Fachhochschule Hannover SS09 01.07.09
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 (Prof. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Einer gut einsehbaren Kreuzung nähern sich auf der vorfahrtberechtigten Straße ein mit konstanter Geschwindigkeit von 40 km/h fahrender LKW und auf der senkrecht dazu verlaufenden anderen Straße ein PKW mit 60 km/h. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der PKW 60m, der LKW 50m von der Kreuzung entfernt.

a. Wann erreicht der Lkw die Kreuzung?

b. Um die Kreuzung noch vor dem LKW passieren zu können, beschleunigt der PKW- Fahrer gleichmäßig. Wie groß müsste die Beschleunigung/Verzögerung sein, damit der PKW 0,5 s vor dem Erreichen des LKWs die Kreuzung passieren kann? Welche Geschwindigkeit hat der PKW beim Passieren der Kreuzung?

c. Welche Leistung muss der Motor des PKW (1200 kg) am Ende des Beschleunigungs- bzw. Bremsvorgangs aufbringen, wenn die Rollreibungszahl $\mu_R = 0,05$ beträgt?

2. Eine rollende homogene Kugel und ein gleitender Quader mit gleicher Masse benötigen auf einer schiefen Ebene die gleiche Zeit für die gleiche Strecke.

a. Die Gleitreibungszahl des Quaders beträgt $\mu_G = \frac{1}{7}$, die Rollreibungszahl der Kugel sei vernachlässigbar. Wie groß ist der Steigungswinkel ϑ der schiefen Ebene?

3. Die Holzachterbahn "Colossos" im Heidepark Soltau hat eine Höhe von 61 m und ein maximales Gefälle von 61° gegen die Waagerechte.

a. Laut Werbung des Betreibers sollen Spitzengeschwindigkeiten von mehr 120 km/h erreicht werden können. Prüfen Sie diese Behauptung unter Vernachlässigung von Reibung.

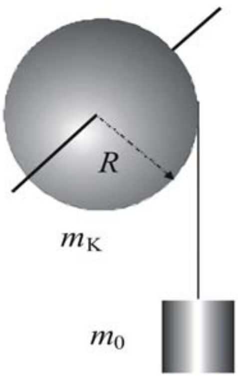
b. Wie groß ist bei Berücksichtigung der Reibung die Reibungszahl, wenn am Ende der betreffenden Fahrstrecke die Geschwindigkeit genau $v_{\max} = 120\,km/h$ beträgt?

Auf einem anderen, kreisförmigen Streckenabschnitt beträgt die größte Querneigung gegen die Senkrechte 67°. Für die Geschwindigkeit soll der Wert $v_{\max} = 120\,km/h$ verwendet werden.

c. Welchen Radius hat die Kurve, wenn angenommen wird, dass an dieser Stelle die Resultierende aus Zentrifugalkraft und Gewichtskraft senkrecht zur Fahrbahn wirken soll.

d. Das Wievielfache seiner Gewichtskraft verspürt ein Fahrgast?

4. Eine Holzkugel ($R = 0{,}1\,m$, $m_K = 5\,kg$) wird über ein masseloses Seil, das um die Kugel gewickelt ist und an dem die Masse $m_0 = 1\,kg$ hängt, beschleunigt



a. Mit welcher Winkelbeschleunigung α wird die Kugel der Masse m_K und mit welcher Beschleunigung a wird die Masse m_0 beschleunigt?

b. Wie groß ist die Seilkraft F_S?

c. Welche Rotationsenergie und welchen Drehimpuls hat die Kugel nach dem Start aus der Ruhe nach 6s?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt:

Abstand PKW – Kreuzung: $s_{PKW,0} = 60\,m$

Abstand LKW – Kreuzung: $s_{LKW,0} = 50\,m$

Geschwindigkeit PKW: $v_{PKW,0} = 60\,km\,h^{-1} = 16,66\,m\,s^{-1}$

Geschwindigkeit LKW: $v_{LKW,0} = 40\,km\,h^{-1} = 11,11\,m\,s^{-1}$

Zeit (LKW) bis zur Kreuzung: $t_{LKW} = \dfrac{s_{LKW,0}}{v_{LKW,0}} = 4,5\,s$

1b. Der PKW muss die Kreuzung in $t_{PKW} = 4\,s$ erreichen, um 0,5 s vor dem LKW dort zu sein. Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{PKW,0}$.

Es gilt: $s(t_{PKW}) = \dfrac{1}{2} a_{PKW} \cdot t_{PKW}^2 + v_{PKW,0} \cdot t_{PKW}$

Lösung: $a_{PKW} = \dfrac{2 \cdot s(t_{PKW}) - 2 \cdot v_{PKW,0} \cdot t_{PKW}}{t_{PKW}^2}$

$$a_{PKW} = \frac{2 \cdot 60m - 2 \cdot 16,66\,m\,s^{-1} \cdot 4\,s}{16\,s^2} = -0,83\,m\,s^{-2}$$

Es muss also gebremst werden.

