Fachhochschule Hannover vorgezogene Wiederholungsklausur WS0809 10.03.09
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Der Anhalteweg eines Pkw setzt sich aus dem Reaktionsweg (gleichförmige Bewegung vom Erkennen des Hindernisses bis zum Beginn des Bremsens) und dem tatsächlichen Bremsweg (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bis zum Stillstand zusammen. Die Reaktionszeit des Fahrers, betrage 0,6 s und die Bremsverzögerung sei -8 m/s².

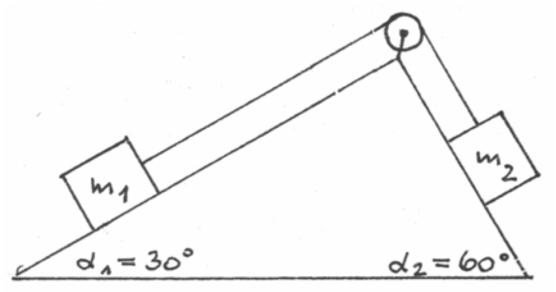
a. Zeichnen Sie das *v*-*t*-Diagramms

b. Wie groß darf die maximale Geschwindigkeit, wenn ein Anhalteweg von 10 m nicht überschritten werden soll?

c. Wie groß ist die Bremszeit und wie groß sind der Reaktionsweg und der reine Bremsweg?

d. Wie lautet die mittlere Geschwindigkeit für den Anhalteweg?

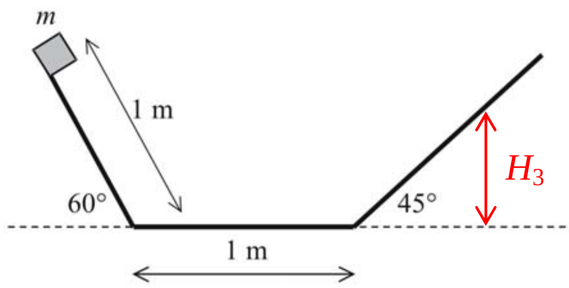
2. In der rechts dargestellten Situation wird die Masse m_1 = 1 kg durch ein über eine Rolle (Vollzylinder mit m_R=1,5 kg und dem Radius 0,1 m) geführtes masseloses Seil von der Masse m_2 beschleunigt, die sich dabei nach unten bewegt. Die Gleitreibungszahl ist überall gleich 0,4.



a. Wie groß muss m_2 gewählt werden, um an der Rolle eine Winkelbeschleunigung von $\alpha = 5\,s^{-2}$ zu erzeugen?

b. Wie groß sind die Seilkräfte links und rechts der Rolle?

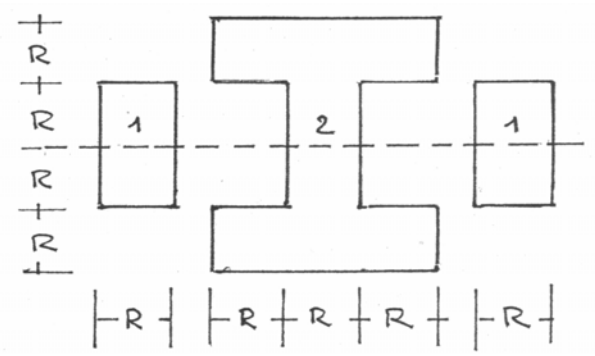
3. Eine Masse von m = 1,5 kg gleitet mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine 1 m lange und 60° geneigte schiefe Ebene hinab, rutscht dann waagerecht 1 m weit und schließlich eine schiefe Ebene unter 45° hinauf. Die Gleitreibungszahl für die gesamten Strecke beträgt μ_G = 0,25.



a. Wie groß muss v_0 gewählt werden, damit die Höhe H_3 = 0,8m auf der 45° Ebene erreichen werden kann?

b. Welche Energie geht auf dem Weg bis zum Umkehrpunkt als Reibungswärme verloren?

