

1. Ein Motorrad und ein PKW fahren nebeneinander mit gleicher Geschwindigkeit auf eine grüne Ampel zu. Bei einem Abstand von 60 m schaltet die Ampel auf gelb. Die Gelbphase dauert 3 s. Beide Fahrer reagieren 1,0 s nach der Ampelumschaltung: Der PKW bremst gleichmäßig mit $-2,5 \text{ m s}^{-2}$ bis zum Stopp direkt vor der Ampel, das Motorrad beschleunigt mit $+4,0 \text{ m s}^{-2}$.
 - a. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Fahrzeuge?(10)
 - b. Kann das Motorrad die Ampel noch während der Gelbphase passieren?(10)
 - c. Welches Licht zeigt die Ampel, wenn der PKW vor der Ampel zum Stillstand kommt?(5)

2. Eine Masse ($m_1 = 1 \text{ kg}$) ist mit einem (masselosen) Seil über eine Umlenkrolle (homogener Zylinder) der Masse $m_R = 1 \text{ kg}$ mit einer zweiten Masse $m_2 > m_1$ verbunden (Abb. 1).

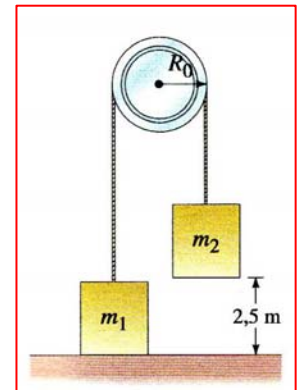


Abb. 1.

- a. Wie groß muss m_2 sein, damit die Beschleunigung $a = 3,75 \text{ m s}^{-2}$ beträgt?.....(15)
- b. Welche Höchstgeschwindigkeiten erreichen die Massen, wenn m_2 eine Streck von $s = 2,5 \text{ m}$ gefallen ist?.....(8)
- c. Welche mittlere (1), welche größte (2) Leistung wird bei der Aufgabenstellung **2b.** zur Erzeugung der Bewegung der Umlenkrolle benötigt?.....(8)

3. Ein Körper der Masse $m_2 = 1 \text{ kg}$ gleitet aus der Höhe $h = 1,41 \text{ m}$ eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta = 45^\circ$ hinab (Abb. 2.). Anschließend rutscht er auf einem horizontalen Streckenabschnitt der Länge $s_1 = 0,71 \text{ m}$ und stößt am Ende auf einen Pendelkörper mit der Masse $m_1 = 1 \text{ kg}$. Die Gleitreibungszahl auf der gesamten Strecke beträgt $\mu_G = 0,141$.

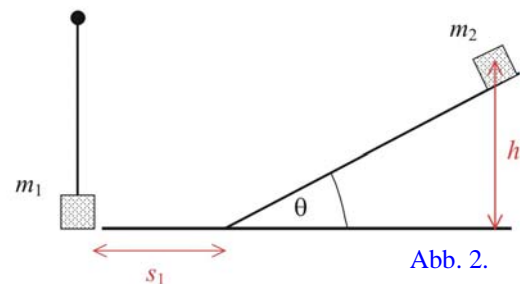


Abb. 2.

- a. Die Massen m_1 und m_2 sollen einen vollkommen unelastischen Stoß ausführen. Auf welche Höhe schwingen die beiden miteinander verbundenen Massen nach dem Stoß aus?(15)
 - b. Wie groß ist der Energieverlust beim Stoß relativ zur kinetischen Energie des Körpers m_2 direkt vor dem Stoß?(10)
4. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment der Welle (Abb. 3) bezüglich der Symmetrieachse. (Daten: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 0,2 \cdot a$, das Material sei homogen mit der Dichte $\rho = 8,0 \text{ g cm}^{-3}$)(20)

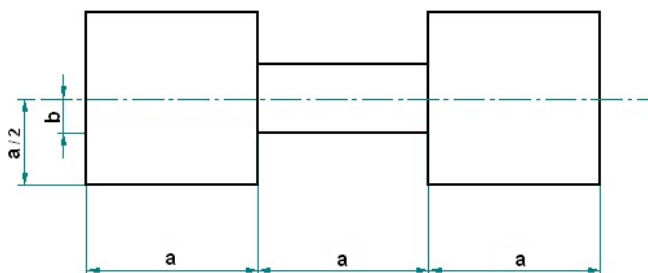
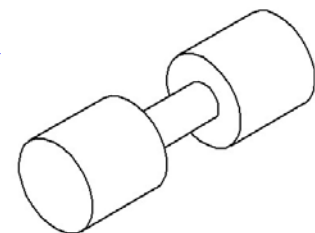


Abb. 3.

