Fachhochschule Hannover vorgezogen Wiederholungsklausur WS0910 25.09.09
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 SS09 (Prof. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Zwei PKW (Nr. 1 und Nr. 2) fahren mit einer Geschwindigkeit von $v = 144\,km\,h^{-1}$ im Abstand $\Delta x_1 = 45\,m$ hintereinander her. Zum Zeitpunkt $t = 0$ muss PKW(1) plötzlich mit einer Beschleunigung von $a_1 = -6,4\,m\,s^{-2}$ bremsen. Nach einer Reaktionszeit von $t_R = 1,5\,s$ bremst auch der PKW(2) so, dass er in $\Delta x_2 = 10\,m$ hinter PKW(1) zum Stillstand kommt. (Zur Vereinfachung betrachten Sie beide PKW als Massenpunkte, also als ausdehnungslos.)

a. Zeichnen Sie die *x*-*t*-, *v*-*t*- und *a*-*t*-Diagramme für beide PKW, wobei auch der prinzipielle Verlauf der Diagramme vor dem Zeitnullpunkt erkennbar sein sollte.

b. Welche Bremsverzögerung muss PKW(2) haben, um wie gefordert, in $\Delta x_2 = 10\,m$ hinter PKW(1) zum Stillstand zu kommen?

c. Prüfen Sie Ihr unter **b.** erhaltenes Ergebnis, indem Sie für beide PKW den nach dem Zeitnullpunkt zurückgelegten Wert bis zum Stillstand berechnen.

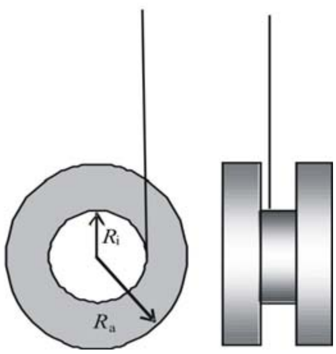
d. Berechnen Sie die Anhaltezeiten für beide Fahrzeuge.

2. Vergleichen Sie einen <u>rollenden</u> und einen <u>gleitenden Körpers</u> gleicher Masse, die sich auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel $\vartheta = 30°$ gegen die Waagerechte hinauf bewegen. Im Referenzpunkt (Nullpunkt: Höhe $h_0 = 0$) soll die Schwerpunktgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ beider Körper gleich sein. Die Körper kommen in unterschiedlichen Höhen $h_{\max}^{Rollkörper}$ und $h_{\max}^{Gleitkörper}$ auf der schiefen Ebene zum Stillstand, wobei $h_{\max}^{Gleitkörper} = \frac{1}{2} \cdot h_{\max}^{Rollkörper}$ gelten soll.

Welchen *k*-Wert besitzt das Massenträgheitsmoment des Rollkörpers, wenn die Gleitreibungszahl für den gleitenden Körper $\mu_G = \frac{1}{4}$ beträgt. Liegt der *k*-Wert in einem physikalisch vernünftigen Bereich? Vergleichen Sie mit anderen *k*-Werten.

3. Ein Dachziegel gleitet ein geneigtes Dach über eine Strecke von $s = 6\,m$ hinab. Das Dach hat einen Neigungswinkel von $\vartheta = 30°$ gegen die Waagerechte. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,4$. Der Ziegel fällt anschließend über die Dachkante auf den $H = 8\,m$ tiefer gelegenen Boden. In welcher Entfernung von der Hauswand trifft der Dachziegel auf dem Boden auf, wenn der Dachüberstand $\Delta x_Ü = 0,5\,m$ beträgt?

4. Ein JoJo besteht aus drei homogenen Holzscheiben gleicher Dicke $d = 1\,cm$. Die äußeren beiden Scheiben haben einen Radius von $R_a = 2,5\,cm$, die zentrale Scheibe besitzt einen Radius von $R_i = 1\,cm$, das Holz hat eine Dichte von $\rho = 1,1\,g\,cm^{-3}$. Um die zentrale Scheibe ist ein Faden der Länge $l = 1\,m$ gewickelt (Masse vernachlässigbar).



