Hochschule Hannover | Klausur SS10 | 30.06.10
Fakultät II, Abteilung Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 SS10 (Prof. Schrewe) | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

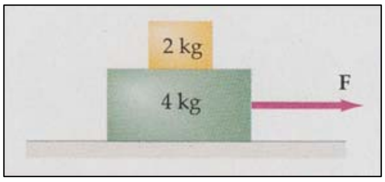
1. Beim Testlauf einer Maschine wird deren Drehzahl in 5 Minuten gleichmäßig von Null auf 4500 Umdrehungen pro Minute erhöht. Anschließend bleibt die Drehzahl $300\,s$ lang konstant und wird dann wieder gebremst. Auch der Abbremsvorgang ist gleichmäßig beschleunigt: Pro Sekunde nimmt die Drehzahl um $\Delta n = 2,5\,s^{-1}$ ab.

a. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung in der Anlaufphase?
b. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung in der Abbremsphase?
c. Welche Gesamtzeit erfordert der Testlauf.
d. Wie viele Umdrehungen macht die Maschine insgesamt?

2. Wie groß müsste die Geschwindigkeit einer auf einer Bergspitze abgeschossenen Kanonenkugel sein, um bei passendem Abschusswinkel den Abschusspunkt selbst wieder treffen zu können? Man denke sich den Abschusspunkt auf dem Berg Chimborazo in Ecuador (Höhe $6310\,m$ über MSL), der sehr dicht am Äquator liegt. Die Luftreibung muss natürlich vernachlässigt werden. Der Äquatorradius wird mit $6\,378\,137$ m angegeben. Die mittlere Beschleunigung am Äquator in 0 m MSL beträgt $9{,}78033\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

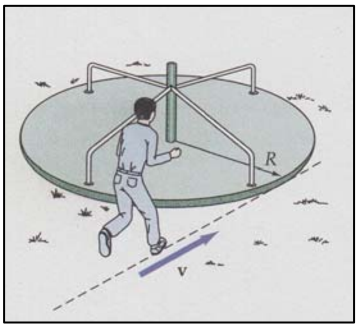
a. Welche Abschussgeschwindigkeit müsste die Kanonenkugel haben, um die Erde auf einer Kreisbahn umkreisen zu können?
b. Welche Zeit vergeht zwischen Abschuss und Auftreffen der Kugel?

3. Die Masse $m_1 = 4\,kg$ kann reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene gleiten. Die Masse $m_2 = 2\,kg$ liegt auf m_1. Zwischen m_1 und m_2 betrage die Haftreibungszahl $\mu_H = 0,25$ und die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,20$.



a. Vorüberlegung: Wie groß darf die Kraft F höchstens sein, damit die Masse m_2 auf der unter ihr liegenden Masse m_1 nicht rutscht?
b. Bestimmen Sie die Beschleunigungen von m_1 und m_2 für $F = 10\,N$.
c. Bestimmen Sie die Beschleunigungen von m_1 und m_2 für $F = 20\,N$.
d. Die Kraft $F = 10\,N$ (vergl. **3b**.) wirke ab $t = 0$ auf die ruhenden Massen m_1 und m_2. Welche Leistung wird zum Zeitpunkt $t = 10\,s$ benötigt?

4. Ein Junge mit einer Masse von $m_J = 50\,kg$ läuft mit einer Geschwindigkeit $v_J = 3\,m\,s^{-1}$ entlang einer Linie, die tangential an einem reibungsfrei drehenden Karussell mit Masse $m_K = 250\,kg$ und Radius $R_K = 3\,m$ vorbei führt. Die Umdrehungszeit des Karussells betrage $T_K = 12,56\,s$. Der Junge springt im Berührpunkt der Tangente auf das Karussell.



a. Wie groß ist die Umdrehungszeit des Karussells nach dem Aufsprung?
b. Bestimmen Sie den Anteil der anfänglich verfügbaren Energie, die beim Aufspringen des Jungen in Reibungs- bzw. Rutscharbeit (zwischen Schuhen und Karussell) umgewandelt wird.
c. Der Junge bleibt zunächst einige Umdrehungen lang auf einem Punkt am Karussellrand bei $R_K \approx 3\,m$ stehen und springt dann mit $v_1 = 1,5\,m\,s^{-1}$ relativ zum Karussell tangential wieder ab. Welche Umdrehungszeit hat das Karussell anschließend?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bis auf Aufgabe 2 g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Winkelgeschwindigkeit: $\omega_1 = 2\pi n_1 = 2\pi \cdot 4500 \min^{-1} = 2\pi \cdot \frac{4500}{60\,s} = 471.24\,s^{-1}$