Vollbild



Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Lösungen:

1a. Gegeben:

Gesamtstrecke: $s_{ges} = 60 \text{ m}$

Bremsverzögerung PKW: $a_1 = -2,5 \text{ m s}^{-2}$

Beschleunigung Motorrad: $a_2 = +4 \text{ m s}^{-2}$

Reaktionszeit der Fahrer = Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 1 \text{ s}$,

Gesucht:

Anfangsgeschwindigkeit: v_0

Es gilt für PKW(1): Gesamtweg = Reaktionsweg + Bremsweg

$$s_{ges} = s_v + s_{a1} = v_0 t_v + \frac{v_0^2}{2|a_1|}$$

Lösung für v_0 :

$$v_0 = \pm \sqrt{2|a_1|s_{ges} + a_1^2 t_v^2} - |a_1|t_v$$

$$v_0 = \pm \sqrt{(2 \cdot 2,5 \cdot 60 + 6,25)m^2 s^{-2}} - 2,5 m s^{-1} = (+17,5 - 2,5) \frac{m}{s}$$

$$v_0 = +15,0 \frac{m}{s} = 54,0 \frac{km}{h}$$

- b. Die Gelbphase dauert $t_4 = 3 \text{ s}$. Wo befindet sich das Motorrad nach $t_4 = 3 \text{ s}$? Vor der Ampel, dann ergäbe sich ein Rotlichtverstoß.

Lösung: $s_2(t_4 = 3 \text{ s}) = s_v + s_{a2} = v_0 t_4 + \frac{1}{2} a_2 (t_4 - t_v)^2$

$$s_2(t_4 = 3 \text{ s}) = 15 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} 4 \text{ m s}^{-2} \cdot 2^2 \text{ s}^2$$

$$s_2(t_4 = 3 \text{ s}) = 45 \text{ m} + 8 \text{ m} = 53 \text{ m}$$

Das Motorrad ist nach der Gelbphase von 3 s noch vor der Ampel, deshalb Rotlichtverstoß!!! (Die Beschleunigung hat doch nicht gereicht, um noch rechtzeitig über die Ampel zu gelangen.)

- c. Bremszeit für PKW: $t_{a1} = \frac{v_0}{a_{a1}} = \frac{15 \text{ m s}^{-1}}{2,5 \text{ m s}^{-2}} = 6 \text{ s}$

Gesamtzeit bis zum Anhalten = Reaktionszeit + Bremszeit = 1 s + 6 s = 7 s.

Die Ampel ist also bereits lange rot, wenn der PKW stoppt (das ist aber verkehrsrechtlich kein Problem, denn PKW stoppt vor der Ampel).

2a. Bezeichnungen:

Gewichtskraft der Masse m_1 F_{g1}

Gewichtskraft der Masse m_2 F_{g2}

Seilkraft an der Masse m_1 F_{S1}

Seilkraft an der Masse m_2 F_{S2}

Drehmoment nach links $M_1 = F_{S1} \cdot R_0$

Drehmoment nach rechts $M_2 = F_{S2} \cdot R_0$

D'Alembertsches Prinzip:

für m_2 : $(F_{g2} - F_{S2}) - m_2 a_2 = 0$ (1)

für m_1 : $(F_{S1} - F_{g1}) - m_1 a_1 = 0$ (2)

für die Rolle m_R : $(F_{S2} \cdot R_0 - F_{S1} \cdot R_0) - J_R \alpha = 0$ (3)

Nebenbedingungen:

kein Schlupf des Seils auf Rolle $a = R_0 \cdot \alpha$ (4)

keine Elastizität des Seils: $a_1 = a_2 = a$ (5)

Massenträgheitsmoment $J_R = \frac{1}{2} m_R R_0^2$ (6)

Aus (3), (4) und (6) folgt: $(F_{S2} - F_{S1}) \cdot R_0 - \frac{m_R R_0^2 a}{2 R_0} = 0$

es folgt: $(F_{S2} - F_{S1}) = \frac{m_R a}{2}$ (7)

Addiere (1) und (2) und setze (5) ein:

$$(F_{S1} - F_{g1}) - m_1 a + (F_{g2} - F_{S2}) - m_2 a = 0$$

es folgt: $F_{g2} - F_{g1} - (F_{S2} - F_{S1}) - m_1 a - m_2 a = 0$

Setze (7) ein: $m_2 g - m_1 g - \frac{m_R a}{2} - m_1 a - m_2 a = 0$

$$m_2 (g - a) = m_1 (g + a) + \frac{m_R a}{2}$$

Lösung: $m_2 = \frac{m_1 (g + a) + \frac{m_R a}{2}}{(g - a)} = \frac{13,75 \text{ N} + 1,875 \text{ N}}{6,25 \text{ m s}^{-2}} = 2,5 \text{ kg}$

2b. Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt.