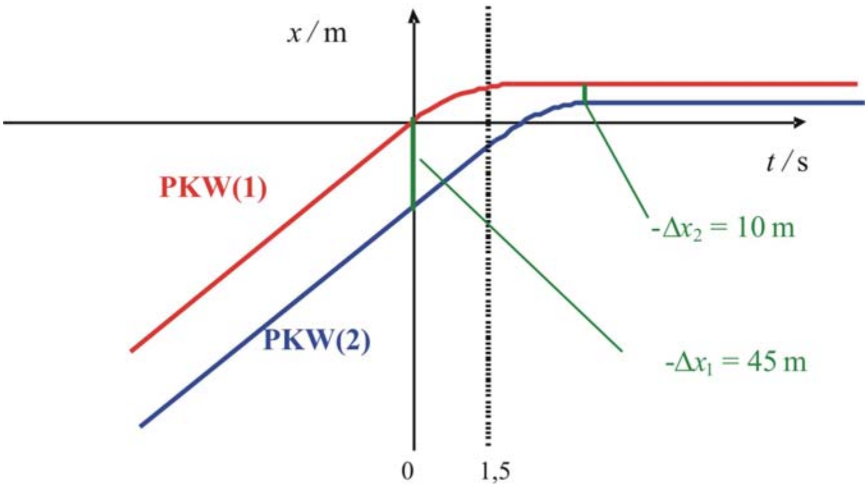
a. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des JoJo bezüglich der axialen Symmetrieachse durch den Massenmittelpunkt.

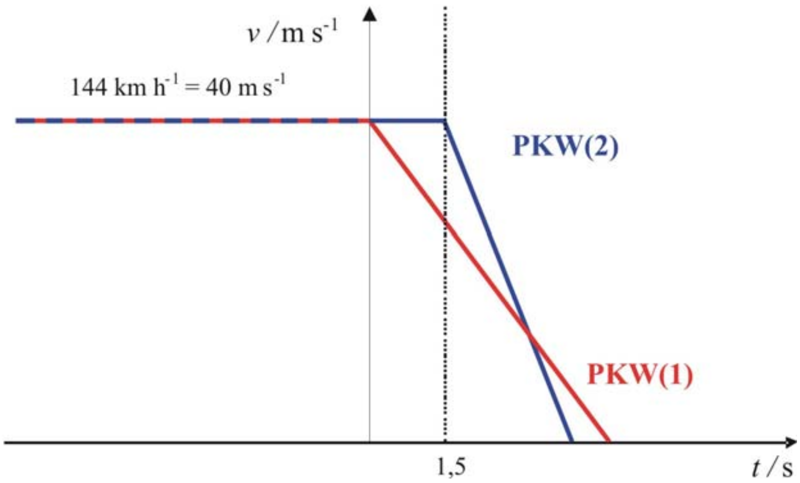
b. Das JoJo wird losgelassen und der aufgewickelte Faden am äußersten Punkt festgehalten. Wie lange dauert es, bis der Faden abgewickelt ist und das JoJo am tiefsten Punkt angelangt ist?