Winkelbeschleunigung beim Hochlaufen:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - 0}{300\,s} = \frac{471,24\,s^{-1}}{300\,s} = 1,571\,s^{-2}$$

1b. Winkelbeschleunigung beim Abbremsen:

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \Delta n}{1\,s} = \frac{2\pi \cdot \left(-2,5\,s^{-1}\right)}{1\,s} = -15,71\,s^{-2}$$

1c. Beschleunigungszeit: $t_1 = 300\,s$

Zeit für gleichförmige Drehung: $t_2 = 300\,s$

Zeit für Abbremsung: $t_3 = \frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{471,24\,s^{-1}}{15,71\,s^{-2}} = 30\,s$

Gesamtzeit: $t_{ges} = 630\,s$

1d. Umdrehungszahl beim Hochlaufen: $N_1 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t_1^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,571\,s^{-2} \cdot 300^2\,s^2}{2\pi} = 11250$

Zahl gleichförmiger Umdrehungen: $N_2 = \frac{\omega_1 \cdot t_2}{2\pi} = 22500$

Umdrehungszahl beim Bremsen: $N_1 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_3 \cdot t_3^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15,71\,s^{-2} \cdot 30^2\,s^2}{2\pi} = 1125$

Gesamtzahl der Umdrehungen: $N_{ges} = 34875$

2a. Die Kanonengugel soll die Erde auf einem Kreis mit Radius

$$R_K = R_{Äq} + H = 6378137\,m + 6310\,m = 6384447\,m$$

Der Wert der Erdbeschleunigung in der Aufgabe wurde für 0 m MSL angegeben und muss geringfügig hinsichtlich der Höhenabnahme korrigiert werden.

$$g_K = g_{Äq} \cdot \left(\frac{R_{Äq}}{R_K}\right)^2 = 9,78033\,m\,s^{-2} \cdot \frac{6378137^2}{6384447^2}$$

$$g_K = g_{Äq} \cdot \left(\frac{R_{Äq}}{R_K}\right)^2 = 9,78033\,m\,s^{-2} \cdot 0,998024$$

$$g_K = 9,76100\,m\,s^{-2}$$

Die Zentripetalbeschleunigung der Kreisbahn ist gleich der Erdbeschleunigung auf der Umlaufbahn:

$$a_{ZP} = g_K = \frac{v_B^2}{R_K}$$

Es folgt: $v_B = \sqrt{g_K \cdot R_K} = \sqrt{9,761000\,m\,s^{-2} \cdot 6384447\,m}$

$$v_B = 7894,21\,m\,s^{-1}$$

2b. Für die Bahngeschwindigkeit gilt: $v_B = \frac{U}{T} = \frac{2\pi \cdot R_K}{T}$

Umlaufzeit $T = \frac{2\pi \cdot R_K}{v_B} = \frac{2\pi \cdot 6384447\,m}{7894,21\,m\,s^{-1}} = 5081,53\,s = 84,69\,\text{min}$

3a. Die Kraft F erzeugt zunächst eine Beschleunigung der Masse m_1. Im Haftreibungsfall ist die Beschleunigung der Masse m_2 gleich groß. Die Folge einer Beschleunigung ist eine Trägheitskraft $F_{Tr} = -m_2\,a$, die entgegengesetzt zur Beschleunigungskraft F_a angreift. Wenn diese Trägheitskraft größer ist, als die Haftreibungskraft, beginnt die Masse m_2 auf der Masse m_1 zu rutschen. Um den Haftreibungsfall zu erhalten muss also gelten:

$$F_{H,\max} > F_{Tr}$$

$$F_{H,\max} = \mu_H\,m_2\,g > m_2\,a = F_{Tr}$$

wobei a die durch die äußere Kraft F an den beiden Massen m_1 und m_2 erzeugte Beschleunigung darstellt. Im Haftreibungsfall gilt, da beide Massen gleichzeitig beschleunigt werden:

$$F_a = (m_1 + m_2)\,a$$

Einsetzen: $\mu_H\,m_2\,g > m_2\,\frac{F}{m_1 + m_2}$

Lösung: $F < \mu_H\,g\,(m_1 + m_2) = 0,25 \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 6kg = 15N$

3b. Die Kraft sei: $F = 10\,N < 15\,N$

Es handelt sich also um einen Haftreibung zwischen den beiden Massen m_1 und m_2. Dies bedeutet, dass beide Massen dieselbe Beschleunigung erfahren.

