Fachhochschule Hannover | Klausur SS08 | 25.06.08
Fachbereich Maschinenbau | | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) | | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

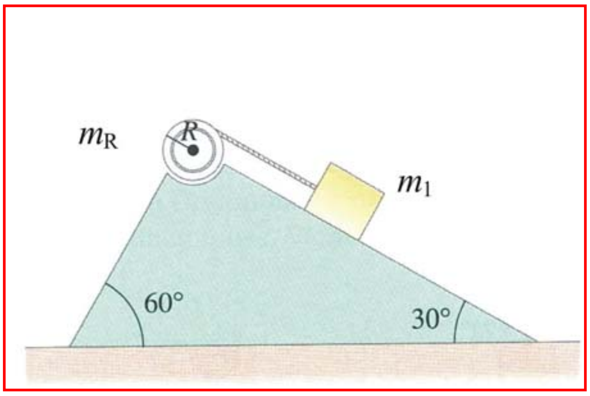
1. Die Festung Königstein in Sachsen besitzt einen berühmten Tiefbrunnen. Dessen Tiefe soll durch Abwurf eines schweren Gegenstands bestimmt werden, wobei die Luftreibungseffekte während des freien Falls vernachlässigt werden können. Für die Zeitdifferenz zwischen Loslassen des Gegenstands am oberen Brunnenrand (mit $v(t=0)=0$) und der Rückkehr des Auftreffschalls werden 6 s gemessen. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c_0 = 343\,m\,s^{-1}$. Wie tief ist der Brunnen?

2. Bei einem Motortest wurden folgende Drehzahl-Zeit-Werte ermittelt.

***t* / s**	0	10	20	30	40	50	60
***n* / min^{-1}**	0	600	2400	1800	3000	3000	0

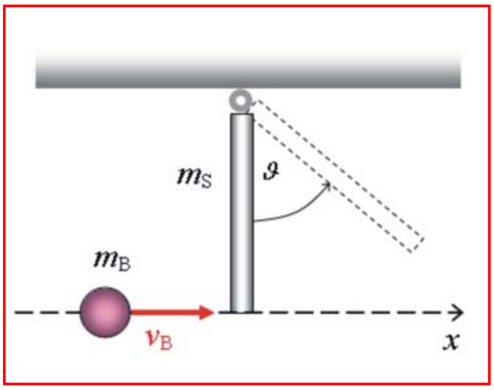
a. Skizzieren Sie das Drehzahl-Zeit-Diagramm.
b. Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigungen in den unterschiedlichen Teilbereichen.
c. Wie viele Umdrehungen macht der Motor in den Teilbereichen? Wie viele Umdrehungen macht der Motor insgesamt während des Tests?
d. Bestimmen Sie die mittlere Drehzahl und die mittlere Winkelgeschwindigkeit.
e. Während des Abbremsvorgangs am Ende des Tests wirkt ein mittleres Bremsdrehmoment von $-50\,kNm$. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Motors?

3. Ein Seilende ist mit der Masse $m_1 = 1\,kg$ verbunden, das andere Ende um einen Zylinder mit der Masse $m_R = 2\,kg$ gewickelt.
Das aufgewickelte Seil liegt in einer Vertiefung des Zylinders, trotzdem soll dieser näherungsweise als homogener Vollzylinder mit Radius *R* betrachtet werden können. Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden.



a. Berechnen Sie die Beschleunigung *a* von m_1 unter der Nebenbedingung, dass keine Reibungskräfte wirken.
b. Welche Haftreibungszahl $\mu_{H,\max}$ darf nicht überschritten werden, damit die Masse m_1 die schiefe Ebene hinab gleiten kann. $\mu_{H,\max}$ soll für alle Kontaktflächen gleich sein.
c. Nehmen Sie an, dass zwischen allen Flächen die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}15$ beträgt. Wie groß ist die Beschleunigung *a*?