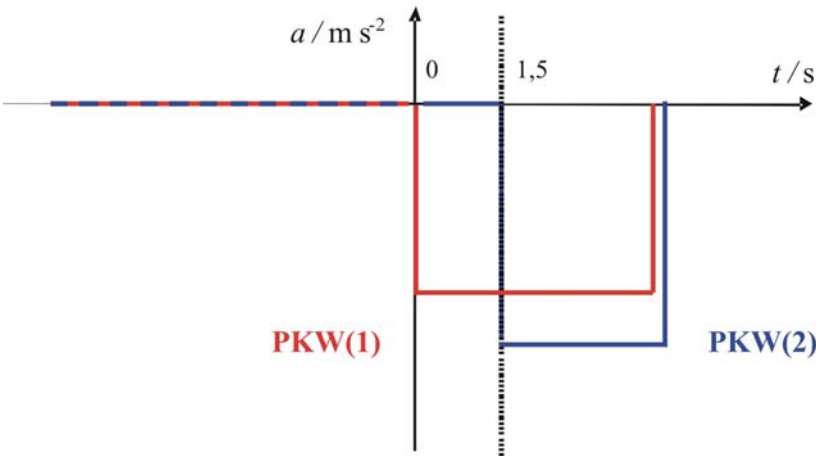
Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Nach Aufgabenstellung ist entscheidend, dass der Wert der Ortskoordinate des PKW(2) beim Stillstand um $\Delta x_2 = 10\,m$ kleiner ist, als der des PKW(1). Da PKW(2) mit $\Delta x_1 = 45\,m$ hinter PKW(1) herfährt, ist der Gesamtweg des PKW(2) um $\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2 = 35\,m$ größer als der von PKW(1). Dies wird im ersten Diagramm dargestellt.



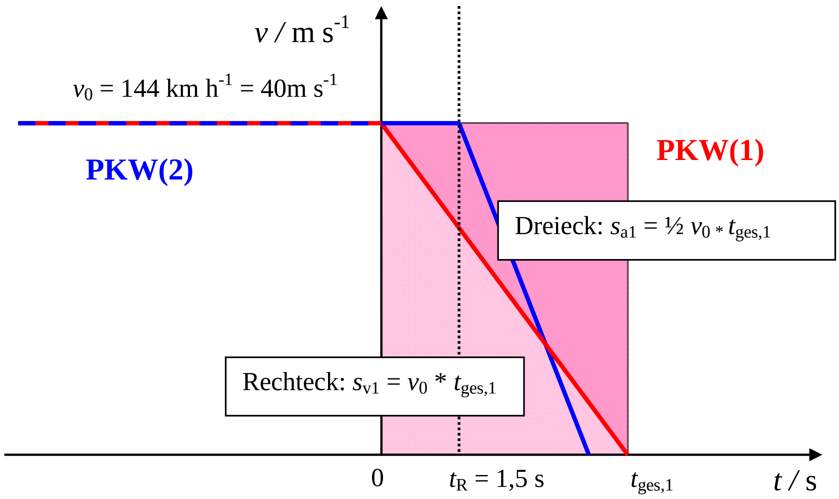




b. Die Bedingung für die Vermeidung einer Kollision lautet:

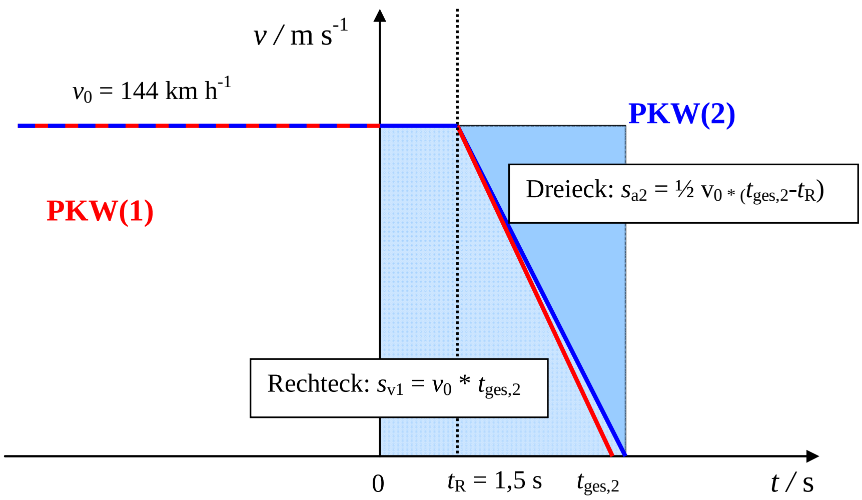
$$x_{ges}^{PKW(1)} - x_{ges}^{PKW(2)} = \Delta x_2 \qquad (*)$$