Geschwindigkeit des PKW beim Passieren der Kreuzung:

$$v(t_1 = 4\,s) = a_{PKW} \cdot t_1 + v_{PKW,0}$$

$$v(t_1 = 4\,s) = -0,83\ m\,s^{-2} \cdot 4\,s + 16,66\,m\,s^{-1} = 13,34\,m\,s^{-1}$$

$$v(t_1 = 4\,s) = 13,34\,m\,s^{-1} = 48\,km\,h^{-1}$$

1c. Leistung $P_{\max} = F_{ges} \cdot v_{\max}$

Es gilt: $F_{ges} = F_a + F_G = m \cdot a + \mu_G \cdot m \cdot g = m \cdot (a + \mu_G \cdot g)$

$$F_{ges} = 1200kg \cdot \left(-0,83\,m\,s^{-2} + 0,05 \cdot 10\ m\,s^{-2}\right) = -396\,N$$

Es folgt: $P_{\max} = F_{ges} \cdot v_{\max} = -396\,N \cdot 13,34\,m\,s^{-1} = -5,28\,kW$

An Bremsen werden 5,28 KW in Form von Reibungswärme frei.

2a. Energieerhaltungssatz für die rollende Kugel

$$m_K\, g\, h = \frac{1}{2} m_K\, v_K^2 + \frac{1}{2} J_K\, \omega_K^2$$

Für die Kugel ist $k = \dfrac{2}{5}$: $J_K = \dfrac{2}{5} m_K R^2$

Aus der Rollbedingung $v = R \cdot \omega$ folgt:

$$m_K\, g\, h = \frac{1}{2} m_K\, v_K^2 + \frac{1}{2} J_K\, \omega_K^2 = \frac{1}{2} m_K\, v_K^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m_K R^2 \frac{v_K^2}{R^2}$$

$$m_K\, g\, h = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{2} m_K\, v_K^2\right)$$

Für die kinetische Energie der rollenden Kugel erhält man:

$$E_{kin}^{Kugel} = \frac{1}{2} m_K\, v_K^2 = \frac{5}{7} m_K\, g\, h = \frac{5}{7} E_{pot}^{Kugel}$$

Energieerhaltungssatz für den gleitenden Quader:

$$m_Q\, g\, h = \frac{1}{2} m_Q\, v_Q^2 + \mu_G\, F_{Q,n}\, s = \frac{1}{2} m_Q\, v_Q^2 + \mu_G\, m_Q\, g \cos\vartheta \cdot s$$

Da $s = \dfrac{h}{\sin\vartheta}$ folgt:

$$m_Q\, g\, h = \frac{1}{2} m_Q\, v_Q^2 + \mu_G\, m_Q\, g \cot\vartheta \cdot h$$

Für die kinetische Energie des gleitenden Quaders erhält man:

$$E_{kin}^{Quader} = \frac{1}{2} m_Q\, v_Q^2 = m_Q\, g\, h - \mu_G \left(m_Q\, g\, h\right) \cot\vartheta$$

$$E_{kin}^{Quader} = m_Q\, g\, h \left(1 - \mu_G\, \cot\vartheta\right) = E_{pot}^{Quader} \left(1 - \mu_G\, \cot\vartheta\right)$$

Laut Aufgabenstellung sollen die potentiellen Energien am Start und die kinetischen Energien am Ende der schiefen Ebenen für Kugel und Quader gleich sein. Es folgt:

$$\frac{5}{7} = 1 - \mu_G\, \cot\vartheta$$

Mit $\mu_G = \dfrac{1}{7}$ folgt:

$$\mu_G\, \cot\vartheta = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = \frac{1}{7}\, \cot\vartheta$$

Es folgt:

$$\tan\vartheta = \frac{1}{2}$$

Lösung:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26,6°$$

3a. Energieerhaltungssatz:

$$m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v^2$$

$$v_{\max} = \sqrt{2\, g\, h_{\max}}$$

$$v_{\max} = \sqrt{2\ 10 \cdot 61}\ m\, s^{-1} = 34,93\, m\, s^{-1} = 125,7\, km\, h^{-1}$$

3b. Energieerhaltungssatz unter Berücksichtigung der Reibungsarbeit:

$$m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v^2 + W_R$$

$$m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v^2 + \mu_R\, F_n\, s = \frac{1}{2} m\, v^2 + \mu_R\, m\, g \cos\vartheta \frac{h}{\sin\vartheta}$$

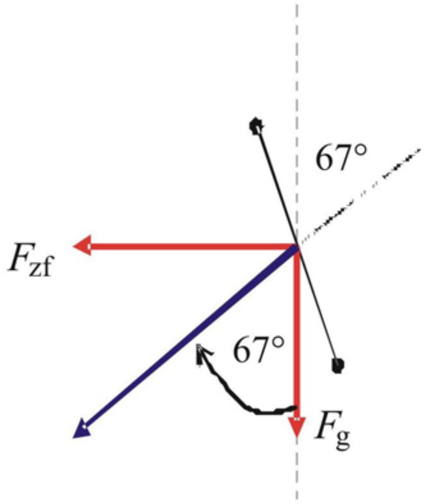
$$\mu_R = \left(1 - \frac{v^2}{2gh}\right) \cdot \tan\vartheta = 0,0893 \cdot 1,804 = 0,161$$

