Fachhochschule Hannover vorgezogene Wiederholungsklausur SS08 07.03.08
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Beim Wurfscheibenschießen (auch Tontaubenschießen genannt) werden von einer federgeladenen Wurfmaschinen Tonscheiben (∅ 11 cm, h = 2,5 cm, Masse 100-110 g) mit hoher Geschwindigkeit abgeschossen, die der Sportschütze dann treffen muss. Nehmen Sie an, dass eine Wurfmaschine so eingestellt sei, dass eine Scheibe beim senkrechten Schuss nach oben $t_{ges} = 4\,s$ benötigt bevor sie wieder den Boden erreicht.

a. Welche Abschussgeschwindigkeit v_0 hat die Wurfmaschine? ....(15)

b. Wie hoch fliegt die Scheibe? ....(15)

c. Skizzieren Sie die *s*-*t*-, *v*-*t*- und *a*-*t*-Diagramme für den Wurf senkrecht nach oben. ....(10)

d. Wie weit kann sie mit dieser Einstellung und richtig gewähltem Abwurfwinkel maximal fliegen? ....(15)

e. Im Wettkampf soll die Scheibe unter einem Winkel von 15° abgeschossen werden. Wie weit fliegt die Scheibe? ....(15)

(Luftreibung und aerodynamische Effekte können vernachlässigt werden.)

2. Man vergleiche eine <u>rollende Kugel</u> (Masse $m_1 = 1kg$) und eine <u>gleitende Masse</u> ($m_2 = 1kg$) auf einer schiefen Ebene. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\vartheta = 30°$, beide Körper starten in der Höhe $h = 1m$ ohne Anfangsgeschwindigkeit (siehe Abb. 1, Darstellung nicht maßstabgerecht!).

a. Wie groß muss die Gleitreibungszahl für die Masse m_2 sein, damit sie in gleicher Zeit wie die Kugel m_1 unten ankommt? ....(15)

b. Wie groß ist Zeit für das Rollen bzw. Gleiten? ....(15)

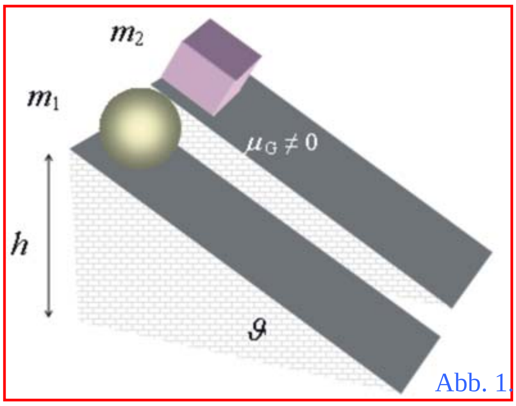


Abb. 1.

3. Ein Geschoss mit Masse $m_0 = 10\,g$ wird mit der Geschwindigkeit $v_G = 500\,m\,s^{-1}$ horizontal in ein Holzstück der Masse $m_1 = 1kg$ geschossen (Abb. 2). Die Gleitreibungszahl sei $\mu_G = 0{,}3$.

a. Wie weit rutscht das Holzstück, nachdem das Geschoss eingedrungen und stecken geblieben ist? ....(15)

b. Welche Kraftstöße wirken auf m_0 und m_1 ? ....(15)

c. Der Eindringvorgang des Geschosses soll ~0,1 ms dauern. Bestimmen Sie die (mittlere) Kraft auf m_1 wirkt und die Eindringtiefe des Geschosses. ....(10)

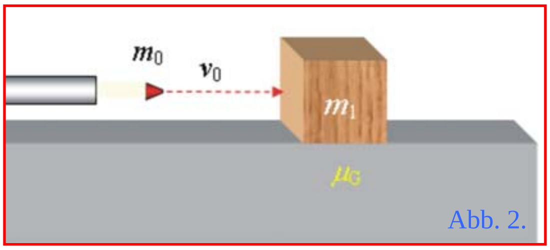


Abb. 2.