Es gilt: $s = \frac{1}{2} a t^2$ und $v = a \cdot t$

es folgt: $s = \frac{v^2}{2a}$

Lösung: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 3,75 \cdot 2,5} \text{ m s}^{-1} = \sqrt{18,75} \text{ m s}^{-1} = 4,33 \text{ m s}^{-1}$

2c. Mittlere Leistung: $P_{\text{mittel}} = \left(\sum_i \vec{M}_i \right) \cdot \vec{\omega} = (M_2 - M_1) \cdot \vec{\omega} = \frac{(F_{S2} - F_{S1}) \cdot R_0 \cdot \vec{v}}{R_0}$

aus (7) folgt: $P_{\text{mittel}} = (F_{S2} - F_{S1}) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m_R \cdot a \cdot \vec{v}$

$$P_{\text{mittel}} = \frac{1}{2} m_R \cdot a \cdot \vec{v} = 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 3,75 \text{ m s}^{-2} \cdot \frac{4,33}{2} \text{ m s}^{-1}$$

$$P_{\text{mittel}} = 4,06 \text{ W}$$

Maximalleistung: $P_{\text{max}} = \frac{1}{2} m_R \cdot a \cdot \vec{v} = 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 3,75 \text{ m s}^{-2} \cdot 4,33 \text{ m s}^{-1}$

$$P_{\text{max}} = 8,12 \text{ W}$$

3a. Berechnung von Hilfsgrößen:

Anfangsenergie Masse m_2 : $E_{pot,2} = m_2 g h = 14,1 J$

Weg auf schiefer Ebene: $s_0 = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{1,41 m}{\sin(45^\circ)} \cong 2 m$

Reibungsarbeit auf s_0 : $W_{R0} = \mu_G m g \cos \theta s_0 \cong 2 J$

Reibungsarbeit s_1 : $W_{R0} = \mu_G m g s_1 \cong 1 J$

Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = 3 J$

Kinetische Energie des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$E_{kin,2} = E_{pot,2} - W_{R,ges} = 11,1 J$$

Geschwindigkeit des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin,2}}{m_2}} = 4,712 m s^{-1}$$

Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.

Impulserhaltungssatz: $m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + Q_{vu}$

Lösung für u : $u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1}{2} v_2 = \frac{1}{2} \cdot 4,712 m s^{-1} = 2,356 m s^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $(m_1 + m_2) g h_{vu} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$

$$h_{vu} = \frac{u^2}{2g} = 0,2775 m$$

3b. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.

Absoluter Energieverlust: $Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$

$$Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{1}{4} v_2^2 = \frac{1}{2} \left(m_2 - \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \right) v_2^2$$

Setze: $m_1 = m_2 = m$ $Q_{vu} = \frac{1}{2} \left(m - \frac{m}{2} \right) v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \right) v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m v_2^2 \right) = \frac{1}{2} E_{kin,2}$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q_{vu}}{E_{kin,2}} = \frac{1}{2} = 50\%$

4. Die Welle kann ich drei Zylinder zerlegt werden, die jeweils die Länge a besitzen. Zwei Zylinder haben den Radius $a/2$ (Masse $m_{Zyl,1}$), ein Zylinder hat den Radius $b = 0,2 \cdot a = \frac{a}{5}$ (Masse $m_{Zyl,2}$).

Massenträgheitsmoment Zylinder: $J_{Zyl} = \frac{1}{2} m_{Zyl} R^2$

Masse Zylinder:

$$m_{\text{Zyl}} = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

Erster Zylinder:

$$m_{\text{Zyl},1} = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a$$

Zweiter Zylinder:

$$m_{\text{Zyl},2} = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{5}\right)^2 \cdot a$$

Massenträgheitsmoment:

$$J_{\text{ges}} = 2 \cdot J_{\text{Zyl},1} + J_{\text{Zyl},2}$$

$$J_{\text{ges}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m_{\text{Zyl},1} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Zyl},2} \cdot b^2$$

$$J_{\text{ges}} = \rho \cdot \pi \cdot \frac{a^5}{16} + \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{25} \cdot \frac{a^2}{25}$$

$$J_{\text{ges}} = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{a^5}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{25} \cdot \frac{a^2}{25}\right)$$

$$J_{\text{ges}} = \rho \cdot \pi \cdot a^5 \left(\frac{625+8}{10000}\right) = \rho \cdot \pi \cdot a^5 \cdot \frac{633}{10000}$$

$$J_{\text{ges}} = \rho \cdot \pi \cdot a^5 \cdot 0,0633 = 4972 \text{ g cm}^2$$

$$J_{\text{ges}} = 4,972 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$J_{\text{ges}} = 4,972 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$