Der Gesamtweg für PKW(1) kann mit Hilfe des *v*-*t*-Diagramms ermittelt werden.



x-Koordinate für PKW(1): $$x_{ges}^{PKW(1)} = v_0\, t_{ges,1} - \frac{1}{2} v_0\, t_{ges,1}$$

Der Gesamtweg für PKW(2) kann mit Hilfe des *v*-*t*-Diagramms ermittelt werden.



x-Koordinate für PKW(2): $$x_{ges}^{PKW(2)} = v_0\, t_{ges,2} - \frac{1}{2} v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \Delta x_1$$

oder $$x_{ges}^{PKW(2)} = v_0\, t_R + v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \frac{1}{2} v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \Delta x_1$$

Gleichung (*) entspricht: $$x_{ges}^{PKW(1)} = x_{ges}^{PKW(2)} + \Delta x_2$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$x_{ges}^{PKW(1)} = v_0\, t_{ges,1} - \frac{1}{2} v_0\, t_{ges,1} = v_0\, t_R + v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \frac{1}{2} v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \Delta x_1 + \Delta x_2 = x_{ges}^{PKW(2)} + \Delta x_2$$

Es folgt: $$v_0\, t_{ges,1} - \frac{1}{2} v_0\, t_{ges,1} = v_0\, t_R + v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \frac{1}{2} v_0 \left(t_{ges,2} - t_R\right) - \left(\Delta x_1 - \Delta x_2\right)$$

Setze zur Vereinfachung: $$\Delta x_1 - \Delta x_2 = \Delta x = 35\, m$$

und verwende: $\frac{v_0}{t_{ges,1}} = |a_1|$ und $\frac{v_0}{t_{ges,2} - t_R} = |a_2|$

dann folgt: $$\frac{v_0^2}{|a_1|} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_1|} = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{|a_2|} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_2|} - \Delta x$$

$$\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_1|} = v_0 t_R + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_2|} - \Delta x$$

Lösung für $|a_2|$ $$|a_2| > \frac{v_0^2}{\frac{v_0^2}{|a_1|} + 2\,\Delta x - 2\,v_0 t_R}$$

$$|a_2| > \frac{40^2\ m^2\ s^{-2}}{\frac{40^2\ m^2\ s^{-2}}{6{,}4\,m\,s^{-2}} + 2\cdot 35\,m - 2\cdot 40\,m\,s^{-1}\cdot 1{,}5\,s}$$

$$|a_2| > \frac{1600}{250+70-120}\,m\,s^{-2} = \frac{1600}{200}\,m\,s^{-2} = 8\,m\,s^{-2}$$

Der PKW(2) muss mindestens mit einer Bremsverzögerung von $a_2 = -8\,m\,s^{-2}$ verzögern, damit er am gewünschten Punkt zum Stehen kommen kann.

c. Prüfung der Ergebnisse:

x-Koordinate für PKW(1): $$x_{ges}^{PKW(1)} = v_0\,t_{ges,1} - \frac{1}{2}v_0\,t_{ges,1}$$

wobei gilt: $$t_{ges,1} = \frac{v_0}{|a_1|}$$

Es folgt $$x_{ges}^{PKW(1)} = \frac{v_0^2}{|a_1|} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_1|} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_1|}$$

Lösung für PKW(1) $$x_{ges}^{PKW(1)} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_1|} = \frac{40^2\ m^2\ s^{-2}}{2\cdot 6{,}4\,m\,s^{-2}} = 125\,m$$

x-Koordinate für PKW(2): $$x_{ges}^{PKW(2)} = v_0\,t_{ges,2} - \frac{1}{2}v_0\left(t_{ges,2} - t_R\right) - \Delta x_1$$

wobei gilt: $$t_{ges,2} - t_R = \frac{v_0}{|a_2|}$$

und $$t_{ges,2} = \frac{v_0}{|a_2|} + t_R$$

Es folgt: $$x_{ges}^{PKW(2)} = \frac{v_0^2}{|a_2|} + v_0\,t_R - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_2|} - \Delta x_1$$

$$x_{ges}^{PKW(2)} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a_2|} + v_0\,t_R - \Delta x_1$$

$$x_{ges}^{PKW(2)} = \frac{1}{2}\frac{40^2\,m^2 s^{-2}}{8\,m\,s^{-2}} + 40\,ms^{-1}\cdot 1{,}5\,s - 45\,m$$