4. Eine homogene Stange (Länge $l = 1\,m$, Masse $m_l = 3\,kg$) soll Endpunkt drehbar gelagert und senkrecht aufgehängt sein. Ein Ball ($m_B = 1\,kg$) trifft die Stange am unteren Ende mit einer Geschwindigkeit von $v_B = 5\,m\,s^{-1}$. Der Stoß soll <u>elastisch</u> sein und Reibungskräfte vernachlässigt werden.



a. Welche Geschwindigkeit u_B hat m_B nach dem Stoß?
b. Auf welchen Winkel ϑ schwingt die Stange aus?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Der Fall des Gegenstands ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Der Schall, der beim Auftreffen des Gegenstands auf der Wasseroberfläche entsteht, breitet sich als gleichförmige Bewegung nach oben aus.

Für den freien Fall gilt: $s_0 = \frac{1}{2} g\, t_0^2$

Für die Schallübertragung gilt: $s_1 = c_0\, t_1$

Fallweg und Schallweg sind gleich: $s_0 = s_1$

Die Gesamtzeit ist: $t_{ges} = t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2s_0}{g}} + \frac{s_0}{c_0}$ (*)

Man kann zunächst einen groben Schätzwert für die Brunnentiefe ermitteln, indem man die Fallzeit ungefähr gleich der angegebenen Gesamtzeit setzt und die Zeit für die Schallausbreitung vernachlässigt:

$$s_0 = \frac{1}{2} g\, t_0^2 \approx \frac{1}{2} g\, t_{ges}^2 \approx 180\, m$$

Zur Berechnung der wahren Brunnentiefe muss die Gleichung (*) gelöst werden.

Gleichung (*): $t_{ges} - \frac{s_0}{c_0} = \sqrt{\frac{2s_0}{g}}$

Quadrieren: $t_{ges}^2 - 2\frac{s_0}{c_0} t_{ges} + \frac{s_0^2}{c_0^2} = \frac{2s_0}{g}$

$$t_{ges}^2 + \frac{s_0^2}{c_0^2} = \frac{2s_0}{g} + 2\frac{s_0}{c_0} t_{ges} = 2s_0\left(\frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{c_0}\right)$$

Setze zur Vereinfachung: $\alpha = \frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{c_0} = \frac{1}{10} s^2 m^{-1} + \frac{5,967}{343} s^2 m^{-1}$

$$\alpha = 0,1174927\, s^2 m^{-1}$$

$$s_0^2 - 2s_0 c_0^2 \alpha = -c_0^2 t_{ges}^2$$

$$s_0^2 - 2s_0 c_0^2 \alpha + \left(c_0^2 \alpha\right)^2 = c_0^4 \alpha^2 - c_0^2 t_{ges}^2$$

$$s_0 - c_0^2 \alpha = \sqrt{c_0^4 \alpha^2 - c_0^2 t_{ges}^2}$$

Ausklammern von c_0^2: $s_0 = c_0^2\left(\sqrt{\alpha^2 - \frac{t_{ges}^2}{c_0^2}} + \alpha\right)$

$$s_0 = 343^2 m^2 s^{-2}\left(\pm\sqrt{\left(0,0138045 - 0,0003059\right) s^4 m^{-2}} + 0,1174927\, s^2 m^{-1}\right)$$

