Hochschule Hannover | Vorgezogen Wiederholungsklausur im WS1011 | 28.09.10
Fakultät II, Abteilung Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 SS10 (Prof. Schrewe) | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Beim Testlauf einer Maschine werden folgende Werte gemessen:

t /s	0	10	40	60	90
n / min^{-1}	200	500	500	300	0

Im Zeitintervall zwischen $t_0 = 0\,s$ und $t_1 = 10\,s$ wirkt ein Drehmoment von 1000 Nm.

a. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment der drehenden Komponenten?

b. Wie viele Umdrehungen macht die Maschine insgesamt zwischen $t_0 = 0\,s$ und $t_4 = 90\,s$?

c. Wie groß ist das Drehmoment in der Abbremsphase zwischen $t_3 = 60\,s$ und $t_4 = 90\,s$?

d. Welche Energiezufuhr erfordert der Testlauf im gesamten betrachteten Zeitintervall?

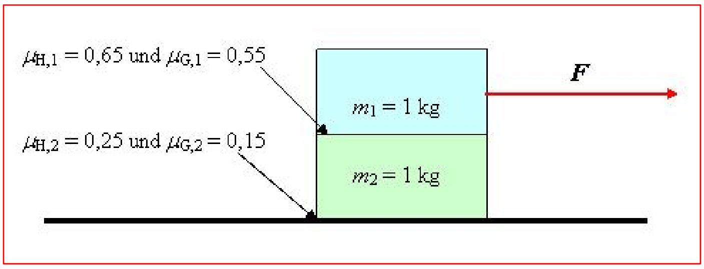
e. Welche Energie wird beim Abbremsen frei?

2. Geostationäre Satelliten (Fernsehsatelliten) umkreisen die Erde auf einer Kreisbahn über dem Äquator mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Erdrotation entspricht. Für eine volle Umdrehung relativ zu den Fixsternen benötigt die Erde einen *siderischen Tag*, der genau 23 h 56 min 4,099 s lang ist. Der Äquatorradius wird mit 6 378 137 m angegeben. Die mittlere Beschleunigung am Äquator in 0 m MSL beträgt $9{,}78033\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

a. Welchen Abstand hat die geostationäre Satellitenbahn vom Erdmittelpunkt?

b. Welche Bahngeschwindigkeit besitzen geostationäre Satelliten?

3. Die Masse $m_2 = 1\,kg$ kann auf einer horizontalen Ebene gleiten. Die Masse $m_1 = 1\,kg$ liegt auf m_2. Zwischen m_1 und m_2 betrage die Haftreibungszahl $\mu_{H,1} = 0{,}65$ und die Gleitreibungszahl $\mu_{G,1} = 0{,}55$. Zwischen m_2 und der Ebene lauten die entsprechenden Zahlen $\mu_{H,2} = 0{,}25$ und $\mu_{G,2} = 0{,}15$.

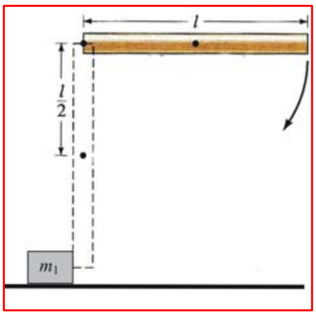


a. Bestimmen Sie die Beschleunigungen a_1 von m_1 und a_2 von m_2 für $F = 4\,N$.

b. Bestimmen Sie die Beschleunigungen a_1 von m_1 und a_2 von m_2 für $F = 6\,N$.

c. Bestimmen Sie die Beschleunigungen a_1 von m_1 und a_2 von m_2 für $F = 8\,N$.

4. Eine drehbare Stange der Masse $m_S = 0{,}3\,kg$ und Länge $l = 1\,m$ wird aus der horizontalen Lage in die Vertikale fallen gelassen und stößt dort elastisch mit ihrem freien Ende auf die ruhende Masse $m_1 = 1\,kg$.



a. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Stange vor dem Stoß?

b. In welche Richtung schwingt die Stange nach dem Stoß und wie groß ist dann ihre Winkelgeschwindigkeit? Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse m_1 nach dem Stoß?