4. Eine homogene Stange (Länge $l = 1\,m$, Masse $m_l = 1\,kg$) soll Endpunkt drehbar gelagert und senkrecht aufgehängt sein. Ein Ball ($m_B = 1\,kg$) trifft die Stange am unteren Ende mit einer Geschwindigkeit von $v_B = 10\,m\,s^{-1}$ (siehe Abb. 3). Der Stoß soll <u>elastisch</u> sein und Reibungskräfte vernachlässigt werden.

a. Welche Geschwindigkeit u_B hat m_B nach dem Stoß? ....(20)

b. Wie groß ist die Rotationsenergie der Stange? ....(20)

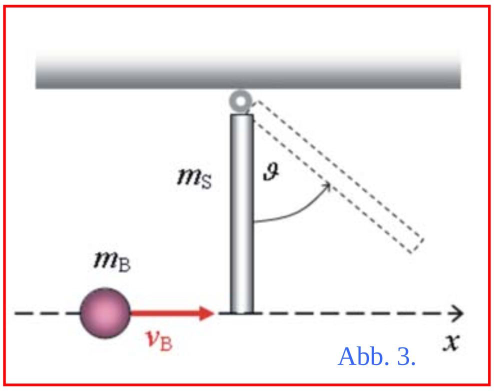


Abb. 3.

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. **Senkrechter Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben:**

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = -g$ und Anfangsgeschwindigkeit $+v_0$:

Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt: $v(t) = v_0 - g\,t$

Beim Erreichen der maximalen Höhe ist $v(t_{\max}) = 0$.

Es gilt: $v(t_{\max}) = 0 = v_0 - g\,t_{\max}$

Es folgt: $$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \quad (1)$$

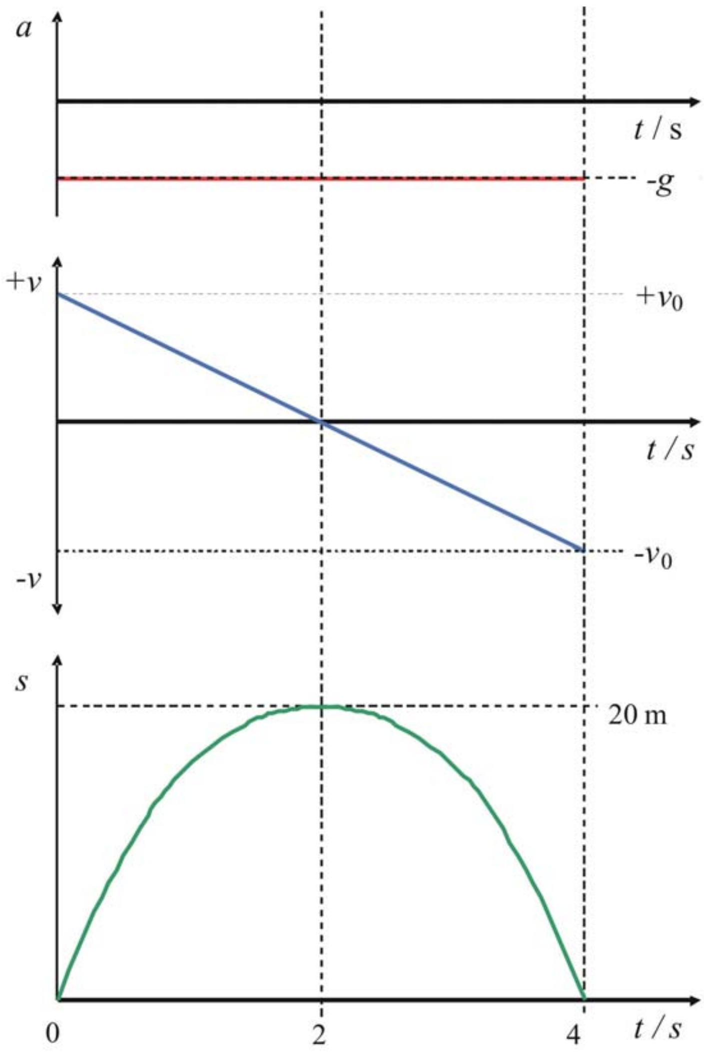
Gesamtzeit: $$t_{ges} = 2\,t_{\max} = \frac{2\,v_0}{g} \quad (2)$$