4. Zwei rotationssymmetrische Bauteile aus gleichem Material haben die in der Skizze angegebenen Größenverhältnisse.



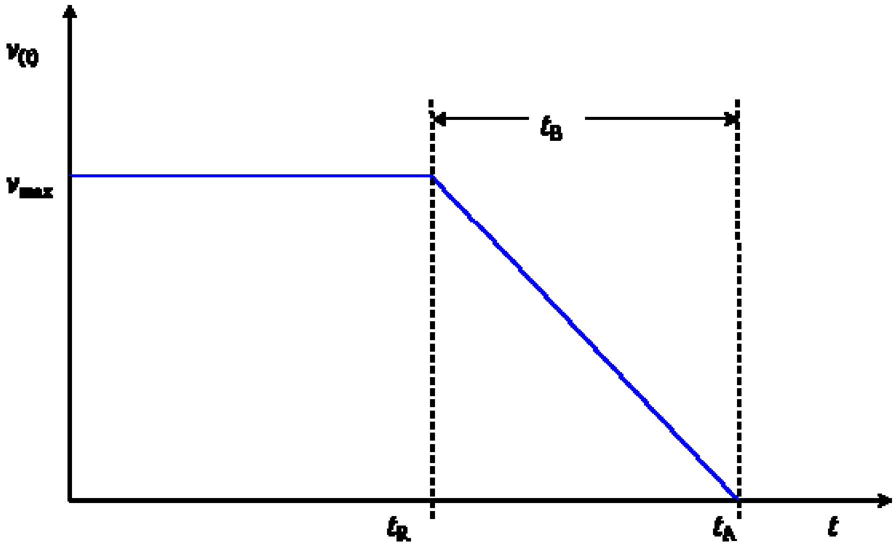
a. Wie lautet das Verhältnis J_2/J_1 der beiden Massenträgheitsmomente?
Von den auf gleicher Achse rotierbar gelagerten Bauteilen dreht sich anfangs nur das mittlere mit n_2 = 800/min. Dann werden die beiden kleinen Bauteile angekuppelt.

b. Man ermittele die sich einstellende gemeinsame Drehzahl sowie den von der Kupplung aufgenommenen prozentualen Anteil der Anfangsenergie.

c. Wie lange dauert der Ankupplungsvorgang, wenn die Kupplung ein Drehmoment von 2000 Nm aufbringt und J_1 = 10 kg m^2 beträgt?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:
1a.



1b. **Gegeben**:

Anhalteweg:	$s_A = 10\,m$
Reaktionszeit	$t_R = 0,6\,s$
Bremsverzögerung:	$a_B = -8\,m\,s^{-2}$

Für den Anhalteweg gilt:
$$s_A = s_v + s_B = v_{\max} \cdot t_R + \frac{v_{\max}^2}{2|a_B|}$$
$$v_{\max}^2 + 2|a_B|t_R \cdot v_{\max} = 2\,s_A\,|a_B|$$
$$v_{\max}^2 + 2|a_B|t_R \cdot v_{\max} + a_B^2\,t_R^2 = a_B^2\,t_R^2 + 2\,s_A\,|a_B|$$
$$v_{\max} = \pm\sqrt{a_B^2\,t_R^2 + 2\,s_A\,|a_B|} - |a_B|\,t_R$$
$$v_{\max} = \pm\sqrt{64 \cdot 0,36 + 2 \cdot 10 \cdot 8}\,m\,s^{-1} - 8 \cdot 0,6\,m\,s^{-1}$$
$$v_{\max} = \pm\sqrt{23,04 + 160}\,m\,s^{-1} - 4,8\,m\,s^{-1}$$
$$v_{\max} = (\pm 13,53 - 4,80)\,m\,s^{-1}$$

Positive Lösung: $v_{\max} = 8,73\,m\,s^{-1} = 31,4\,km\,h^{-1}$

1c. Bremszeit: $t_B = \frac{v_{\max}}{|a_B|} = \frac{8,73}{8}\,s = 1,09\,s$

Reaktionsweg: $s_R = v_{\max} \cdot t_R = 8,73\,m\,s^{-1} \cdot 0,6s = 5,24\,m$

Bremsweg: $s_B = s_A - s_R = (10,00 - 5,24)\,m = 4,76\,m$

oder: $s_B = \frac{1}{2}|a_B|\,t_B^2 = 0,5 \cdot 8 \cdot 1,19\,m = 4,76\,m$

1d. Mittlere Geschwindigkeit für den Anhalteweg = Gesamtweg / Gesamtzeit
$$v_m = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{s_{ges}}{t_R + t_B} = \frac{10\,m}{0,60 + 1,09\,s} = \frac{10}{1,69} = 5,92\,m\,s^{-1}$$

2a. Da sich die Masse m_2 nach Aufgabenstellung nach unten bewegen soll, muss sich m_1 nach oben bewegen und die Umlenkrolle im Uhrzeigersinn (nach rechts) drehen. Die Beschleunigung erfolgt in Richtung der auf m_2 wirkenden "Hangabtriebskraft" (Tangentialkomponente $F_{t,2}$ der Gewichtskraft $\vec{F}_{g,2}$).

