Fachhochschule Hannover vorgezogene Wiederholungsklausur WS0809 26.09.08
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Zur Pfahlgründung bei Brücken oder Hafenanlagen verwendet man oft den "Freifallbären". Es handelt sich dabei um eine Ramme, bei der eine Masse entweder hydraulisch oder mit Dampf- oder Dieselwinden auf eine bestimmte Höhe gehoben und dann frei fallen gelassen wird. Man kann annehmen, dass der Hebevorgang einer gleichförmigen Bewegung entspricht.
Die Schlagzahl eines Freifallbären wird mit $50\,\text{min}^{-1}$ und die Hubgeschwindigkeit mit $2\,m\,s^{-1}$ angegeben. Wie groß ist der Fallweg? (25)

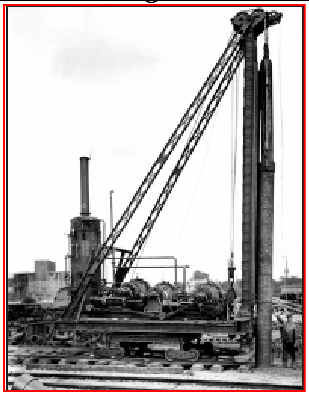

Abb. 1 *Historische Ramme*

2. Man vergleiche eine <u>rollende Kugel</u> (Masse $m_1 = 1kg$) und eine <u>gleitende Masse</u> ($m_2 = 1kg$) auf einer schiefen Ebene. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\vartheta = 45°$, beide Körper starten in der Höhe $h = 1m$ ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,2$.
(siehe Abb. 2, Darstellung nicht maßstabgerecht!).

a. Wie groß sind Zeiten für das Rollen bzw. Gleiten entlang der schiefen Ebene? (15)

b. Wie groß müsste die Gleitreibungszahl für die Masse m_2 sein, damit sie in gleicher Zeit wie die Kugel m_1 unten ankommen kann? (10)

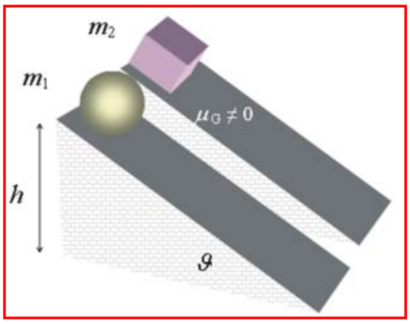

Abb. 2 *Rollende Kugel und gleitende Masse auf schiefer Ebene*

3. Eine Pendelmasse $m_a = m$ mit der Geschwindigkeit $v_a = 1\,m\,s^{-1}$ stößt elastisch auf zwei in Ruhe nebeneinander hängende Pendel mit der Masse $m_b = 2m$ und $m_c = m$ (siehe Abb.3).
Beim Stoßvorgang befinden sich alle Schwerpunkte auf gleicher Höhe (gestrichelten Linie).

a. Wie groß sind nach dem Stoß die Geschwindigkeiten u_a der Masse m_a und u_c der Masse m_c? (15)

b. Wie viel Prozent der ursprünglichen Energie von m_a wird auf m_c übertragen? (10)

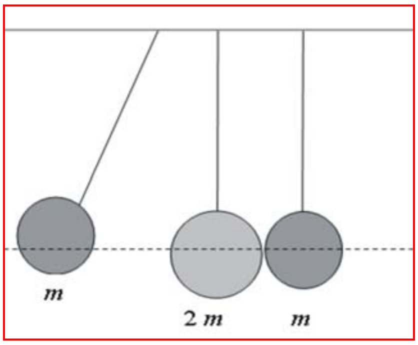

Abb. 3 *Stoßende Kugeln*

c. Wie verteilt sich die Energie nach den Stoßvorgängen auf die Massen m_a und m_b? (10)

4. Ein Drehmomentenrad (Abb. 4) erfährt durch die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 2\,kg$ eine Winkelbeschleunigung um seine horizontale Achse. Der Körper hängt an einem um ein kleineres Rad ($R = 10\,cm$) gewickelten Faden. Lässt man den Körper (m) los, beginnt das Rad zu drehen. Für die ersten zwei Umdrehungen nach dem Start werden $t_0 = 8\,s$ benötigt.
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_{ges} des Systems Rad/Achse. (20)