Es gilt: $F_a = (m_1 + m_2)\,a$

Es folgt: $a_1 = a_2 = a = \frac{F_a}{m_1 + m_2} = \frac{10N}{6\,kg} = 1,66\,m\,s^{-1}$

3c. Die Kraft sei: $F = 20\,N > 15\,N$

Es handelt sich also um einen Gleitbewegung der Masse m_2 auf m_2. Die Kraft F wirkt jetzt primär nur an der Masse m_1, die wiederum über die Gleitreibungskraft auf die Masse m_2 wirkt. Die Masse m_1 wird durch die Kraft F nach rechts beschleunigt und durch die Gleitreibungskraft gebremst (nach links beschleunigt).

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\sum_i \vec{F}_i - m_1\vec{a}_1 = 0$

Es folgt: $F - F_G - m_1 a_1 = 0$

$$F - \mu_G\,m_2\,g - m_1 a_1 = 0$$

$$a_1 = \frac{F - \mu_G\,m_2\,g}{m_1} = \frac{20N - 0,2 \cdot 2kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{m_1}$$

$$a_1 = \frac{20\,N - 4\,N}{4\,kg} = 4\,m\,s^{-2}$$

An der Masse m_2 wirkt nur noch die von der Masse m_1 erzeugte Gleitreibungskraft F_G nach rechts. Sie verursacht die Beschleunigung von m_2:

Es folgt: $F_G - m_2 a_2 = 0$

$$\mu_G\, m_2\, g - m_2 a_2 = 0$$

$$a_2 = \mu_G\, g = 0,2 \cdot 10 = 2\, m\, s^{-2}$$

Hinweis: Ein Beobachter im nicht-beschleunigten Initialsystem beobachte, dass die Masse m_1 mit $a_1 = 4\, m\, s^{-2}$ nach rechts, und auch die Masse m_2 mit $a_2 = 2\, m\, s^{-2}$ nach rechts beschleunigt wird. Ein Beobachter auf der Masse m_1 beobachtet, dass m_2 mit $a_2' = -2\, m\, s^{-2}$ nach links beschleunigt wird.

3d. Leistung im Haftreibungsfall 3b.

Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = 1,66\, m\, s^{-1}$. Die Geschwindigkeit nach $t = 10\, s$ beträgt also:

$$v(t = 10s) = a \cdot t = 1,66\, m\, s^{-2} \cdot 10\, s = 16,6\, m\, s^{-1}$$

Leistung: $P = F \cdot v = 10\, N \cdot 16,6\, ms^{-1} = 166\, W$

4a. Drehimpuls des Jungen bezogen auf den Drehpunkt des Karussells mit Radius R_K:

$$L_J = R_K \cdot m_J\, v_J$$

Drehimpuls des Karussells vor Aufsprung des Jungen:

$$L_K = J_K \cdot \omega_K$$

mit: $J_K = \frac{1}{2} \cdot 250\, kg \cdot 3^2\, m^2 = 1125\, kg\, m^2$

Drehimpuls des Karussells nach Aufsprung des Jungen:

$$L_K' = \left(J_K + m_J \cdot R_K^2\right) \cdot \omega_K'$$

Drehimpulserhaltungssatz: $L_J + L_K = L_K'$

$$R_K\, m_J\, v_J + J_K\, \omega_K = \left(J_K + m_J R_K^2\right) \cdot \omega_K'$$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_K' = \frac{R_K\, m_J\, v_J + J_K\, \omega_K}{J_K + m_J R_K^2}$

mit $\omega_K = 2\pi \cdot n_K = \frac{2\pi}{T_K} = \frac{2\pi}{12,56\, s^{-1}} = 0,500\ s^{-1}$

Drehzahl: $n_K' = \frac{1}{2\pi} \frac{R_K\, m_J\, v_J + J_K\, \omega_K}{J_K + m_J R_K^2}$

$$n_K' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3m \cdot 50\, kg \cdot 3\, m\, s^{-1} + 1125\, kg\, m^2 \cdot 0,500 s^{-1}}{1125\, kg\, m^2 + 50 kg \cdot 3^2\, m^2}$$

$$n_K' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{450 + 562,5}{1125 + 450} \frac{1}{s} = 0,1023\, s^{-1}$$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_K' = 2\pi\, n_K' = 2\pi \cdot 0,1023\, s^{-1} = 0,643\, s^{-1}$

Umdrehungszeit nachher: $T_K' = \frac{1}{n_K'} = \frac{1}{0,1023\ s^{-1}} = 9,77\, s$