Lösung: $$v_0 = \frac{1}{2} g\; t_{ges} = 0{,}5 \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 4\,s = 20\,m\,s^{-1}$$

1b. Für den Weg $s(t)$ gilt: $$s(t) = v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \quad (3)$$

Einsetzen in (1) in (3): $$s(t_{max}) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{400\,m^2 s^{-2}}{20\,m\,s^{-2}} = 20\,m$$

1c. *s*-*t*, *v*-*t*-und *a*-*t*-Diagramm:



1d. **Größte Reichweite** wird bei einem Wurf unter 45° erreicht. Man zerlegt den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag $v_0 = 20\,m\,s^{-1}$ in eine *x*- und eine *y*-Komponente. Bezeichnet man den Winkel zwischen $\vec{v}_0$ und der *x*-Achse mit ϑ, so gilt für die Komponenten:

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta$$

Mit Gl. (2) kann die Gesamtzeit t_{ges} berechnet werden, wobei v_{0y} einzusetzen ist.

$$t_{ges} = 2\,t_{\max} = \frac{2\,v_{0y}}{g} = \frac{2\,v_0}{g} \cdot \sin\vartheta$$

In dieser Zeit bewegt sich die Scheibe um $s_x(\vartheta)$ in *x*-Richtung:

$$s_x(\vartheta) = v_{0x} \cdot t_{ges} = \frac{2\,v_0^2}{g} \cos\vartheta \sin\vartheta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta \qquad (4)$$

$$s_x(\vartheta = 45°) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400\,m^2 s^{-2}}{10\,m\,s^{-2}} = 40\,m$$

1e. **Reichweite beim Abwurfwinkel $\vartheta = 15°$:**

Verwende Gl. (4): $$s_x(\vartheta = 15°) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta = \frac{v_0^2}{g} \sin 30° = 20\,m$$

2a. Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es gilt: $$s = \frac{1}{2} a\,t^2 = \frac{h}{\sin\vartheta}$$

Für die Roll- bzw. Gleitzeit folgt: $$t = \sqrt{\frac{2\,h}{a \cdot \sin\vartheta}}$$

Die Rollzeit ist genau dann gleich der Gleitzeit, wenn die Beschleunigungen für Gleiten und Rollen gleich sind.
Die Gewichtskraft $F_g = m_1\,g$ wird zerlegt in die Tangentialkomponente F_t und Normalkomponente F_n.

Es gilt: $$F_t = F_g \cdot \sin\vartheta = m\,g \sin\vartheta$$
$$F_n = F_g \cdot \cos\vartheta = m\,g \cos\vartheta$$

Beschleunigung a_K der rollenden Kugel mit Radius R_K:

Die Tangentialkomponente F_t erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_K und eine Winkelbeschleunigung α. Zur Erzeugung der Winkelbeschleunigung α ist das Drehmoment M_K erforderlich. Das D'Alembertsche Prinzip lautet:

$$\left(F_t - \frac{M_K}{R_K}\right) - m_1\,a_K = 0 \qquad (*)$$

mit: $$M_K = J_K \cdot \alpha = \frac{2}{5} m_1\,R_K^2 \cdot \alpha$$

Die Kugel soll rollen. Rollbedingung: $$a_K = R_K \cdot \alpha$$

Einsetzen in Gl. (*): $$\left(F_t - \frac{2\,m_1\,R_K^2\,a_K}{5\,R_K\,R_K}\right) - m_1\,a_K = 0$$

$$m_1\,g \sin\vartheta - \frac{2}{5} m_1 a_K - m_1 a_K = 0$$

Schwerpunktbeschleunigung der Kugel: $a_K = \frac{5}{7} g \sin\vartheta$ (5)

Beschleunigung a_M der gleitenden Masse m_2:

Die Tangentialkomponente F_t erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_K. Die Gleitreibungskraft $F_G = \mu_G F_n = \mu_G m_1 g \cos\vartheta$ wirkt entgegengesetzt. Das D'Alembertsche Prinzip lautet:

$$(F_t - F_G) - m_1 a_M = 0 \qquad (*)$$

Einsetzen von F_t und F_G in Gl. (**): $m_2 g \sin\vartheta - \mu_G m_2 g \cos\vartheta - m_2 a_M = 0$

Beschleunigung der gleitenden Masse: $a_M = g(\sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta)$ (6)

Wenn Roll- und Gleitbewegung in gleicher Zeit erfolgen sollen, gilt:

$$a_M = a_K$$

$$\frac{5}{7} g \sin\vartheta = g(\sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta)$$

$$\frac{5}{7} \sin\vartheta = \sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta$$

$$\mu_G \cos\vartheta = \sin\vartheta - \frac{5}{7}\sin\vartheta = \frac{2}{7}\sin\vartheta$$

$$\mu_G = \frac{2}{7}\tan\vartheta = 0{,}165$$

2b. Zeit für Rollbewegung:

Für die Beschleunigung gilt nach Gl. (5): $a_K = \frac{5}{7} g \sin\vartheta = \frac{5}{7} 10\, m\, s^{-2} \sin 30° = 3{,}571\, m\, s^{-2}$

Gesamtweg: $s_{ges} = \frac{h}{\sin\vartheta} = \frac{1m}{\sin 30°} = 2\,m$

Gesamtzeit: $s_{ges} = \frac{1}{2} a_K t_{ges}^2$

Lösung für Rollbewegung: $t_{ges} = \sqrt{\frac{2 s_{ges}}{a_K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 h}{5 g \sin^2\vartheta}} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{14 h}{5 g}}$

$$t_{ges} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 2\sqrt{\frac{14\,m}{50\,ms^{-2}}}$$

$$t_{ges} = 2 \cdot \sqrt{\frac{14\,m}{50\,ms^{-2}}} = 2 \cdot 0{,}529\,s = 1{,}058\,s$$

Überprüfung:

Beschleunigung für Gleiten nach Gl (6) $a_M = g(\sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta)$

$$a_M = 10\,m\,s^{-2}(\sin 30° - \mu_G \cos 30°) = 3{,}571\,m\,s^{-2}$$

Lösung für Gleitbewegung: $t_{ges} = \sqrt{\frac{2 s_{ges}}{a_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g(\sin^2\vartheta - \mu_G \sin\vartheta\cos\vartheta)}}$

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2\,m}{10\,m\,s^{-2}(0{,}25 - 0{,}0714)}} = 1{,}058\,s$$

3a. Es handelt sich um einen vollkommen unelastischen Stoß.

Impulserhaltungssatz: $m_0 v_G = (m_0 + m_1) u$

Lösung für u: $$u = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_G = \frac{0,01}{0,01+1,0} \cdot 500\, m\, s^{-1}$$

$$u = \frac{0,01}{1,01} \cdot 500\, m\, s^{-1} = 4,950\, s^{-1}$$

Energieerhaltungssatz (nach dem unelastischen Stoß!!):

$$\frac{1}{2}\left(m_0 + m_1\right) u^2 = \mu_G\ F_n\ s = \mu_G\ \left(m_0 + m_1\right) g\ s$$

Lösung für Gleitweg s: $$s = \frac{u^2}{2\,\mu_G\ g} = \frac{4,95^2\ m^2 s^{-2}}{2 \cdot 0,3 \cdot 10\, m\, s^{-2}} = 4,08\, m$$