Lösung für PKW(2) $$x_{ges}^{PKW(2)} = 100\,m + 60\,m - 45\,m = 115\,m$$

Der Wert der *x*-Koordinate für PKW(2) ist also, wie gefordert, um $\Delta x_2 = 10\,m$ kleiner als der für PKW(1).

d. Bremszeit für PKW(1) $t_{ges,1} = \frac{v_0}{|a_1|} = \frac{40\,m\,s^{-1}}{6,4\,m\,s^{-2}} = 6,25\,s$

Beim PKW(1) ist die Anhaltezeit gleich der Bremszeit.

Bremszeit für PKW(2) $t_{ges,2} - t_R = \frac{v_0}{|a_2|}$

Anhaltezeit für PKW(2) $t_{ges,2} = \frac{v_0}{|a_2|} + t_R = \frac{40\,m\,s^{-1}}{8m\,s^{-2}} + 1,5\,s = 5\,s + 1,5\,s = 6,5\,s$

2. Im Referenzpunkt besitzen beide Körper dieselbe kinetische Energie der Translation E_{kin}^{trans}:

$$E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Für den gleitenden Körper ist dies im Referenzpunkt auch gleichzeitig seine Gesamtenergie. Der rollende Körper besitzt aber zusätzlich noch kinetische Energie der Rotation E_{kin}^{rot}:

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J\, \omega_0^2$$

Man beachte, dass im Referenzpunkt zwar die Translationsenergien der beiden Körper gleich sein sollen, nicht aber deren Gesamtenergien.

Für die <u>Gesamtenergie des rollenden Körpers</u> im Nullpunkt gilt:

$$E_{ges}^{Rollkörper} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J\, \omega_0^2$$

Die Rollbedingung verknüpft v_0 und ω_0 durch $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ und für das Massenträgheitsmoment kann die Beziehung $J = k\, m\, r^2$ verwendet werden, wobei *k* der gesuchte Wert ist..

$$E_{ges}^{Rollkörper} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k\, m\, r^2 \frac{v_0^2}{r^2}$$

Es folgt: $$E_{ges}^{Rollkörper} = \frac{1}{2} m v_0^2 (1+k) = E_{kin}^{trans} (1+k) \qquad (1)$$

Beim Hinaufrollen auf die schiefe Ebene wandelt der Rollköper seine Gesamtenergie in potentielle Energie der Höhe um. Es gilt für den Rollkörper:

$$E_{ges}^{Rollkörper} = m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper} = E_{pot}^{Rollkörper}$$

$$E_{kin}^{trans} (1+k) = m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper}$$

Es folgt für die kinetische Energie der Translation des Rollkörpers:

$$E_{kin}^{trans} = \frac{m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper}}{1+k} \qquad (2)$$

Für die <u>Gesamtenergie des gleitenden Körpers</u> im Nullpunkt gilt:

$$E_{ges}^{Gleitkörper} = E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (3)$$

Der Gleitkörper wandelt jedoch nur einen Teil seiner Gesamtenergie in potentielle Energie der Höhe um, weil bei der Gleitbewegung zusätzlich Reibungsarbeit W_R aufgebracht werden muss. Es gilt für den Gleitkörper gilt:

$$E_{ges}^{Gleikörper} = m\, g\, h_{\max}^{Gleitkörper} + W_R = E_{pot}^{Gleitkörper} + W_R$$

Einsetzen von (3) $$E_{kin}^{trans} = m\, g\, h_{\max}^{Gleitkörper} + W_R \qquad (4)$$

