Block (**2**) wird unter Block (**3**) hindurch gleiten und über die Gleitreibungskraft F_{G3} den Block (**3**) beschleunigen. Man muss jetzt zwischen den Beschleunigungen a_2 und a_3 unterscheiden. Da Block (**1**) und Block (**2**) weiterhin über ein Seil verbunden sind und das Seil auch schlupffrei über die Rolle laufen soll, wählen wir die Bezeichnungen: $a_2 = a_1 = a$ und $a_3 \neq a$

Anwendung des D'Alembertsches Prinzips:

1. Drehmomente an der Umlenkrolle: $M_R - J_R\,\alpha_R = 0$

Einsetzen: $r\left(F_{Sr} - F_{Sl}\right) - \frac{1}{2} m_R\, r^2 \alpha_R = 0$ (Gl. d.1)

2. Kräfte an Block (1) $\left(F_{g1} - F_{Sr}\right) - m_1\, a_1 = 0$ (Gl. d.2)

3. Kräfte an Block (2): $\left(F_{Sl} - F_{G2} - F_{G3}\right) - m_2\, a_2 = 0$ (Gl. d.3)

Hinweis: Der Block (3) <u>haftet</u> <u>nicht</u> auf Block (2). Deshalb trägt seine Masse <u>nicht</u> zur Trägheitskraft bei. Stattdessen wirken auf den Block (2) jetzt <u>zwei</u> Gleitreibungskräfte: F_{G2} entspricht der Reibungskraft zwischen Block (2) und dem Tisch, F_{G3} entspricht der Reibungskraft zwischen Block (2) und Block (3).

4. Da die Blöcke (1) und (2) durch ein Seilverbunden sind und das Seil schlupffrei über die Rolle geführt wird, gilt: $a = a_1 = a_2 = \alpha_R \cdot r \neq a_3$ (Gl d.4)

Einsetzen von F_{G2} und F_{G3} und Gl. d.4 $\left(F_{Sl} - \mu_G\left(m_2 + m_3\right) g - \mu_G\, m_3\, g\right) - m_2 a = 0$

$$F_S = \mu_G\left(m_2 + 2\,m_3\right) g + m_2\, a \quad \text{(Gl.d.5)}$$

Setze F_{Sl} aus Gleichung (Gl.d.1) in Gleichung (Gl.d.5) ein:

$$F_{Sr} - \frac{1}{2} m_R\, r\,\alpha_R - \mu_G\left(m_2 + 2\,m_3\right) g - m_2\, a = 0 \quad \text{(Gl.d.6)}$$

Setze F_{Sr} aus Gleichung (Gl.d.2) in Gleichung (Gl.d.6) ein:

$$m_1\, g - m_1\, a - \frac{1}{2} m_R\; a - \mu_G\left(m_2 + 2\,m_3\right) g - m_2\, a = 0$$

Sortieren: $m_1\, g - -\mu_G\left(m_2 + 2\,m_3\right) g = m_1\, a - \frac{1}{2} m_R\; a - m_2\, a = 0$

Allgemeine Lösung für a

$$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + 2\,m_3\right)\mu_G}{m_1 + \frac{1}{2} m_R + m_2} \cdot g \quad \text{(Gl.d.7)}$$

$$a = \frac{3 - \left(2 + 2 \cdot 1\right) \cdot 0{,}2}{3 + 0{,}5 + 2} \cdot g = \frac{3 - 0{,}8}{5{,}5} = \frac{2{,}2}{5{,}5} g$$

Lösung: $a = a_1 = a_2 = \frac{2{,}2}{5{,}5} g = 0{,}4 \cdot 10\, m\, s^{-2} = 4\, m\, s^{-2}$

Das Prinzip "Actio gleich Reactio" erfordert, dass die gleiche Reibungskraft, mit der Block (3) auf Block (2) wirkt, in umgekehrter Richtung auch von Block (2) auf Block (3) wirkt. Diese Gegenkraft bewirkt am Block (3) eine Beschleunigung.