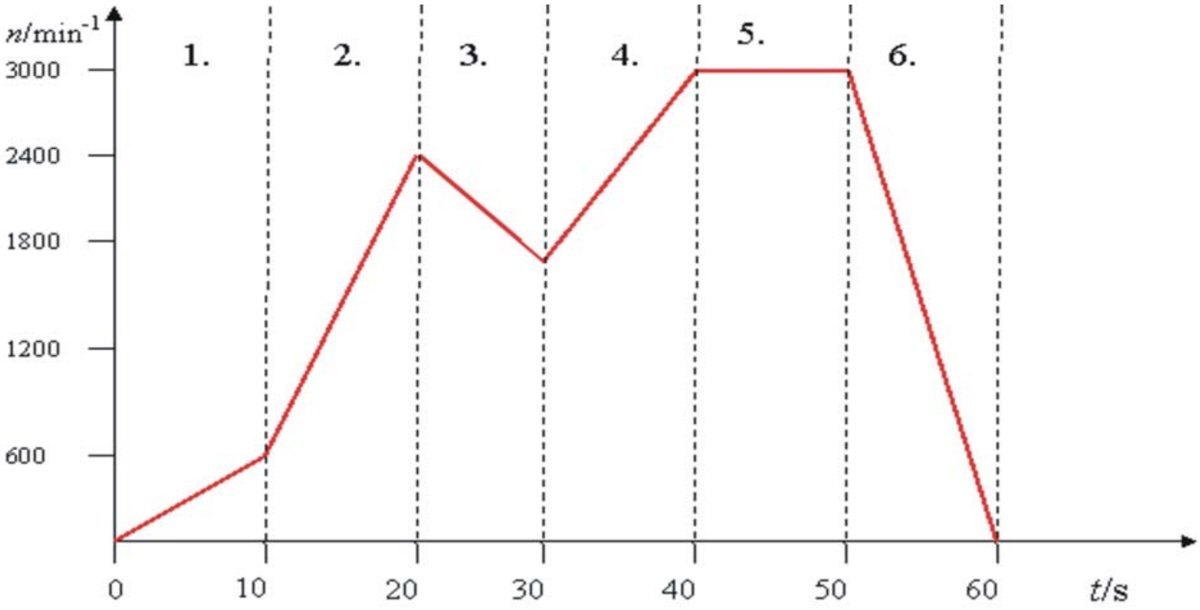
Positive Wurzel: $s_{0+} = 27485\, m$

Negative Wurzel: $s_{0-} = 154\, m$

Die Lösung zum positiven Wurzelwert $s_{0+} = 27485\, m$ ist unsinnig.

Die Lösung zur negativen Wurzel $s_{0-} = 154\, m$ ist die gesuchte Brunnentiefe.

2a.



2b. Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = 2\pi \cdot \frac{\omega_e - \omega_a}{t_e - t_a}$

wobei ω_e - Winkelgeschwindigkeit am Ende t_e

ω_a - Winkelgeschwindigkeit am Ende t_a

für die verschiedenen Teilbereiche *i* gilt: $\alpha_i = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{\Delta t} = 2\pi \cdot \frac{\omega_{ei} - \omega_{ai}}{t_{ei} - t_{ai}}$

Es ist zu beachten, dass die Drehzahl in der Tabelle des Aufgabenblattes in der Einheit min^{-1} angegeben ist, bei der Berechnung der Winkelbeschleunigung aber zweckmäßigerweise in die Einheit s^{-1} umgerechnet werden sollte (durch 60 teilen!).

Teilbereich	1	2	3	4	5	6
Winkelbeschleunigung α_i / s^{-2}:	2π	6π	-2π	$+4\pi$	0	-10π
Winkelbeschleunigung α_i / s^{-2}:	6,28	18,85	-6,28	+12,56	0	-31,42

2c. Die Zahl der Umdrehungen entspricht der Fläche unter der Funktion $n(t)$ im gezeigten Diagramm.

Es gilt allgemein: $N = \int_{t_u}^{t_o} n(t)\,dt$

Für einen Teilbereich i gilt: $N_i = \bar{n}_i \cdot \Delta t_i = \frac{n_{oi} + n_{ui}}{2} \cdot \Delta t_i$

Es ist $\Delta t_i = 10\,s = \frac{1}{6}\,\text{min}$ für alle *i*

Teilbereich	1	2	3	4	5	6
Drehzahl am Ende des Teilb. n_{oi} / min^{-1}:	600	2400	1800	3000	3000	0
Drehzahl am Anfang des Teilb. n_{oi} / min^{-1}:	0	600	2400	1800	3000	3000
Zahl der Umdrehungen im Teilbereich N_i:	50	250	350	400	500	250

