Fachhochschule Hannover | vorgezogene Wiederholungsklausur | 28.09.07
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS0708 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

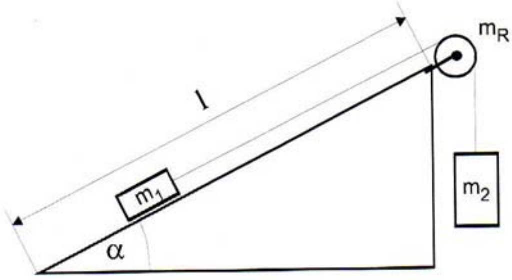
1. Der Sprintweltrekord über die 50 m Strecke liegt bei 5,56 s, der über die 60 m Strecke bei 6,39 s. Nehmen Sie an, dass ein Sprint näherungsweise als Überlagerung einer gleichmäßig beschleunigten und einer gleichförmigen Bewegung beschrieben werden kann.

a. Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit v_0 und die Beschleunigung a_0.

b. Nehmen Sie an, dass man auf der 100 m die gleichen Beschleunigungs- und Höchstgeschwindigkeitswerte erreichen kann. Welche Weltrekordzeit für die 100 m Strecke könnte nach den unter **1a**. bestimmten Werten erwartet werden?

c. Der aktuelle Weltrekord über 100 m liegt bei 9,77 s. Wenn man annimmt, dass die Beschleunigungen bei den Sprintstrecken gleich sind, welcher Höchstgeschwindigkeit entspricht die Weltrekordzeit über die 100 m Strecke?

2. Eine Masse ($m_1 = 1kg$) wird von einem Körper gleicher Masse ($m_1 = 1kg$) auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 20°$ und der Länge $l = 1m$ hochgezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,25$. Die Rolle habe eine Masse von $m_R = 0,5 kg$ und kann als Hohlzylinder behandelt werden. Die Masse des Seils soll vernachlässigt werden.



a. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Massen?

b. Welche Zeit benötigt m_1, um die Strecke l zu durchlaufen? Anfangsbedingung $v(t=0)=0$.

c. Welche Geschwindigkeit erreicht m_1 am Ende der schiefen Ebene?

d. Bestimmen Sie die Energien in der (ruhenden) Anfangsposition und nach Durchlaufen der Strecke l (System soll noch in Bewegung sein) und prüfen Sie unter Berücksichtigung der auf der Strecke l geleisteten Reibungsarbeit die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes.

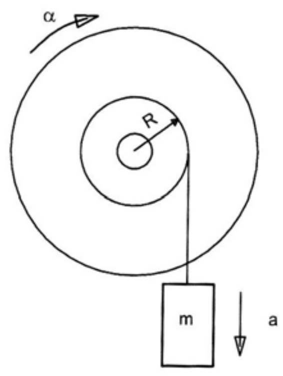
e. Wie groß sind die Seilkräfte an m_1 und m_2 während der beschleunigten Bewegung?

3. Ein glühendes (weiches) Werkstück der Masse $m_W = 2,5 kg$ wird mit einem Hammer der Masse $m_H = 7,5 kg$ auf einem Amboss (Masse: $m_A = 200 kg$) geschmiedet. Betrachten Sie den Schlag als vollkommen unelastisch. Die Wechselwirkung des Amboss mit der Unterlage muss nicht berücksichtigt werden.

a. Welcher Teil der kinetischen Energie des Hammers dient der Verformung des Werkstückes?

b. Was bewirkt die Restenergie?