3b. Kraftstoß: $$\int F\, dt = \overline{F}\, \Delta t = \Delta p$$

Impulsänderung von m_1 $$\Delta p_{m_1} = p_{m_1}^{nachher} - p_{m_1}^{vorher} = m_1\, u - 0$$

$$\Delta p_{m_1} = m_1\, u = +1,0\, kg \cdot 4,95\, m\, s^{-1}$$

$$\Delta p_{m_1} = 4,95\, kg\, m\, s^{-1}$$

Impulsänderung von m_G $$\Delta p_{m_G} = p_{m_G}^{nachher} - p_{m_G}^{vorher} = m_0\, u - m_0\, v_G$$

$$\Delta p_{m_G} = 0,01\, kg \cdot \left(4,950 - 500\right) m\, s^{-2}$$

$$\Delta p_{m_G} = -4,95\, kg\, m\, s^{-2}$$

3c. Für den Kraftstoß gilt: $$\int F\, dt = \overline{F}\, \Delta t = \Delta p = 4,95\, kg\, m\, s^{-1}$$

Für die mittlere Kraft folgt: $$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4,95\, kg\, m\, s^{-1}}{0,1 \cdot 10^{-3}\, s} = 49,5\, kN$$

Die Kraft $\overline{F} = 49,5\, kN$ erzeugt eine (neg.) Beschleunigung (Abbremsung):

$$a = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{49,5\, kN}{0,01\, kg} = 4,9610^6\ m\, s^{-2}$$

Für den Bremsweg gilt: $$s = \frac{1}{2} a\, t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4.95 \cdot 10^6\ ms^{-2} \cdot 0,1^2 \cdot 10^{-6}\ s^2$$

Ergebnis: $$s = 0,2475\, m = 2,475\, cm$$

4a. Für den elastischen Stoß des Balls m_B mit der senkrecht herabhängenden Stange m_S gilt:

der Drehimpulserhaltungssatz: $$m_B\, v_B\, l = J\, \omega_1 + m_B\, u_B\, l \qquad (1)$$

und der Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2} J\, \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2 \qquad (2)$$

mit Massenträgheitsmoment der Stange m_l mit Drehpunkt am Ende:

$$J = \frac{1}{3} m_l\, l^2 = \frac{1}{3}\, kg\, m^2$$

Geschwindigkeit von m_B vor Stoß: v_B

Geschwindigkeit von m_B nach Stoß: u_B

Winkelgeschwindigkeit nach Stoß: ω_1

Umformung Gleichung (1) liefert: $$\frac{J\, \omega_1}{m_B\, l} = v_B - u_B$$

Setze zur Vereinfachung: $$\hat{J} = \frac{J}{m_B\, l^2} = \frac{\frac{1}{3} m_l\, l^2}{m_B\, l^2} = \frac{1}{3}$$

und Bahngeschwindigkeit des Stangenendpunkts im Abstand l nach dem Stoß:

$$u_l = l \cdot \omega_1$$

damit folgt für Gleichung (1): $\hat{J}\, u_l = v_B - u_B$

Umformung der Gleichung (2) liefert: $\frac{J\omega_1^2}{m_B} = v_B^2 - u_B^2$

$$\frac{J\, l^2 \omega_1^2}{m_B\, l^2} = v_B^2 - u_B^2$$

Einsetzten von $\hat{J}$ und u_l: $\hat{J}\, u_l^2 = v_B^2 - u_B^2$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\hat{J}\, u_l = v_B - u_B \qquad (3)$$

$$\hat{J}\, u_l^2 = v_B^2 - u_B^2 \qquad (4)$$

Umformung von (3) $u_l = \frac{1}{\hat{J}}\left(v_B - u_B\right)$

Einsetzten in (4) $\frac{1}{\hat{J}}\left(v_B - u_B\right)^2 = v_B^2 - u_B^2$

$$v_B^2 - 2 v_B\, u_B + u_B^2 = \hat{J}\, v_B^2 - \hat{J}\, u_B^2$$

$$v_B^2\left(1 - \hat{J}\right) - 2 v_B\, u_B + u_B^2\left(1 + \hat{J}\right) = 0$$

$$u_B^2 - 2\frac{v_B}{1+\hat{J}}\, u_B = -v_B^2\,\frac{1-\hat{J}}{1+\hat{J}}$$

Setze: $\alpha = \frac{1}{1+\hat{J}} = \frac{3}{4}$

und $\beta = \frac{1-\hat{J}}{1+\hat{J}} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 4} = \frac{1}{2}$

$$u_B^2 - 2\left(\alpha v_B\right) u_B + \alpha^2 v_B^2 = \alpha^2 v_B^2 - \beta\, v_B^2$$

$$u_B = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta}\cdot v_B + \alpha\, v_B$$

$$u_B = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}\cdot v_B + \frac{3}{4} v_B = \left(\pm\sqrt{\frac{9-8}{16}} + \frac{3}{4}\right) v_B$$

$$u_{B+} = \left(+\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) v_B = v_B$$