Gesamtzahl der Umdrehungen: $N_{ges} = \sum_i N_i = 1800$

2d. Die mittlere Drehzahl ist: $\bar{n} = \frac{\sum_i n_i}{\sum_i i} = \frac{10800\,\min^{-1}}{6} = 1800\,\min^{-1}$

Zur Kontrolle des Ergebnisses von **2c.** kann die Gesamtzahl der Umdrehungen als Produkt der mittleren Drehzahl und der Gesamtzeit bestimmt werden:

$$N_{ges} = \bar{n} \cdot t_{ges} = 1800\,\min^{-1} \cdot 1\min = 1800$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist: $\bar{\omega} = 2\pi \cdot \bar{n} = 2\pi \cdot 1800\,\min^{-1}$

$$\bar{\omega} = 2\pi \cdot 30\,s^{-1} = 188{,}5\,s^{-1}$$

2e. In der Vorlesung wurde der Begriff des Kraftstoßes eingeführt und gezeigt, dass ein Kraftstoß gleich der Impulsänderung ist.

Es gilt: $\int F\,dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p$

also: Mittlerer Kraft mal Wirkungsdauer ist gleich Änderung des Impulses.
Für Rotation gilt folglich:

$$\int M\,dt = \bar{M} \cdot \Delta t = \Delta L$$

also: Mittleres Drehmoment mal Wirkungsdauer ist gleich Änderung des Drehimpulses.
Bei starren Körpern ist der Drehimpuls das Produkt des Massenträgheitsmoments und der Winkelgeschwindigkeit. Es gilt folglich: $\bar{M} \cdot \Delta t = \Delta L = J \cdot \Delta\omega$

Es folgt: $J = \frac{\bar{M} \cdot \Delta t}{\Delta\omega} = \frac{-50 \cdot 10^3\,Nm \cdot 10\,s}{-2\pi \cdot 50\,s^{-1}} = 1{,}59 \cdot 10^3\,kg\,m^2$

3a. Bezeichnungen:
Der in der Zeichnung angegeben Neigungswinkel von 30° soll mit θ bezeichnet werden.

Tangentialkomp. der Gewichtskraft von m_1: $F_{t1} = m_1\,g \sin\theta$

Seilkraft an m_1: F_{S1}

Seilkraft an der Rolle: F_{SR}

Massenträgheitsmoment der Rolle: $J_R = \frac{1}{2} m_R\,R^2$

Drehmoment an der Rolle: $M_R = F_{SR} \cdot R$

D'Alembertsches Prinzip für Masse m_1: $(F_{t1} - F_{S1}) - m_1\,a = 0$

D'Alembertsches Prinzip für Rolle m_R: $(F_{SR} \cdot R) - J_R\,\alpha = 0$

Nebenbedingungen:

Kein Schlumpf des Seils: $\alpha = \frac{a}{R}$

Kräfte am Seil: $F_{SR} = F_{S1} = F_S$

es folgt: $(m_1\,g \sin\theta - F_S) - m_1\,a = 0$

und: $(F_S \cdot R) - J_R \frac{a}{R} = 0$

Einsetzen von F_S $\left(m_1\,g \sin\theta - J_R \frac{a}{R^2}\right) - m_1\,a = 0$

$$\left(m_1\, g \sin\theta - \frac{1}{2} m_R\, R^2 \frac{a}{R^2}\right) - m_1\, a = 0$$

$$m_1\, g \sin\theta - \frac{1}{2} m_R\, a - m_1\, a = 0$$

$$m_1\, g \sin\theta - a\left(\frac{1}{2} m_R + m_1\right) = 0$$

$$a = \frac{m_1 \sin\theta}{\frac{1}{2} m_R + m_1} \cdot g = \frac{1 \cdot 0{,}5\, kg}{\left(\frac{1}{2} 2 + 1\right) kg} \cdot g$$

$$a = \frac{1 \cdot 0{,}5\, kg}{\left(\frac{1}{2} 2 + 1\right) kg} \cdot g = 0{,}25 \cdot g = 2{,}5\, m\, s^{-2}$$

3b. Im statischen Fall gilt, dass die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{t1} der Masse m_1 minus der Haftreibungskraft $F_{H,\max 1}$ der Masse m_1 gleich der Haftreibungskraft der Rolle $F_{H,\max R}$ ist.