4. Ein Drehmomentenrad erfährt um seine horizontale Achse eine Winkelbeschleunigung, die durch die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 5kg$ erzeugt wird, der an einem um die Achse ($R = 5cm$) gewickelten Faden hängt. Lässt man den Körper (m) los, so bewegt er sich in $t = 4s$ um die Strecke $s = 1m$ nach unten. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_{ges} des Systems Rad/Achse,



Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Bezeichnung:

s_1 - Gesamtstrecke 50 m

t_{g1} - Gesamtzeit über 50 m: 5,56 s

t_a - Beschleunigungszeit

Weg-Zeit-Funktion für 50m Strecke

$$s_1 = \frac{1}{2} a_0\, t_a^2 + v_0 \left(t_{g1} - t_a \right)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} a_0\, t_a^2 + v_0\, t_{g1} - v_0 t_a = \frac{1}{2} a_0\, t_a^2 + v_0\, t_{g1} - a_0 t_a^2$$

$$s_1 = v_0 t_{g1} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2$$

mit $v_0 = a_0\, t_a$

$$s_1 = a_0\, t_a\, t_{g1} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2 \qquad (1)$$

Herleitung für die Weg-Zeit-Funktion der 60 m Strecke ist analog:

Bezeichnung:

s_2 - Gesamtstrecke 60m

t_{g2} - Gesamtzeit über 60 m: 6,39 s

t_a - Beschleunigungszeit

Die Modellannahme soll sein, dass die Beschleunigungen a_0, die Endgeschwindigkeiten v_0 und die Beschleunigungszeiten t_a bei der 50 m und der 60 Sprintstrecke gleich sind.

Es gilt also eine ähnliche Gleichung wie Gl. (1):

Weg-Zeit-Funktion für 60m Strecke

$$s_2 = a_0\, t_a\, t_{g2} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2 \qquad (2)$$

Einsetzen von $\frac{1}{2} a_0 t_a^2$ aus (2) in (1):

$$s_1 = a_0\, t_a\, t_{g1} - \left(a_0\, t_a\, t_{g2} - s_2 \right)$$

Es folgt:

$$s_1 - s_2 = a_0\, t_a \left(t_{g1} - t_{g2} \right)$$

Lösung für $v_0 = a_0\, t_a$:

$$a_0\, t_a = v_0 = \frac{s_1 - s_2}{t_{g1} - t_{g2}} = \frac{(60-50)\,m}{(6{,}39-5{,}56)\,s} = \frac{10\,m}{0{,}83\,s}$$

$$v_0 = a_0\, t_a = \frac{10\,m}{0{,}83\,s} = 12{,}05\,m\,s^{-1}$$

$$v_0 = 12{,}05\,m\,s^{-1} = 43{,}4\,km\,h^{-1}$$

Für s_1 gilt (siehe (1)):

$$s_1 = v_0\, t_{g1} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0}$$

Es folgt:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{2\left(v_0\, t_{g1} - s_1 \right)}$$

Lösung:

$$a_0 = \frac{12{,}05^2}{2 \cdot (12{,}05 \cdot 5{,}56 - 50)}\,\frac{m}{s^2} = 4{,}27\,m\,s^{-2}$$

Kontrolle: Aus (2) folgt:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{2\left(v_0\, t_{g2} - s_2 \right)}$$

$$a_0 = \frac{12{,}05^2}{2 \cdot (12{,}05 \cdot 6{,}39 - 60)}\,\frac{m}{s^2} = 4{,}27\,m\,s^{-2}$$

1b. Für die 100 m Strecke gilt:

$$s_3 = v_0\, t_{g3}^{extrapoliert} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0}$$

Lösungen:

$$t_{g3}^{extrapoliet} = \frac{s_3}{v_0} + \frac{v_0}{2\,a_0} = \frac{100}{12{,}05} + \frac{12{,}05}{2\cdot 4{,}27} = 9{,}71\,s$$

1c. Ein Mensch kann über eine Strecke von $s_3 = 100\,m$ vermutlich nicht die gleiche Geschwindigkeit wie über die 50 m und 60 m Strecken halten. Nimmt man an, dass die Beschleunigung a_0 konstant ist, so folgt für die tatsächlich erreichbare Höchstgeschwindigkeit über die 100 m Strecke:

$$s_3 = v_{03}\, t_{g3}^{gem} - \frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0}$$

mit: $s_3 = 100\,m$ und $t_{g3} = 9{,}77\,s$

$$\frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0} - v_{03}\, t_{g3}^{gem} = -s_3$$

$$v_{03}^2 - 2\,v_{03}\, t_{g3}^{gem} a_0 = -2 a_0 s_3$$

mit: $a_0 = 4{,}27\,m\,s^{-2}$ $\quad v_{03} = \pm\sqrt{a_0^2\, t_{g3}^2 - 2\,a_0\, s_3} + a_0\, t_{g3}$