Verwenden Sie zur Vereinfachung bis auf Aufgabe 2 g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Winkelbeschleunigung: $$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t_1} = \frac{2\pi\cdot\Delta n_1}{\Delta t_1} = \frac{2\pi\cdot(500-200)\min^{-1}}{10\,s} = 3{,}14\,s^{-2}$$

Massenträgheitsmoment: $$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{1000\,Nm}{3{,}14\,s^{-2}} = 318{,}31\frac{kg\,m^2}{s^2\cdot s^{-2}} = 318{,}31\,kg\,m^2$$

1b. Betrachtung der Abschnitte 1 bis 4.

	Abschnitt 1				
		Abschnitt 2			
			Abschnitt 3		
				Abschnitt 4	
t /s	0	10	40	60	90
n / min^{-1}	200	500	500	300	0

Abschnitt 1: Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung und einer gleichmäßig (positiv) beschleunigte Bewegung.

Winkelbeschleunigung (siehe 1a.): $$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t_1} = \frac{2\pi\cdot\Delta n_1}{\Delta t_1} = \frac{2\pi\cdot(500-200)\min^{-1}}{10\,s} = 3{,}14\,s^{-2}$$

Winkelgeschwindigkeit: $$\omega_1 = 2\pi\cdot n_0 = 2\pi\cdot\frac{200}{60\,s} = 20{,}94\,s^{-1}$$

Zahl der Umdrehungen: $$N_1 = \frac{\varphi_{ges}}{2\pi} = \frac{\omega_0\Delta t_1 + \frac{1}{2}\alpha_1\,\Delta t_1^2}{2\pi}$$

$$N_1 = \frac{20{,}94 s^{-1}\cdot 10\,s + 0{,}5\cdot 3{,}14\,s^{-2}\cdot 10^2\,s^2}{2\pi} = 58{,}33$$

Abschnitt 2: Gleichförmige Bewegung.

Winkelgeschwindigkeit: $$\omega_2 = 2\pi\cdot n_2 = 2\pi\cdot 500\min^{-1} = 52{,}35\,s^{-1}$$

Zahl der Umdrehungen: $$N_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\omega_2\cdot\Delta t_2 = \frac{52{,}35\,s^{-1}\cdot 30 s}{2\pi} = 250$$

Abschnitt 3: Gleichmäßig (negativ) beschleunigte Bewegung.

Winkelbeschleunigung: $$\alpha_3 = \frac{\Delta\omega_3}{\Delta t_3} = \frac{2\pi\cdot\Delta n_3}{\Delta t_3}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\pi\cdot(300-500)\min^{-1}}{20\,s} = -1{,}047\,s^{-2}$$

Zahl der Umdrehungen: $$N_3 = \frac{\varphi_{ges}}{2\pi} = \frac{\omega_2\,\Delta t_3 + \frac{1}{2}\alpha_3\,\Delta t_3^2}{2\pi}$$

$$N_3 = \frac{52{,}35 s^{-1}\cdot 20\,s - \frac{1}{2}\cdot 1{,}047 s^{-2}\cdot 20^2\,s^2}{2\pi} = 133{,}33$$

Abschnitt 4: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Winkelbeschleunigung: $$\alpha_4 = \frac{\Delta\omega_4}{\Delta t_4} = \frac{2\pi \cdot \Delta n_4}{\Delta t_4}$$

$$\alpha_4 = \frac{2\pi \cdot (0-300)\min^{-1}}{30\,s} = -1{,}047\,s^{-2}$$

Zahl der Umdrehungen: $$N_4 = \frac{\varphi_{ges}}{2\pi} = \frac{\left|\frac{1}{2}\alpha_4\,\Delta t_4^2\right|}{2\pi}$$

$$N_4 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1{,}047 s^{-2}\cdot 30^2 s^2}{2\pi} = 75$$

Gesamtzahl der Umdrehungen: $N_{ges} = 516{,}66$

1c. Drehmoment_ $M = J \cdot \alpha_4$

$$M = 318{,}31\,kg\,m^2 \cdot \left(-1{,}047 s^{-2}\right) = -333{,}27\,Nm$$

1d. Energiezufuhr = Beschleunigungsarbeit im Abschnitt 1

$$W_a = E_{kin,Ende} - E_{kin,Anfang} = \frac{1}{2} J\,\omega_{Ende}^2 - \frac{1}{2} J\,\omega_{Anfang}^2$$

$$W_a = \frac{1}{2} J\,\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\,\omega_1^2$$