4b. Vor dem Aufsprung beträgt die kinetische Energie des Jungen:

$$E_{kin,J} = \frac{1}{2} m_J\, v_J^2 = \frac{1}{2} 50\,kg \cdot 3^2\,m^2 s^{-2} = 225\,J$$

Die Rotationsenergie des Karussells beträgt:

$$E_{kin,K} = \frac{1}{2} J_K\, \omega_K^2 = \frac{1}{2} \cdot 1125\,kg\,m^2 \cdot 0,5^2\,s^{-2} = 140,625\,J$$

Die Rotationsenergie von Karussell und Jungen nach dem Aufsprung:

$$E_{kin,K+J} = \frac{1}{2}\left(J_K + m_J\, R_K^2\right)\left(\omega_K'\right)^2$$

$$E_{kin,K+J} = \frac{1}{2} \cdot \left(1125\,kg\,m^2 + 50\,kg \cdot 3^2\,m^2\right) \cdot 0,643^2\,s^{-2}$$

$$E_{kin,K+J} = 325,59\,J$$

Anteil der verlorenen Energie: $\delta = \dfrac{E_{kin,J} + E_{kin,K} - E_{kin,K+J}}{E_{kin,J} + E_{kin,K}}$

$$\delta = \frac{225\,J + 140,625\,J - 325,59\,J}{225\,J + 140,625\,J} = \frac{40,035}{365,625} = 0,1095$$

$10,95\,\%$ der anfänglichen kinetischen Energie gehen als Wärmeenergie/Reibungsarbeit verloren.

4c. Das Karussell zusammen mit dem Jungen bei $R_K = 3\,m$ dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega_K' = 0,643\,s^{-1}$ (siehe Lösung 4a.).

Drehimpulsanteil der Karussells: $L_K' = J_K \cdot \omega_K' = 1125\,kg\,m^2 \cdot 0,643\,s^{-1} = 723,375\,kg\,m^2 s^{-1}$

Drehimpulsanteil des Jungen: $L_J' = m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega_K'$

$$L_J' = 50\,kg \cdot 3^2\,m^2 \cdot 0,643\,s^{-1} = 289,35\,kg\,m^2 s^{-1}$$

Gesamtdrehimpuls von Karussell zusammen mit dem Jungen vor dem Absprung:

$$L_{K+J}' = \left(J_K + m_J\, R_K^2\right) \cdot \omega_K' = L_K' + L_J'$$

$$L_{K+J}' = \left(723,375 + 289,350\right) kg\,m^2\,s^{-1}$$

$$L_{K+J}' = 1012,275\,kg\,m^2\,s^{-1}$$

Wenn der Junge vom Karussell abspringt, muss der Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben. Der Drehimpulsanteil des Jungen wird also erhöht, während sich der Drehimpulsanteil des Karussells um den gleichen Anteil verringert.

Für den Gesamtdrehimpuls, also die Summe des Drehimpulses von Karussell ohne Junge plus dem Drehimpuls des mit v_1 relativ zum Karussell abspringenden Jungen gilt:

$$L_{K+J}'' = L'' + L_K'' = J_K \cdot \omega_K'' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \left(\omega_K' + \frac{v_1}{R_K}\right)$$

$$L_{K+J}'' = J_K \cdot \omega_K'' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega_K' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

Nach Drehimpulserhaltungssatz gilt: $L_{K+J}' = L_{K+J}''$

$$\left(J_K + m_J\, R_K^2\right) \cdot \omega_K' = J_K \cdot \omega_K'' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \omega_K' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

$$J_K \cdot \omega_K' = J_K \cdot \omega_K'' + m_J \cdot R_K^2 \cdot \frac{v_1}{R_K}$$

Winkelgeschwindigkeit $$\omega_K'' = \omega_K' - \frac{m_J \cdot R_K \cdot v_1}{J_K}$$

Drehzahl $$n_K'' = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_K' - \frac{m_J \cdot R_K \cdot v_1}{J_K}\right)$$

$$n_K'' = \frac{1}{2\pi}\left(0{,}643\, s^{-1} - \frac{50\, kg \cdot 3\, m \cdot 1{,}5\, m\, s^{-1}}{1125\, kg\, m^2}\right) = \frac{0{,}443 s^{-1}}{2\,\pi}$$

Drehzahl des Karussells: $$n_K'' = 0{,}07050\, s^{-1}$$

Umdrehungszeit: $$T_K''' = \frac{1}{n_K'''} = 14{,}2\, s$$