Erste Lösung (unrealistisch): $v_{03/1} = \left(+29{,}79 + 41{,}74\right) m\,s^{-1} = 71{,}53\,m\,s^{-1}$

Zweite Lösung (realistisch): $v_{03/2} = \left(-29{,}79 + 41{,}74\right) m\,s^{-1} = 11{,}95\,m\,s^{-1}$

Richtige Lösung: $v_{03/2} = 11{,}95\,m\,s^{-1} = 43{,}0\,km\,h^{-1}$

2a. D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0$

Es wirkt die Gewichtskraft F_{g2} nach unten und die Seilkraft F_{S2} nach oben.

$$\left(F_{g2} - F_{S2}\right) - m_2\, a = 0 \qquad (1)$$

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0$

Es wirken die Seilkraft F_{g1} nach oben, die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{t1} und die Gleitreibungskraft F_{G1} nach unten.

$$\left(F_{S1} - F_{t1} - F_{G1}\right) - m_1\, a = 0 \qquad (2)$$

Die Kräfte an den beiden Seilenden sind nicht gleich, da die Masse der Umlenkrolle nicht vernachlässigbar ist und die Seilkraft F_{S2} ("rechts") größer als die Seilkraft F_{S1} ("links") sein muss, um ein Drehmoment M_R an der Umlenkrolle rechts erzeugen zu können.

$$F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} \qquad (3)$$

Für starre Körper (Rolle) gilt: $M_R = J_R \cdot \alpha_R = k\, m_R\, R^2\, \alpha_R = 1 \cdot m_R\, R^2\, \alpha_R$

"Rollbedingung" für Seil-Rolle: $a = R \cdot \alpha_R$

Einsetzen in (3): $F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} = \frac{m_R\, R^2\, a}{R^2} = m_R\, a$

Aus (1) ergibt sich: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\, a = m_2\, g - m_2\, a$

Aus (2) ergibt sich: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

Einsetzen in (3) ergibt: $\left(m_2 g - m_2 a\right) - \left(F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a\right) = m_R\, a$

Hangabtriebskraft von m_1: $F_{t1} = m_1\, g \sin\alpha$

Gleitreibungskraft von m_1: $F_{G1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha$

Einsetzen: $m_2 g - m_2 a - m_1\, g \sin\alpha - \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha - m_1\, a = m_R\, a$

Lösung:
$$a = g \cdot \frac{m_2 - m_1\left(\sin\alpha + \mu_G \cos\alpha\right)}{m_1 + m_2 + m_R}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1 - 1\left(0,3420 + 0,25 \cdot 0,9396\right)}{1 + 1 + 0,5}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,1695 = 1,70\, m\, s^{-2}$$

2b. Bei gleichmäßiger Beschleunigung gilt: $s(t) = \frac{1}{2} a\, t^2$

Für die Strecke *l* folgt: $s(t_l) = l = \frac{1}{2} a\, t_l^2$

Für die Strecke *l* gilt: $t_l = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 m}{1,70\, m\, s^{-2}}} = 1,08\, s$

2c. Bei gleichmäßiger Beschleunigung gilt: $v(t) = a \cdot t$

Es folgt für $s(t_l) = l$: $v(t_l) = a \cdot t_l$

Lösung: $v(t_l) = 1,70\frac{m}{s^2} \cdot 1,08\, s = 1,84\frac{m}{s}$

2d. **Anfangsposition:**

<u>Definition:</u> Für $t = 0$ soll für die Masse m_1 gelten: $E_{pot,1}(t = 0) = 0$