Hangabtriebskraft für m_2: $F_{t,2} = m_2 g \cdot \sin\alpha_2$

Gleitreibungskraft für m_2: $F_{G,2} = \mu_G \cdot m_2\, g \cdot \cos\alpha_2$

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(F_{t,2} - F_{G,2} - F_{S,2}\right) - m_2\, a_2 = 0$ (*)

mit Seilkraft an m_2: $F_{S,2} = F_{t,2} - F_{G,2} - m_2\, a_2$

Hangabtriebskraft für m_1: $F_{t,1} = m_1 g \cdot \sin\alpha_1$

Gleitreibungskraft für m_1: $F_{G,1} = \mu_G \cdot m_1 g \cdot \cos\alpha_1$

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(F_{S,1} - F_{t,1} - F_{G,1}\right) - m_1\, a_1 = 0$ (**)

mit Seilkraft an m_1: $F_{S,1} = F_{t,1} + F_{G,1} + m_1\, a_1$

D'Alembertsches Prinzip für m_R: $\left(\left(F_{S2} - F_{S1}\right)\cdot R\right) - J_R \cdot \alpha = 0$

mit Massenträgheitsmoment: $J_R = \frac{1}{2} m_R\, R^2$

Rollbedingung $a = \alpha \cdot R$

Es gilt: $a_1 = a_2 = a = R \cdot \alpha$

Es folgt: $F_{S,2} - F_{S,1} = \frac{m_R \cdot R}{2} \cdot \alpha$ (***)

Einsetzen von (*) und (**) in (***): $\left(F_{t,2} - F_{G,2} - m_2\, R\alpha\right) - \left(F_{t,1} + F_{G,1} + m_1\, R\alpha\right) = \frac{m_R\, R}{2} \cdot \alpha$

$$F_{t,2} - F_{G,2} - m_2\, R\alpha = F_{t,1} + F_{G,1} + m_1\, R\alpha + \frac{m_R\, R}{2} \cdot \alpha$$

$$m_2 \cdot \left(g \cdot \left(\sin\alpha_2 - \mu \cdot \cos\alpha_2\right) - R\alpha\right) = m_1 \cdot \left(g \cdot \left(\sin\alpha_1 + \mu \cdot \cos\alpha_1\right) + R\alpha\right) + \frac{m_R\, R}{2} \cdot a$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot \left(g \cdot \left(\sin\alpha_1 + \mu \cdot \cos\alpha_1\right) + R\alpha\right) + \frac{m_R}{2} R\alpha}{g \cdot \left(\sin\alpha_2 - \mu \cdot \cos\alpha_2\right) - R\alpha}$$

$$m_2 = \frac{1kg \cdot \left(10\,ms^{-2}\left(0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}8660\right) + 0{,}5\,ms^{-2}\right) + \frac{1{,}5\,kg}{2} \cdot 0{,}5\,ms^{-2}}{10\,ms^{-2} \cdot \left(0{,}8660 - 0{,}4 \cdot 0{,}5\right) - 0{,}5\,ms^{-2}}$$

$$m_2 = \frac{10\,N \cdot 0{,}8464 + 0{,}5\,N + 0{,}375\,N}{\left(10 \cdot 0{,}6660 - 0{,}5\right) ms^{-2}} = \frac{9{,}34\,N}{6{,}16\,ms^{-2}}$$

$$m_2 = 1{,}52\,kg$$

2b. Hangabtriebskraft für m_2: $F_{t,2} = m_2 g \cdot \sin\alpha_2 = 15{,}16\,N \cdot 0{,}8860 = 13{,}129\,N$

Gleitreibungskraft für m_2: $F_{G,2} = \mu_G \cdot m_2\, g \cdot \cos\alpha_2 = \left(0{,}4 \cdot 15{,}16 \cdot 0{,}5\right) N$

$F_{G,2} = 3{,}032\,N$

Trägheitskraft für m_2: $F_{Tr,2} = m_2\, R\,\alpha = 1{,}52\,kg \cdot 0{,}1m \cdot 5\,s^{-2} = 0{,}758\,N$