Nach Aufgabenstellung gilt: $$h_{\max}^{Gleitkörper} = \frac{1}{2} \cdot h_{\max}^{Rollkörper} \tag{5}$$

Die Reibungsarbeit ist: $$W_R = \mu_G\, m\, g \cos(30°) \cdot \frac{h_{\max}^{Gleitkörper}}{\sin(30°)} \tag{6}$$

Einsetzen von (5) in (6): $$W_R = \mu_G\, m\, g \cos(30°) \cdot \frac{\frac{1}{2} h_{\max}^{Rollkörper}}{\sin(30°)} \tag{7}$$

Einsetzen von (5) und (7) in (4) $$E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper} + \frac{1}{2} \mu_G\, m\, g \cot(30°) \cdot h_{\max}^{Rollkörper}$$

$$E_{kin}^{trans} = m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \mu_G \cot(30°)\right) \tag{8}$$

Da die kinetischen Translationsenergien des Gleit- und des Rollkörpers gleich sein sollen, können Formeln (2) und (8) gleichgesetzt werden:

$$\frac{m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper}}{1+k} = m\, g\, h_{\max}^{Rollkörper} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \mu_G \cot(30°)\right)$$

$$\frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}\left(1 + \mu_G \cot(30°)\right)$$

$$k = \frac{2}{1 + \mu_G \cot(30°)} - 1$$

Lösung: $$k = \frac{2}{1 + \frac{1}{4} \cot(30°)} - 1 = 0{,}396$$

Der gesuchte *k*-Wert des Rollkörpers ist geringfügig kleiner als der *k*-Wert einer homogenen Kugel ($k = 0{,}4$) und liegt somit in einem physikalisch vernünftigen Wertebereich.

3. Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes kann die Geschwindigkeit des Dachziegels am Dachrand bestimmt werden. Der Dachziegel besitzt im Ausgangspunkt die potentielle Energie:

$$E_{pot} = m\, g\, h$$

mit $$h = s \cdot \sin\vartheta = 3\, m$$

Die potentielle Energie wird in Reibungsarbeit W_R und kinetische Translationsenergie umgewandelt. Es gilt: $$E_{pot} = m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v_0^2 + W_R = E_{kin}^{trans} + W_R$$

mit: $$W_R = \mu_G\, m\, g \cos\vartheta \cdot s$$

Lösung für v_0: $$v_0 = \sqrt{2\, g \cdot (h - \mu_G \cos\vartheta \cdot s)}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 10\, m\, s^{-2} (3\, m - 0{,}4 \cdot 0{,}8660 \cdot 6\, m)}$$

$$v_0 = 4{,}293\, m\, s^{-1}$$

Der Geschwindigkeitsvektor verläuft parallel zur Dachneigung, d.h. der Winkel zur Waagerechten beträgt 30°. Der Geschwindigkeitsvektor kann in eine Horizontalkomponente v_{0x} und eine Vertikalkomponente $-v_{0y}$ zerlegt werden. Es gilt:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\vartheta = 3{,}718\, m\, s^{-1}$$

$$-v_{0y} = -v_0 \cdot \sin\vartheta = -2{,}1465\, m\, s^{-1}$$

Nach dem Verlassen der Dachfläche bewegt sich der Dachziegel auf einer Wurfparabel. Die Vertikalkomponente ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{0y}. Für die Fallstrecke $-H = -8\, m$ zwischen Dachkante und Boden gilt:

$$-H = -v_{0y} \cdot t_{fall} - \frac{1}{2} g\, t_{fall}^2$$

Umformung und quadratische Ergänzung ergibt:

$$t_{fall}^2 + 2\frac{v_{0y}}{g} \cdot t_{fall} + \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}$$

Die Fallzeit beträgt: $$t_{fall} = \pm\sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} - \frac{v_{0y}}{g}$$

$$t_{fall} = \pm\sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} - \frac{v_{0y}}{g}$$

$$t_{fall} = \pm\sqrt{\left(\frac{2{,}1465}{10}\right)^2 + \frac{2 \cdot 8}{10}}\, s - \frac{2{,}1465}{10}\, s$$

Lösung für die Fallzeit: $t_{fall,+} = +1{,}0683\, s$

$t_{fall,-} = -1{,}4976\, s$ scheidet als Lösung aus.