Für $t = 0$ soll für die Masse m_2 gelten: $E_{pot,2}(t = 0) = m_2\, g\, l$

und: $E_{kin,1} = E_{kin,2} = E_{rot} = 0$

Gesamtenergie der Anfangsposition: $E_{ges,Anf} = E_{pot,2}(t = 0) = m_2\, g\, l = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10,000\ J$

Endposition:

Bei $t = t_l$ gilt für die Masse m_1: $E_{pot,1}(t = t_l) = m_1\, g\, H$

mit Höhe *H*: $H = l \cdot \sin\alpha = 0,3420\, m$

$E_{pot,1}(t_l) = m_1\, g\, H = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,3420 = 3,420\, J$

und für die kinetische Energie: $E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2(t_l) = 0,5 \cdot 1 \cdot 1,84^2\ J = 1,693\ J$

Bei $t = t_l$ gilt für die Masse m_2: $E_{pot,2}(t = t_l) = 0$

und für die kinetische Energie: $E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 v^2(t_l) = 0,5 \cdot 1 \cdot 1,84^2\ J = 1,693\ J$

Rotationsenergie der Rolle: $E_{rot} = \frac{1}{2} J_R\, \omega_R^2$

mit: $\omega_R(t = t_l) = \frac{v(t = t_l)}{R}$

mit: $J_R = m_R\, R^2$

Einsetzen: $E_{rot} = \frac{1}{2} m_R\, R^2 \frac{v^2(t = t_l)}{R^2} = \frac{1}{2} m_R\, v^2(t = t_l)$

$E_{rot} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,84^2\ J = 0,846\, J$

Gesamtenergie in der Endposition: $E_{ges,End} = E_{kin,1} + E_{kin,2} + E_{rot} + E_{pot,1}$

$$E_{ges,End} = 1,693\,J + 1,693\,J + 0,846\,J + 3,420\,J$$

$$E_{ges,End} = 7,652\,J$$

Die Differenz der Gesamtenergien $E_{ges,Anf}$ und $E_{ges,End}$ entspricht der bei der Bewegung der Masse m_1 geleisteten Reibungsarbeit: $W_{R1} = E_{ges,Anf} - E_{ges,End} = 10,000\,J - 7,652\,J = 2,348\,J$

Für die Reibungsarbeit gilt: $W_{R,1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha \cdot l$

$$W_{R,1} = (0,25 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0,9396 \cdot 1)\,J = 2,349\,J$$

Die Werte stimmen (bis auch Rundungsfehler) überein.

2e. Seilkraft an m_2: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\, a = m_2\, g - m_2\, a$

$$F_{S2} = 10,00N - 1,70N = 8,30N$$

Seilkraft an m_1: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

$$F_{S1} = m_1\, g \cdot \sin\alpha + \mu_G\, m_1\, g \cdot \cos\alpha + m_1\, a$$

$$F_{S1} = 3,42\,N + 2,35\,N + 1,70\,N = 7,47\,N$$

Differenz: $F_{S2} - F_{S1} = 8,30 - 7,47 = 0,83\,J$

Probe: $F_{S2} - F_{S1} = \frac{M_R}{R} = \frac{Ja}{R^2} = \frac{m_R R^2}{R^2} a = m_R\, a$

$$F_{S2} - F_{S1} = m_R\, a = 0,5 \cdot 1,70\,N = 0,85\,N$$

Die Werte stimmen (bis auch Rundungsfehler) überein.

3a. Bei einem “vollkommen unelastischen Schlag” besitzen der Hammer (H), das Werkstück (W) und der Amboss (A) nach dem Schlag die gleiche Geschwindigkeit. Der Hammerschlag überträgt Impuls auf die gemeinsame Masse, die aus Werkstück, Hammer und Amboss gebildet wird.