Seilkraft "rechts" der Rolle: $F_{S,2} = \left(F_{t,2} - F_{G,2} - F_{Tr,2}\right)$

$$F_{S,2} = \left(13{,}129 - 3{,}032 - 0{,}758\right) N = 9{,}339\,N$$

Hangabtriebskraft für m_1: $F_{t,1} = m_1 g \cdot \sin\alpha_1 = 1kg \cdot 10\,m\,s^{-1} \cdot 0{,}5 = 5{,}000\,N$

und Gleitreibungskraft für m_1: $F_{G,1} = \mu_G \cdot m_1 g \cdot \cos\alpha_1 = 0{,}4 \cdot 1kg \cdot 10ms \cdot 0{,}8660$

$$F_{G,1} = 3{,}464N$$

Trägheitskraft für m_1: $F_{Tr,2} = m_2\, R\,\alpha = 1kg \cdot 0{,}1m \cdot 5\,s^{-2} = 0{,}500\,N$

Seilkraft "links" der Rolle: $F_{S,1} = \left(F_{t,1} + F_{G,1} + F_{Tr,1}\right)$

$$F_{S,1} = \left(5{,}000 + 3{,}464 + 0{,}500\right) N = 8{,}964\,N$$

<u>Probe:</u> Es gilt: $F_{S,2} - F_{S,1} = \frac{m_R\, R}{2} \cdot \alpha$

$$\left(9{,}339 - 8{,}964\right) N = 0{,}375\,N = \frac{1{,}5\,kg\,R}{2} \cdot \alpha$$

$$0{,}375\,N = \frac{1{,}5\,kg \cdot 0{,}1\,m}{2} \cdot 5\,s^{-2} = \frac{2 \cdot 5{,}75}{1{,}5}\,ms^{-1} = 0{,}375\,N$$

3a. Gesamtenergie in der Pos. 0: $E_{ges}^{0} = E_{kin}^{0} + E_{pot}^{0}$

Kinetische Energie in der Pos. 0: $E_{kin}^{0} = \frac{1}{2} m\, v_0^2$

Ausgangshöhe auf der 60° Ebene: $H_0 = \sin 60° \cdot s_1 = 0{,}8660 \cdot 1m = 0{,}866\,m$

Pot. Energie in der Ausgangshöhe: $E_{pot}^{0} = m\,g\,H_0 = 1{,}5\,kg\;10\,m\,s^{-2}\;0{,}866\,m = 12{,}990\,J$

Reibungsarbeit auf der 60° Ebene: $W_R^1 = \mu_G\, F_N\, s_1 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 60° \cdot s_1$

$$W_R^1 = 0{,}25 \cdot 1{,}5\,kg \cdot 10\,ms^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 1m = 1{,}875\,J$$

Reibungsarbeit auf der Horizontalen: $W_R^2 = \mu_G\, F_N\, s_2 = 0{,}25 \cdot 15\,N \cdot 1m = 3{,}750\,J$

In Pos. 1 am Ende der 60° Ebene gilt: $E_{ges}^{0} = E_{kin}^{1} + W_R^1$

In Pos. 2 am Ende der 0° Ebene gilt: $E_{ges}^{0} = E_{kin}^{2} + W_R^1 + W_R^2$

Reibungsarbeit auf der 45° Ebene: $W_R^3 = \mu_G\, F_N\, s_3 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 45° \cdot s_3$

$$W_R^3 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 45° \cdot \frac{H_3}{\sin 45°}$$

$$W_R^3 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cot 45° \cdot H_3 = 3{,}00\,J$$

In Pos. 3 (Umkehrpunkt) gilt: $E_{ges}^{0} = E_{pot}^{3} + W_R^1 + W_R^2 + W_R^3 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 + E_{pot}^{0}$

mit: $E_{pot}^{3} = m\,g\,H_0 = 1{,}5\,kg\;10\,m\,s^{-2}\;0{,}8\,m = 12{,}00\,J$

Es folgt: $E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_{pot}^3 + W_R^1 + W_R^2 + W_R^3 - E_{pot}^0$

$$E_{kin}^0 = (12,000 + 1,875 + 3,750 + 3,000 - 12,990)\, J$$

$$E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 7,635\, J$$

Lösung für v_0 $\quad E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,635\, J}{1,5\, kg}} = 3,19\, m\, s^{-1}$

3b. Reibungsarbeit auf der 60° Ebene: $W_R^1 = 1,875\, J$

Reibungswärme auf der Horizontalen: $W_R^2 = 3,750\, J$

Reibungsarbeit auf der 60° Ebene: $W_R^3 = 3,000\, J$

Gesamte Reibungsenergie: $W_R^{ges} = W_R^1 + W_R^2 + W_R^3$

$$W_R^{ges} = (1,875 + 3,750 + 3,000)\, J = 8,625\, J$$

Gesamte Energie in Pos. 0: $E_{ges}^0 = E_{kin}^0 + E_{pot}^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + E_{pot}^0$

$$E_{ges}^0 = E_{kin}^0 + E_{pot}^0 = 7,635\, J + 12,990\, J = 20,625\, J$$

Relativer Energieverlust: $\frac{W_R^{ges}}{E_{ges}^0} = \frac{8,625\, J}{20,625\, J} = 41,8\%$