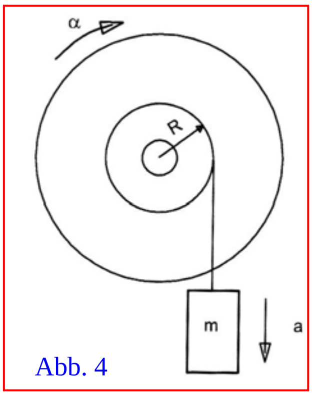

Abb. 4

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. Der Fall des Freifallbären ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Der Hubvorgang soll vereinfacht eine gleichförmige Bewegung darstellen.

Für den freien Fall gilt: $s_0 = \frac{1}{2} g t_0^2$

Für den Hubvorgang gilt: $s_1 = v_0 t_1$

Fallweg und Hubweg sind gleich: $s_0 = s_1$

Aus der Taktzahl von 50 min^{-1} kann die Zeit t_{ges} für Gesamtzeit von einem Hub- und Fallvorgang bestimmt werden: $t_{ges} = \frac{1}{50\,\min^{-1}} = \frac{60}{50} s = 1,2\,s$

Die Gesamtzeit gilt: $t_{ges} = t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2s_0}{g}} + \frac{s_0}{v_0}$ (*)

Zur Berechnung des Fallwegs s_0 muss die Gleichung (*) gelöst werden.

Gleichung (*): $t_{ges} - \frac{s_0}{v_0} = \sqrt{\frac{2s_0}{g}}$

Quadrieren: $t_{ges}^2 - 2\frac{s_0}{v_0} t_{ges} + \frac{s_0^2}{v_0^2} = \frac{2s_0}{g}$

$$t_{ges}^2 + \frac{s_0^2}{v_0^2} = \frac{2s_0}{g} + 2\frac{s_0}{v_0} t_{ges} = 2s_0\left(\frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{v_0}\right)$$

Setze zur Vereinfachung: $\alpha = \frac{1}{g} + \frac{t_{ges}}{v_0} = \frac{1}{10} s^2 m^{-1} + \frac{1,2}{2} s^2 m^{-1}$

$$\alpha = \frac{7}{10} s^2 m^{-1}$$

$$s_0^2 - 2c_0^2 \alpha \cdot s_0 + v_0^2 t_{ges}^2 = 0$$

Die p-q-Formel liefert: $s_{0\pm} = \alpha v_0^2 \pm \sqrt{\alpha^2 v_0^4 - v_0^2 t_{ges}^2}$

$$s_{0\pm} = 2,8\,m \pm \sqrt{7,84\,m^2 - 5,76\,m^2}$$

Positive Lösung $s_{0+} = 2,80\,m + 1,44\,m = 4,24\,m$ scheidet aus, da

die Hubzeit für 4,24 m bereits $t_{Hub} = \frac{4,24\,m}{2\,m\,s^{-1}} = 2,12\,s$ betragen würde.

Negative Lösung: $s_{0-} = 2,80\,m - 1,44\,m = 1,36\,m$ ist korrekt,

da die Hubzeit $t_{Hub} = \frac{1,36\,m}{2\,m\,s^{-1}} = 0,68\,s$

und die Fallzeit $t_{Fall} = \sqrt{\frac{2\,s_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38\,m}{10\,m\,s^{-2}}} = 0,52\,s$ beträgt.

2a. Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Für den Weg gilt: $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{h}{\sin \vartheta}$

Für die Roll- bzw. Gleitzeit folgt: $t = \sqrt{\frac{2h}{a \cdot \sin \vartheta}}$

Für die Roll- bzw. Gleitbewegung müssen die Beschleunigungen separat berechnet werden. Die Gewichtskraft $F_g = m_1 g$ wird zerlegt in die Tangentialkomponente F_t und Normalkomponente F_n.