Impulserhaltungssatz: $m_H v_H = (m_H + m_A + m_W) \cdot u$

Energieerhaltungssatz: $E^0_{kin} = \frac{1}{2} m_H v_H^2 = \frac{1}{2}(m_H + m_A + m_W) \cdot u^2 + Q$

Es folgt: $\frac{Q}{E^0_{kin}} = 1 - \frac{m_H}{m_H + m_A + m_W}$

$$\frac{Q}{E^0_{kin}} = 1 - \frac{7,5}{7,5 + 200 + 2,5} = 96,43\%$$

3b. Die Restenergie: $\Delta E = (100 - 96,43)\% = 3,57\%$

wird als kinetische Energie vom Gesamtsystem Werkstück + Hammer + Amboss aufgenommen und muss in der Praxis durch eine geeignete Unterlage (Holzbock eventuell mit Gummimatte) bedämpft werden.

4a. Lösungsweg auf der Basis von Kräften und Momenten:

Der Körper mit der Masse *m* fällt gleichmäßig beschleunigt.

Gleichm. beschleunigte Bewegung: $s = \frac{1}{2} a t^2$

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2m}{16\,s^2} = 0,125\,m\,s^{-2}$$

Kräfte, die auf m wirken: Gewichtskraft F_g und entgegengesetzt die Seilkraft F_S

D'Alembertsches Prinzip für *m*: $\left(\sum_i F_i\right) - m\,a = 0 = \left(F_g - F_S\right) - ma$

Die Seilkraft F_S erzeugt ein Drehmoment am System Rad/Achse:

$$M = F_S \cdot R$$

Das Drehmoment erzeugt eine Winkelbeschleunigung::

$$M = J \cdot \alpha$$

Für Beschleunigung a der Masse m und Winkelbeschleunigung α vom System Rad/Achse gilt der Zusammenhang:

$$a = R \cdot \alpha$$

Es folgt: $F_S \cdot R = J \dfrac{a}{R}$

$$F_S = J \frac{a}{R^2}$$

Es folgt: $\left(F_g - F_S\right) - ma = m\left(g - a\right) - \dfrac{J\,a}{R^2} = 0$

$$J = m\,R^2 \frac{g-a}{a}$$

$$J = 5 \cdot \left(0,05\right)^2 \frac{10 - 0,125}{0,125} kg\,m^2 = 0.9875\,kg\,m^2$$

4b. Lösungsweg mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes:

Setze (oBdA) die Gesamtenergie im Ausgangszustand (Index 0) gleich Null. Dann ist im Endzustand (Index 1) (also dann, wenn die Masse m die Strecke $s = 1m$ gefallen ist) die Gesamtenergie ebenfalls Null.

$$E_{ges,0} = 0 = E_{pot,1} + E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{trans} = E_{ges,1}$$

Potentielle Energie im Endzustand: $E_{pot,1} < E_{pot,0} = 0$

Kinetische Energie der Rotation: $E_{kin,1}^{rot} > E_{kin,0}^{rot} = 0$

Kinetische Energie der Translation: $E_{kin,1}^{trans} > E_{kin,0}^{trans} = 0$

Es folgt: $-E_{pot,1} = E_{kin,1}^{trans} + E_{kin,1}^{rot}$

$$-\left(m\,g\left(-s\right)\right) = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2} J\,\omega^2$$

Es gilt: $\omega = \dfrac{v}{R}$

Einsetzen von ω: $m\,g\,s = \dfrac{1}{2} m\,v^2 + \dfrac{1}{2} J \dfrac{v^2}{R^2}$

Umstellen: $J = \left(2\,m\,g\,s - m\,v^2\right) \dfrac{R^2}{v^2}$

$$J = mR^2 \left(\frac{2\,g\,s}{v^2} - 1\right)$$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$$s = \frac{1}{2} a\,t^2$$

und: $v = a\,t$ oder $a = \dfrac{v}{t}$

Einsetzen von *a*: $v = \dfrac{2s}{t^2} t = \dfrac{2s}{t}$

$$J = mR^2\left(\frac{2\,g\,s\,t^2}{4s^2} - 1\right) = mR^2\left(\frac{g\,t^2}{2\,s} - 1\right)$$

$$J = 5\,kg \cdot 0,05^2\;m^2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 4^2}{2 \cdot 1} - 1\right)$$

$$J = 0,0125\,kg\;m^2 \cdot 79 = 0,9875\,kg\;m^2$$