Gleichzeitig bewegt sich der Dachziegel mit v_{0x} von der Dachkante in horizontaler Richtung weg. Für den Abstand des Auftreffpunktes von der Hauswand gilt:

$$x_{ges} = v_{0x} \cdot t_{fall} + \Delta x_{Ü}$$

$$x_{ges} = 3{,}718\, ms^{-1} \cdot 1{,}0683\, m + 0{,}5\, m$$

Abstand von der Hauswand: $x_{ges} = 4{,}48\, m$

4a. Das Massenträgheitsmoment des Jojo kann in drei Teilmomente zerlegt werden: Zwei gleiche Momente für die äußeren Scheiben und eins für die innere Scheibe. Da die Scheiben homogene Zylinder sind, ist der k-Wert $k = \frac{1}{2}$. Die Masse der Scheiben ist das Produkt aus Dichte und Volumen der Scheiben.

$$J_{ges} = J_{außen} + J_{innen} + J_{außen}$$

$$J_{ges} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\rho \cdot V_{außen} \cdot R_a^2\right) + \frac{1}{2}\rho \cdot V_{außen} \cdot R_i^2$$

Lösung: $J_{ges} = \pi\, d\, \rho \left[R_a^4 + \frac{1}{2} R_i^4\right] = 1{,}367 \cdot 10^{-5}\, kg\, m^2$

b. Das Jojo fällt mit gleichmäßiger Beschleunigung. Die Beschleunigung a ist kleiner als die Erdbeschleunigung g. Zur Berechnung der Beschleunigung kann man den Formalismus des D'Alembertschen Prinzips verwenden:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0$$

wobei die Gewichtskraft $F_g = m\,g$ und die Kraft $F_M = \frac{M}{R_i}$ wirken. Letztere wird zur Erzeugung eines Drehmoments M benötigt. Unter Berücksichtigung der Richtung der Kraftvektoren ergibt sich: $F_g - F_M - m\,a = 0$ (1)

Für die Momente gilt: $\sum_i \vec{M}_i - J_{ges}\,\vec{\alpha} = 0$

Für die Beträge der Momente gilt: $M - J_{ges}\,\alpha = 0$ (2)

Wobei gilt: $M = F_M\, R_i$

Da der Faden auf der inneren Rolle aufgewickelt ist, gilt beim Abrollen des Fadens folgender Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Schwerpunktes a und der Winkelbeschleunigung α (Rollbedingung): $a = \alpha \cdot R_i$ (3)

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) folgt:

$$F_g - \frac{M}{R_i} - m\,a = F_g - \frac{J_{ges}\alpha}{R_i} - m\,a = F_g - \frac{J_{ges}a}{R_i^2} - m\,a = 0$$

$$m\,g - \left(\frac{J_{ges}}{R_i^2} + m\right)a = 0$$

Die Masse des Jojo beträgt: $m = \rho \cdot V = \pi\, d\, \rho\left(2\,R_a^2 + R_i^2\right) = 4,665 \cdot 10^{-2}\ kg$

Lösung für die Beschleunigung: $$a = \frac{m\,g}{\frac{J_{ges}}{R_i^2} + m} = \frac{4,665 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{\frac{1,367 \cdot 10^{-5}\ kg\ m^2}{0,0001 m^2} + 4,665 \cdot 10^{-2}\,kg}$$

$$a = 2,54\,m\,s^{-2}$$

Zeit zum Durchfallen einer Strecke von $l = 1\ m$.

$$t = \sqrt{\frac{2\,l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1m}{2,54\,m\,s^{-2}}} = 0,887\,s$$