Es gilt:

$$F_t = F_g \cdot \sin\vartheta = m\, g \sin\vartheta$$

$$F_n = F_g \cdot \cos\vartheta = m\, g \cos\vartheta$$

Beschleunigung a_K der <u>rollenden Kugel</u> mit Radius R_K:

Die Tangentialkomponente F_t erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_K und eine Winkelbeschleunigung α. Zur Erzeugung der Winkelbeschleunigung α ist das Drehmoment M_K erforderlich. Das D'Alembertsche Prinzip lautet:

$$\left(F_t - \frac{M_K}{R_K}\right) - m_1\, a_K = 0 \qquad (*)$$

mit: $M_K = J_K \cdot \alpha = \frac{2}{5} m_1 R_K^2 \cdot \alpha$

Die Kugel soll rollen. Rollbedingung: $a_K = R_K \cdot \alpha$

Einsetzen in Gl. (*): $\left(F_t - \frac{2\, m_1 R_K^2\, a_K}{5\, R_K\, R_K}\right) - m_1\, a_K = 0$

$$m_1\, g \sin\vartheta - \frac{2}{5} m_1 a_K - m_1 a_K = 0$$

Schwerpunktbeschleunigung der Kugel: $a_K = \frac{5}{7} g \sin\vartheta$ (5)

Für die Beschleunigung gilt nach Gl. (5): $a_K = \frac{5}{7} g \sin\vartheta = \frac{5}{7} 10\, m\, s^{-2} \sin 45° = 5{,}051\, m\, s^{-2}$

Gesamtweg: $s_{ges} = \frac{h}{\sin\vartheta} = \frac{1\, m}{\sin 45°} = 1{,}414\, m$

Gesamtzeit: $s_{ges} = \frac{1}{2} a_K\, t_{ges}^2$

Lösung für Rollbewegung: $t_{ges} = \sqrt{\frac{2 s_{ges}}{a_K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7\, h}{5\, g \sin^2\vartheta}} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{14\, h}{5\, g}}$

$$t_{ges} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{14\, h}{5\, g}} = 1{,}414 \cdot \sqrt{\frac{14\, m}{50\, ms^{-2}}}$$

$$t_{ges} = 1{,}414\, s \cdot \sqrt{\frac{14}{50}} = 1{,}414\, s \cdot 0{,}529 = 0{,}748\, s$$

Beschleunigung a_M der <u>gleitenden Masse</u> m_2:

Die Tangentialkomponente F_t erzeugt eine Beschleunigung des Schwerpunktes a_M. Die Gleitreibungskraft $F_G = \mu_G\, F_n = \mu_G\, m_2\, g \cos\vartheta$ wirkt entgegengesetzt. Das D'Alembertsche Prinzip lautet:

$$\left(F_t - F_G\right) - m_2\, a_M = 0 \qquad (**)$$

Einsetzen von F_t und F_G in Gl. (**): $m_2\, g \sin\vartheta - \mu_G\, m_2\, g \cos\vartheta - m_2\, a_M = 0$

Beschleunigung der gleitenden Masse: $a_M = g\left(\sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta\right)$ (6)

Beschleunigung für Gleiten nach Gl (6) $a_M = 10\, m\, s^{-2}\left(\sin 45° - 0{,}2 \cdot \cos 45°\right)$

$$a_M = 5{,}656\, m\, s^{-2}$$

Lösung für Gleitbewegung:

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2s_{ges}}{a_M}} = \sqrt{\frac{2\cdot h}{g\left(\sin^2\vartheta - \mu_G \sin\vartheta\cos\vartheta\right)}}$$

$$t_{ges} = \sqrt{\frac{2\,m}{10\,m\,s^{-2}\left(0{,}5-0{,}1\right)}} = 0.707\,s$$

b. Wenn Roll- und Gleitbewegung in gleichen Zeiten erfolgen sollen, muss gelten:

$$a_M = a_K$$

$$\frac{5}{7} g \sin\vartheta = g\left(\sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta\right)$$

$$\frac{5}{7} \sin\vartheta = \sin\vartheta - \mu_G \cos\vartheta$$

$$\mu_G \cos\vartheta = \sin\vartheta - \frac{5}{7}\sin\vartheta = \frac{2}{7}\sin\vartheta$$

$$\mu_G = \frac{2}{7}\tan\vartheta = 0{,}286$$

3a. Es handelt sich um <u>zwei separate</u> zentral elastische Stöße: Zunächst stößt m_a auf m_b, dann stößt m_b auf m_c.