3c. Der Winkel der geneigten Bahn soll eine Querneigung von 67° gegen die Senkrecht besitzen. Es gilt:

$$\tan 67° = \frac{F_{zf}}{F_g}$$

$$\tan 67° = \frac{F_{zf}}{F_g}$$

$$\tan 67° = \frac{m\, v_{\max}^2}{R \cdot m\, g} = \frac{v_{\max}^2}{R \cdot g}$$



$$R = \frac{v_{\max}^2}{\tan 67° \cdot g} = \frac{33{,}33^2 m^2 s^{-2}}{2{,}356 \cdot 10 m s^{-2}}$$

$$R = 47{,}16\, m$$

3d. Der Fahrgast verspürt die aus Zentrifugalkraft und Gewichtskraft resultierende Kraft F_{res}.

Es gilt: $$F_{Zf}^2 + F_g^2 = F_{res}^2$$

Gesamtbeschleunigung im Verhältnis zur Erdbeschleunigung:

$$\frac{a_{res}}{F_g} = \frac{F_{res}}{F_g} = \frac{\sqrt{F_{Zf}^2 + F_g^2}}{F_g} = \sqrt{1 + \left(\frac{F_{Zf}}{F_g}\right)^2}$$

$$\frac{a_{res}}{g} = \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{R \cdot g}\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{33{,}33^2 m^2 s^{-2}}{47{,}16\, m \cdot 10\, m\, s^{-2}}\right)^2} = 2{,}55$$

4a. D'Alembertsches Prinzip für Kräfte an m_0:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0$$

mit Gewichtskraft $F_g = m_0\, g$

und Seilkraft $-F_s$

Es folgt: $$\left(F_g - F_S\right) - m_0 a = 0 \qquad (*)$$

D'Alembertsches Prinzip für Momente an der Kugel m_K:

$$\sum_i \vec{M}_i - J\,\vec{\alpha} = 0$$

Drehmoment: $M_S = F_S \cdot R$

Massenträgheitsmoment: $J = \frac{2}{5} m_K\, R^2 = 0{,}02\, kg\, m_2$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{a}{R}$

Es folgt: $$F_S \cdot R - \frac{2}{5} m_K\, R^2 \cdot \frac{a}{R} = 0$$

$$F_S - \frac{2}{5} m_K\, a = 0 \qquad (**)$$

Einsetzen von (*) in (**): $$\left(F_g - m_0\, a\right) - \frac{2}{5} m_K\, a = m_0\, g - \left(\frac{2}{5} m_K + m_0\right) a = 0$$

Es folgt: $$g - \left(\frac{2}{5} \cdot 5 + 1\right) a = 0$$

Lösung für a: $$a = \frac{1}{3} g = 3{,}33\, m\, s^{-2}$$

Lösung für α: $$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{3{,}33\, m\, s^{-2}}{0{,}1 m} = 33{,}3\, s^{-2}$$

4b. Seilkraft: $$F_S = \frac{2}{5} \cdot 5\, kg \cdot 3{,}33\, m\, s^{-2} = 6{,}66\, N$$

4c. Nach 6 s beträgt die Geschwindigkeit der fallenden Masse m_0:

$$v(t = 6\,s) = a \cdot 6\,s = 3{,}33 \cdot 6\,m\,s^{-1} = 19{,}99\,m\,s^{-1} \cong 20\,m\,s^{-1}$$

Winkelgschwindigkeit: $\omega(t = 6\,s) = \dfrac{v(t = 6\,s)}{R} = \dfrac{20\,m\,s^{-1}}{0{,}1\,m} = 200\,s^{-1}$

Rotationsenergie $E_{kin,rot} = \dfrac{1}{2} J_K\,\omega^2 = \dfrac{1}{2} 0{,}02 \cdot 200^2\,J = 400\,J$

Kontrolle:

Translationsenergie: $E_{kin,tran} = \dfrac{1}{2} m\,v^2 = \dfrac{1}{2} 1 \cdot 20^2\,J = 200\,J$

Fallstrecke in 6 s: $s = \dfrac{1}{2} a\,t^2 = \dfrac{1}{2} 3{,}33 \cdot 6^2\,m = 60\,m$

Potentielle Energie der Höhe $h = 60\,m$: $E_{pot}(h = 60\,m) = m\,g\,h = 600\,J$

Es gilt also: $E_{pot}(h = 60\,m) = E_{kin,rot} + E_{kin,trans}$

Drehimpuls: $L = J \cdot \omega = 0{,}02\,kg\,m^2 \cdot 200\,s^{-1} = 4\,kg\,m^2 s^{-1}$