4a. **Bauteil 1** (homogener Zylinder mit Radius *R* und Höhe *R*:

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1 \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\pi R^2 R) \cdot R^2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \cdot R^5$$

Bauteil 2 (Bauteil 3 = homogener Zylinder J_3 mit Radius 2*R* und Höhe 3*R* minus zweimal Bauteil 1 = Zylinder J_1 mit Radius *R* und Höhe *R*.

$$J_2 = J_3 - 2 \cdot J_1$$

Bausteil 3: $J_3 = \frac{1}{2} m_3 (2R)^2 = 2 \rho V_3 R^2 = 2 \cdot \rho \pi (2R)^2 (3R) R^2$

$$J_3 = 24 \cdot \pi \rho \cdot R^5$$

Bauteil 2: $J_2 = J_3 - 2 \cdot J_1 = (24 - 1) \cdot \pi\rho \cdot R^5 = 23 \cdot \pi\rho \cdot R^5$

Lösung: $J_2 : J_1 = 23 : 0,5 = 46 : 1$

4b. Bauteil 2 mit J_2 dreht sich zunächst mit n_2. Nach dem Ankuppeln der beiden Bauteile 1 jeweils mit J_1 dreht sich Bauteil 3 mit J_3.

Drehimpulserhaltungssatz: $L_3 = J_3 \cdot \omega_3 = J_2 \cdot \omega_2 = L_2$

Mit $\omega = 2\pi \cdot n$ folgt: $n_3 = \frac{J_2}{J_3} \cdot n_2 = \frac{J_2}{2J_1 + J_2} \cdot n_2 = \frac{46\,J_1}{2\,J_1 + 46\,J_1} \cdot n_2$

$$n_3 = \frac{46}{48} \cdot n_2 = 0{,}95833 \cdot 800\,\text{min}^{-1} = 767\,\text{min}^{-1}$$

Rotationsenergie vorher: $E_2^{Rot} = \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2$

Rotationsenergie nachher: $E_3^{Rot} = \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_3^2$

Energieerhaltungssatz: $E_2^{Rot} = E_3^{Rot} + Q$,

wobei Q die durch die Kupplung in Form von Wärme aufgenommene Energie bezeichnet.

Relative Energieaufnahme der Kupplung: $\frac{Q}{E_2^{Rot}} = \frac{E_2^{Rot} - E_3^{Rot}}{E_2^{Rot}} = 1 - \frac{E_3^{Rot}}{E_2^{Rot}}$

$$\frac{Q}{E_2^{Rot}} = 1 - \frac{J_3 \cdot (2\pi\, n_3)^2}{J_2 \cdot (2\pi\, n_2)^2} = 1 - \frac{J_3}{J_2} \cdot \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2$$

$$\frac{Q}{E_2^{Rot}} = 1 - \frac{2J_1 + J_2}{J_2} \cdot \left(\frac{J_2}{2J_1 + J_2}\right)^2$$

$$\frac{Q}{E_2^{Rot}} = 1 - \frac{J_2}{2J_1 + J_2} = 1 - \frac{46\,J_1}{2\,J_1 + 46 J_1}$$

Lösung: $\frac{Q}{E_2^{Rot}} = 1 - \frac{46}{48} = 4{,}16\%$

4c. Das Drehmoment M der Kupplung erzeugt an den beiden Bausteilen mit gemeinsamen Trägheitsmoment $2 \cdot J_1$ eine Winkelbeschleunigung α_1, die die Drehzahl der beiden Bauteile 1 von 0 auf n_3 erhöht.

$$M = (2 \cdot J_1) \cdot \alpha_1 = (2 \cdot J_1) \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2 \cdot J_1 \frac{2\pi \cdot (n_3 - 0)}{\Delta t}$$

$$M = 4\pi \cdot J_1 \cdot \frac{n_3}{\Delta t}$$

Zeit für Kupplungsvorgang: $\Delta t = \frac{4\pi \cdot J_1 \cdot n_3}{M} = \frac{4\pi \cdot 10\,kg\,m^2 \cdot \frac{767}{60}\,s^{-1}}{2000\,Nm} = 0{,}80\,s$.