Allgemeine Gleichungen (mit Indices 1 und 2) für einen zentralen elastischen Stoß mit den Stoßpartnern m_1 mit $\vec{v}_1$ (vorher) und $\vec{u}_1$ (nachher) und m_2 mit $\vec{v}_2$ und $\vec{u}_2$ (siehe Formelsammlung):

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_2$$

1. Anwendung auf ersten Stoß: $m_a = m$ **mit** $v_a = 1\,m\,s^{-1}$ **stößt auf** $m_b = 2\,m$ **mit** $v_b = 0$**:**

Geschwindigkeit u_a von m_a nach dem ersten Stoß:

$$u_a = \frac{2m_b}{m_a+m_b}v_b + \frac{m_a-m_b}{m_a+m_b}v_a$$

Lösung:

$$u_0 = \frac{m-2\,m}{m+2m}v_a = -\frac{1}{3}v_a = -0{,}3333\,m\,s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_b von m_b nach dem ersten Stoß:

$$u_b = \frac{2m_a}{m_a+m_b}v_a + \frac{m_b-m_a}{m_a-m_b}v_b$$

$$u_b = \frac{2m_a}{m_a+m_b}v_a = \frac{2\cdot m}{3\,m}v_a = \frac{2}{3}v_0 = 0{,}6666\,m\,s^{-1}$$

2. Anwendung auf zweiten Stoß: $m_b = 2\,m$ **mit** $v_b = 0{,}666\,m\,s^{-1}$ **stößt auf** $m_c = m$ **mit** $v_c = 0$**:**

Geschwindigkeit u_1 von m_1 nach dem zweiten Stoß:

$$u_b = \frac{2m_c}{m_b+m_c}v_c + \frac{m_b-m_c}{m_b+m_c}v_b$$

$$u_b = \frac{m_b - m_c}{m_b + m_c} v_b = \frac{2m - m}{2m + m} v_b = \frac{1}{3} v_b$$

$$u_b = 0,3333 \cdot 0,6666\, m\, s^{-1} = 0,2222\, m\, s^{-1}$$

Geschwindigkeit u_c von m_c nach dem zweiten Stoß:

$$u_c = \frac{2m_b}{m_b + m_c} v_b + \frac{m_c - m_b}{m_b - m_c} v_c$$

$$u_c = \frac{2m_b}{m_b + m_c} v_b = \frac{2 \cdot 2\, m}{2\, m + m} v_b = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,8888\, m\, s^{-1}$$

Ergebnis: $$u_c = \frac{8}{9} m\, s^{-1} = 0,88888\, m\, s^{-1}$$

3b. Energie der Masse m_a vor dem ersten Stoß:

$$E_{kin,a}^{vorher} = \frac{1}{2} m_0\, v_0^2 = \frac{1}{2} (m) 1^2 \frac{m^2}{s^2} = m \cdot 0,5 \frac{m^2}{s^2}$$

Energie der Masse m_c nach dem zweiten Stoß:

$$E_{kin,c}^{nachher} = \frac{1}{2} m_c\, u_c^2 = \frac{1}{2} m \cdot 0,8888^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0,3951 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $$P_c = \frac{E_{kin,c}^{nachher}}{E_{kin,a}^{vorher}} = \frac{0,3951}{0,5} = 79,0\%$$

3c. Verteilung der kinetischen Restenergien:
Energie der Masse m_a nach dem ersten Stoß:

$$E_{kin,a}^{nachher} = \frac{1}{2} m_a\, u_a^2 = \frac{1}{2} m \cdot (-0,3333)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,a}^{nachher} = \frac{1}{2} m \cdot (-0,3333)^2 \frac{m^2}{s^2} = m \cdot 0,05555 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $$P_a = \frac{E_{kin,a}^{nachher}}{E_{kin,a}^{vorher}} = \frac{0,0555}{0,5} = 11,1\%$$

Energie der Masse m_b nach dem zweiten Stoß:

$$E_{kin,b}^{nachher} = \frac{1}{2} m_b\, u_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\, m \cdot (-0,2222)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{kin,b}^{nachher} = \frac{1}{2} \cdot 2\, m \cdot (-0,2222)^2 \frac{m^2}{s^2} = m_1 \cdot 0,04937 \frac{m^2}{s^2}$$