<u>Bezeichnungen:</u>

Tangentialkomponente der Gewichtskraft: $F_{t1} = m_1\, g \sin\theta$

Haftreibungskraft der Masse m_1: $F_{H,\max 1} = \mu_{H,\max}\, m_1\, g \cos\theta$

Haftreibungskraft der Rolle: $F_{H,\max R} = \mu_{H,\max}\, m_R\, g$

Gleichgewichtsbedingung: $F_{t1} - F_{H,\max 1} = F_{H,\max R}$

$$m_1\, g \sin\theta - \mu_{H,\max}\, m_1 g \cos\theta = \mu_{H,\max}\, m_R g$$

$$m_1\, g \sin\theta = \mu_{H,\max}\left(m_1 g \cos\theta + m_R g\right)$$

Lösung:

$$\mu_{H,\max} = \frac{m_1\, g \sin\theta}{m_1 g \cos\theta + m_R g} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_R}{m_1}}$$

$$\mu_{H,\max} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_R}{m_1}} = \frac{0{,}5}{0{,}8660 + 2} = 0{,}1745$$

3c. <u>Bezeichnungen:</u>

Gleitreibungskraft der Masse m_1: $F_{G1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\theta$

Gleitreibungskraft der Rolle: $F_{GR} = \mu_G\, m_R\, g$

D'Alembertsches Prinzip für Masse m_1: $\left(F_{t1} - F_{S1} - F_{G1}\right) - m_1\, a = 0$

D'Alembertsches Prinzip für Rolle m_R: $\left(F_{SR} \cdot R - F_{GR} \cdot R\right) - J_R\, \alpha = 0$

<u>Nebenbedingungen:</u>

Kein Schlumpf des Seils: $\alpha = \frac{a}{R}$

Kräfte am Seil: $F_{SR} = F_{S1} = F_S$

es folgt: $\left(m_1\, g \sin\theta - F_S - \mu_G\, m_1\, g \cos\theta\right) - m_1\, a = 0$

und: $$\left(F_S \cdot R - \mu_G\, m_R\, g \cdot R\right) - J_R \frac{a}{R} = 0$$

es folgt: $$F_S = \mu_G\, m_R\, g + J_R \frac{a}{R^2}$$

Für homogenen Zylinder gilt: $$F_S = \mu_G\, m_R\, g + \frac{1}{2} m_R a$$

Einsetzen: $$m_1\, g \sin\theta - \mu_G\, m_R\, g - \frac{1}{2} m_R\, a - \mu_G\, m_1\, g \cos\theta - m_1\, a = 0$$

$$g\left(m_1 \sin\theta - \mu_G\left(m_R + m_1 \cos\theta\right)\right) = a\left(\frac{1}{2} m_R + m_1\right)$$

$$a = g \frac{m_1 \sin\theta - \mu_G\left(m_R + m_1 \cos\theta\right)}{\frac{1}{2} m_R + m_1}$$

$$a = g \frac{1kg \cdot 0{,}5 - 0{,}2\left(2\,kg + 1kg \cdot 0{,}8660\right)}{1kg + 1kg}$$

$$a = g \frac{1kg \cdot 0{,}5 - 0{,}15\left(2\,kg + 1kg \cdot 0{,}8660\right)}{1kg + 1kg}$$

$$a = 0{,}03505 \cdot g = 0{,}35\, m\, s^{-2}$$

4a. Für den elastischen Stoß des Balls m_B mit der senkrecht herabhängenden Stange m_S gilt:

der Drehimpulserhaltungssatz: $$m_B\, v_B\, l = J\, \omega_1 + m_B\, u_B\, l \qquad (1)$$

und der Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2} J\, \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2 \qquad (2)$$

mit Massenträgheitsmoment der Stange m_l mit Drehpunkt am Ende:

$$J = \frac{1}{3} m_l\, l^2 = \frac{2}{3}\, kg\, m^2$$

Bezeichnungen:

Geschwindigkeit von m_B vor Stoß: v_B

Geschwindigkeit von m_B nach Stoß: u_B

Winkelgeschwindigkeit nach Stoß: ω_1

Umformung Gleichung (1) liefert: $$\frac{J\, \omega_1}{m_B\, l} = v_B - u_B$$

Setze zur Vereinfachung: $$\hat{J} = \frac{J}{m_B\, l^2} = \frac{\frac{1}{3} m_l\, l^2}{m_B\, l^2} = \frac{\frac{1}{3} 3\,kg \cdot l^2}{1kg \cdot l^2} = 1$$

und Bahngeschwindigkeit des Stangenendpunkts im Abstand l nach dem Stoß:

und setze: $$u_l = l \cdot \omega_1$$

dann folgt für Gleichung (1): $$\hat{J}\, u_l = v_B - u_B$$

Umformung der Gleichung (2) liefert: $$\frac{J\, \omega_1^2}{m_B} = v_B^2 - u_B^2$$

$$\frac{J\, l^2 \omega_1^2}{m_B\, l^2} = v_B^2 - u_B^2$$

Einsetzten von $\hat{J}$ und u_l: $\hat{J}\, u_l^2 = v_B^2 - u_B^2$

Vereinfachtes Gleichungssystem:

$$\hat{J}\, u_l = v_B - u_B \qquad (3)$$

$$\hat{J}\, u_l^2 = v_B^2 - u_B^2 \qquad (4)$$

In dieser Form gelten die Gleichungen allgemein, also beliebige Werte von $\hat{J}$.
Im vorliegenden Fall ist $\hat{J} = 1$. Es folgt:

Umformung von (3): $u_l = v_B - u_B$

Einsetzten in (4): $(v_B - u_B)^2 = v_B^2 - u_B^2$

$$v_B^2 - 2 v_B u_B + u_B^2 = v_B^2 - u_B^2$$

$$v_B u_B - u_B^2 = 0 = u_B (v_B - u_B)$$

Es folgt: $u_{B,1} = 0$

$$u_{B,2} = v_B$$

Die letzte Lösung $u_{B,2} = v_B$ muss ausgeschlossen werden, da in diesem Fall keine Energie auf die Stange übertragen werden kann.

Lösung: $u_B = u_{B,1} = 0$

Lösungen für u_l und ω_1: $u_l = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B) = 1 \cdot (1-0) \cdot v_B = v_B$

$$u_l = 5\, m\, s^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{u_l}{l} = 5\, s^{-1}$$

b. Zur Bestimmung des maximalen Auslenkungswinkels dient wieder der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} J\, \omega_1^2 = m_l\, g\, h_1$$

wobei h_1 die Höhe bezeichnet, um die der Schwerpunkt beim Rückschwingen der Stange gehoben wird.

Es folgt: $h_1 = \frac{J \omega_1^2}{2 m_l\, g}$

$$h_1 = \frac{\frac{1}{3} m_l\, l^2 \cdot \omega_1^1}{2 \cdot m_l \cdot g} = \frac{\frac{1}{3}\, 3\, kg \cdot m^2 \cdot 5^2 s^{-2}}{2 \cdot 3\, kg \cdot 10\, m\, s^{-2}} = \frac{5}{12} m$$

$$h_1 = \frac{5}{12} m = 41{,}7\, cm$$

Für den Winkel ϑ gilt: $\vartheta = \arccos \frac{l - 2h}{l} = \arccos(0{,}166) = 80{,}4°$