Die Lösung $u_{B+} = v_B$ scheidet aus, weil sonst $u_l = 0$.

$$u_{B-} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) v_B = \frac{1}{2} v_B$$

Lösung für u_B: $u_B = \frac{1}{2} v_B = 0,5 \cdot 10\, m\, s^{-1} = 5\, m\, s^{-1}$

Lösung für u_l und ω_1: $u_l = \frac{1}{\hat{J}}\left(v_B - u_B\right) = 3\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot v_B = \frac{3}{2} v_B$

$$u_l = \frac{3}{2} v_B = \frac{3}{2}\cdot 10\, m\, s^{-1} = 15\, m\, s^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{u_l}{l} = 15\, s^{-1}$$

Alternatives Lösungsverfahren (Es geht auch einfacher, wenn die oben gezeigte allgemeine Lösung zu umständlich erscheint.)

Lösung des Gleichungssystems:

$$\hat{J}\,u_l = v_B - u_B \quad \rightarrow \quad x = 3z - 3y \qquad (5)$$

$$\hat{J}\,u_l^2 = v_B^2 - u_B^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 3z^2 - 3y^2 \qquad (6)$$

Ziel ist die Bestimmung von *x* und *y*:

Bestimme *y*: $x = 3z - 3y$

Einsetzen in Gl (6):

$$(3z-3y)^2 = 3z^2 - 3y^2$$

$$3\left(z^2 - 2zy + y^2\right) = z^2 - y^2$$

$$4y^2 - 6zy = -2z^2$$

$$y^2 - 2\frac{3}{4}z\,y + \frac{9}{16}z^2 = \frac{9}{16}z^2 - \frac{8}{16}z^2 = \frac{1}{16}z^2$$

$$y - \frac{3}{4}z = \pm\frac{1}{4}z$$

$$y_+ = +\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}z = \frac{4}{4}z = z$$

Die Lösung $u_{B+} = v_B$ scheidet aus, weil sonst $u_l = 0$.

$$y_- = -\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}z = \frac{1}{2}z$$

Einsetzen: $u_B = \frac{1}{2}v_B = 5\,m\,s^{-1}$

Bestimmung von $x = 3z - 3y = 3v_B - \frac{3}{2}v_B = \frac{3}{2}v_B$

Einsetzen:

$$u_l = \frac{3}{2}v_B = 15\,m\,s^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{u_l}{l} = 15\,s^{-1}$$

in Übereinstimmung mit der ersten Lösung.

---

b. Zur Bestimmung des maximalen Auslenkungswinkels dient wieder der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}J\,\omega_1^2 = m_l\,g\,h_1$$

wobei h_1 die Höhe bezeichnet, um die der Schwerpunkt beim Rückschwingen der Stange gehoben wird.

Es folgt:

$$h_1 = \frac{J\,\omega_1^2}{2\,m_l\,g}$$

$$h_1 = \frac{\frac{1}{3}m_l\,l^2\cdot 15^2 s^{-2}}{2\cdot m_l\cdot 10\,m\,s^{-2}} = \frac{\frac{1}{3}1m^2\cdot 15^2 s^{-2}}{2\cdot 10\,m\,s^{-2}} = 3{,}75\,m$$

Da der berechnete Wert für h_1 größer ist, als Höhe $\Delta h = 1m$, um die der Schwerpunkt der Stange maximal gehoben werden kann, wird die Stange in eine Drehbewegung versetzt. Die Rotationsenergie für den Winkel $\vartheta = 0$ beträgt:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\,\omega_1^2 = 37{,}5\,J$$