Ergebnis: $$P_b = \frac{E_{kin,b}^{nachher}}{E_{kin,a}^{vorher}} = \frac{0,0494}{0,5} = 9,9\%$$

Prüfung: $$P_a + P_b + P_c = 79,0\,\% + 9,9\,\% + 11,1\% = 100,0\,\%$$

4a. Lösungsweg auf der Basis von Kräften und Momenten:
Nach Aufgabenstellung benötigt Rad für die ersten zwei Umdrehungen ($N = 2$) eine Zeit von $t_0 = 8\, s$. Bei vier Umdrehungen des Rades wickelt sich der Faden um die Strecke s_0 ab un die Masse *m* bewegt sich um die Strecke s_0 nach unten. Es gilt:

$$s_0 = U \cdot N = (2\, \pi\, R) \cdot N = 1,257\, m$$

Die Masse *m* fällt gleichmäßig beschleunigt.

Es gilt: $$s_0 = \frac{1}{2} a t_0^2$$

$$a = \frac{2 s_0}{t_0^2} = \frac{2 \cdot 1{,}257 m}{64 s^2} = 0{,}03928 \, m \, s^{-2}$$

Kräfte, die auf m wirken: Gewichtskraft F_g und entgegengesetzt die Seilkraft F_S

D'Alembertsches Prinzip für m: $$\left(\sum_i F_i \right) - m a = 0 = \left(F_g - F_S \right) - ma$$

Die Seilkraft F_S erzeugt ein Drehmoment am System Rad/Achse:

$$M = F_S \cdot R$$

Das Drehmoment erzeugt eine Winkelbeschleunigung::

$$M = J \cdot \alpha$$

Für Beschleunigung a der Masse m und Winkelbeschleunigung α vom System Rad/Achse gilt der Zusammenhang:

$$a = R \cdot \alpha$$

Es folgt: $$F_S \cdot R = J \frac{a}{R}$$

$$F_S = J \frac{a}{R^2}$$

Es folgt: $$\left(F_g - F_S \right) - ma = m(g - a) - \frac{J a}{R^2} = 0$$

$$J = m R^2 \frac{g - a}{a}$$

$$J = 2 \cdot (0{,}1)^2 \frac{10 - 0{,}03928}{0{,}03928} kg \, m^2 = 5{,}07 \, kg \, m^2$$

4b. Lösungsweg mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes (alternativ):

Setze (oBdA) die Gesamtenergie im Ausgangszustand (Index 0) gleich Null. Dann ist im Endzustand (Index 1) (also dann, wenn die Masse m die Strecke $s = 1{,}257 m$ gefallen ist) die Gesamtenergie ebenfalls Null.

$$E_{ges,0} = 0 = E_{pot,1} + E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{trans} = E_{ges,1}$$

Potentielle Energie im Endzustand: $E_{pot,1} < E_{pot,0} = 0$

Kinetische Energie der Rotation: $E_{kin,1}^{rot} > E_{kin,0}^{rot} = 0$

Kinetische Energie der Translation: $E_{kin,1}^{trans} > E_{kin,0}^{trans} = 0$

Es folgt: $$-E_{pot,1} = E_{kin,1}^{trans} + E_{kin,1}^{rot}$$

$$-\left(m g \left(-s_0 \right) \right) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Es gilt: $$\omega = \frac{v}{R}$$

Einsetzen von ω: $$m g s = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2}$$

Umstellen: $$J = \left(2 m g s - m v^2 \right) \frac{R^2}{v^2}$$

$$J = mR^2 \left(\frac{2 g s}{v^2} - 1 \right)$$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

und: $v = a t$ oder $a = \frac{v}{t}$

Einsetzen von *a*: $v = \frac{2s}{t^2} t = \frac{2s}{t}$

$$J = mR^2 \left(\frac{2 g s t^2}{4s^2} - 1 \right) = mR^2 \left(\frac{g t^2}{2 s} - 1 \right)$$

$$J = 2\,kg \cdot 0{,}1^2\, m^2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 8^2}{2 \cdot 1{,}257} - 1 \right)$$

$$J = 0{,}02\,kg\, m^2 \cdot 253{,}57 = 5{,}07\,kg\, m^2$$