Anwendung des D'Alembertsches Prinzips am Block (3):

Kräfte, die auf Block (3) wirken: $F_{G3} - m_3\, a_3 = 0$

$$\mu_G\, m_3\, g - m_3\, a_3 = 0$$

Lösung: $$a_3 = \mu_G\, g = 0{,}2 \cdot 10\, m\, s^{-2} = 2\, m\, s^{-2}$$

Kommentar: Man beachte, dass die Beschleunigung a_3 nicht von der Seilkraft F_{Sl} abhängt. Die Seilkraft F_{Sl} ist Ursache für die Beschleunigung der Massen m_2. Man könnte, wenn F_{Sl} hinreichen groß ist, den Block (2) sehr stark beschleunigen, während der auf Block (2) gleitende Block (3) weiterhin mit dem konstanten Wert $a_3 = 2\, m\, s^{-2}$ beschleunigt wird. Aus diesem Grund kann man etwa ein Blatt Papier unter einem gefüllten Glas herausziehen kann, ohne den Inhalt des Glases zu verschütten. Man muss die Beschleunigung des Papiers nur ausreichend groß wählen. Allerdings dürfen auch nicht zu große Gleitreibungskräfte zwischen Papier und Glas wirken.

4a. Drehmoment ist gleich Massenträgheitsmoment mal Winkelbeschleunigung:

$$M_B = J \cdot \alpha$$

Massenträgheitsmoment: $$J = \frac{1}{2} m\, R^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\, kg \cdot (0{,}08)^2\, m^2 = 0{,}0128\, kg\, m^2$$

Winkelbeschleunigung: $$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot (n_1 - n_0)}{t_1 - t_0}$$

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot (n_1 - n_0)}{t_1 - t_0} = \frac{2\pi \cdot (900 - 1500)\min^{-1}}{(20-0)\, s}$$

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot (900 - 1500)}{(20-0) \cdot 60\, s^2} = -3{,}14\, s^{-2}$$

Ergebnis: $$M_B = J\, \alpha = -0{,}0128 \cdot 3{,}14\, kg\, \frac{m^2}{s^2} = -0{,}0402\, kg\, \frac{m^2}{s^2}$$

4b. Bremsleistung wurde in der Vorlesung als Quotient von Arbeit und Zeit oder als Produkt von Kraft und Geschwindigkeit hergeleitet. Überträgt man die physikalischen Größen für die Translation auf die entsprechenden Größen der Rotation, so folgt, dass Leistung als Produkt von Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden kann.

Leistung: $$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cdot v = M \cdot \omega$$

Maximalleistung: $$P_{\max} = |M_B| \cdot \omega_0 = |-0{,}0402|\, kg\, \frac{m^2}{s^2} \cdot 1500 \min^{-1}$$

Ergebnis Maximalleistung: $$P_{\max} = 0{,}0402\, kg\, \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{2\pi \cdot 1500}{60\, s} = 6{,}314\, \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Mittlere Leistung (1): $$P_{mittel} = |M_B| \cdot \omega_{mittel} = |M_B| \cdot \frac{\omega_{\max}}{2}$$

Ergebnis mittlere Leistung (1): $$P_{mittel} = \frac{P_{\max}}{2} = 3{,}157\, \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Alternativer Rechenweg:

Mittlere Leistung (2): $$P_{mittel} = \frac{\Delta W_{ges}}{\Delta t_{ges}} = \frac{\frac{1}{2} J\, \omega_0^2}{\Delta t_{ges}}$$

Gesamtzeit des Abbremsens: $$\Delta t_{ges} = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot \frac{1500}{60}\, s^{-1}}{3{,}142\, s^{-2}} = 50\, s$$

$$P_{mittel} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{0,5 \cdot 0,0128 \cdot 4\pi^2 \cdot 25^2}{50} \frac{kg\, m^2}{s^3}$$

Ergebnis mittlerer Leistung (2): $P_{mittel} = 3,158 \frac{kg\, m^2}{s^3}$

4c. Zahl der Umdrehungen bis zum Stillstand:

$$N = \int_{t=0}^{t_{ges}} n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t_{ges}} \omega(t)\, dt$$

Die Funktion $\omega(t)$ ist linear fallend von ω_0 bis $\omega = 0$. Das Integral entspricht einer Dreiecksfläche mit den Seiten $t_{ges} = 50\ s$ und $\omega(t=0) = 2\pi \frac{1500}{60} s^{-1} = 157,08\ s^{-1}$

Ergebnis: $N = \frac{1}{2\,\pi} \cdot \frac{157,08\, s^{-1} \cdot 50\, s}{2} = 625$