$$W_a = 0{,}5 \cdot 318{,}31\,kg\,m^2 \cdot \left(52{,}35^2 - 20{,}94^2\right) s^{-2}$$

$$W_a = 366{,}4\,kJ$$

1e. **Bremsenergie:** $$W_B = \frac{1}{2} J\,\omega_2^2$$

$$W_B = 0{,}5 \cdot 318{,}31\,kg\,m^2 \cdot 52{,}35^2\,s^{-2} = 436{,}2\,kJ$$

2a. Bedingung für Kreisbahn: Zentripetalbeschleunigung a_{ZP} = Erdbeschleunigung $g(R)$

$$a_{ZP} = \frac{v_B^2}{R} = g_{(R)}$$

Erdbeschleunigung besitzt ein quadratisches Abstandsgesetz (Gravitationsgesetz):

$$g_{(R)} \sim \frac{1}{R^2}$$

Es folgt: $$\frac{g_{(R_E)}}{g_{(R_S)}} = \frac{R_S^2}{R_E^2}$$

mit R_E = Radius der Erde (hier Äquatorradius)

R_S = Radius der Satellitenbahn

$g_{(R_E)}$ = mittlere Erdbeschleunigung am Äquator

Es folgt: $$\frac{v_B^2}{R_S} = g_{(R_E)} \cdot \frac{R_E^2}{R_S^2}$$

Die Bahngeschwindigkeit ergibt sich aus dem Umfang der Kreisbahn und der Dauer der siderischen Tageslänge = Umlaufzeit des Satelliten.

$$v_B = \frac{U}{T} = \frac{2\pi R_S}{T}$$

Es folgt: $$\frac{4\pi^2 R_S^2}{T^2 R_S} = g_{(R_E)} \cdot \frac{R_E^2}{R_S^2}$$

Umlaufzeit des Satelliten: $T = 86164,099\,s$

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{g_{(R_E)} \cdot R_E^2 \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{9,78033\,m\,s^{-2} \cdot 6378137^2\,m^2 \cdot 86164,099^2\,s^2}{4\pi^2}}$$

$$R_S = 42\,138\,401\,m = 42\,138\,km$$

2b. Bahngeschwindigkeit: $$v_B = \frac{2\pi R_S}{T} = \frac{2\pi \cdot 42138401\,m}{86164,099\,s} = 3072,8\,m\,s^{-1}$$

3a. Äußere Kraft: $F = 4\,N$

Haftreibungskraft von m_1 und m_2: $F_{H_{\max},12} = \mu_{H,1} F_n = \mu_{H,1} m_1 g$

$$F_{H_{\max},12} = 0,65 \cdot 1\,kg \cdot 10\,ms^{-2} = 6,5\,N$$

Haftreibungskraft von m_2 und Ebene: $F_{H_{\max},2E} = \mu_{H,2} F_n = \mu_{H,2} \left(m_1 + m_2\right) g$

$$F_{H_{\max},2E} = 0,25 \cdot 2\,kg \cdot 10\,ms^{-2} = 5,0\,N$$

Da die Kraft $F = 4\,N$ kleiner ist als die beiden Haftreibungskräfte kann keine Bewegung zustande kommen. Die Beschleunigungen a_1 und a_2 sind daher Null.

3b. Äußere Kraft: $F = 6\,N$

Da die äußere Kraft $F = 6\,N$ kleiner als die Haftreibungskraft $F_{H_{\max},12} = 6,5\,N$ zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 ist, bleiben beide Massen fest miteinander verbunden. Die äußere Kraft ist aber größer, als die Kraft zwischen der Masse m_2 und der Ebene. Deshalb können beide Massen gemeinsam auf der Ebene beschleunigt werden.

Beschleunigungen: $$a_1 = a_2 = \frac{F - F_{G,2E}}{m_1 + m_2} = \frac{F - \mu_G \left(m_1 + m_2\right) \cdot g}{m_1 + m_2}$$

$$a_1 = a_2 = \frac{F - F_{G,2E}}{m_1 + m_2} = \frac{6N - 3N}{2\,kg} = 1{,}5\,m\,s^{-2}$$

3c. Äußere Kraft: $F = 8\,N$

Die äußere Kraft $F = 8\,N$ ist größer als die Haftreibungskraft $F_{H_{\max},12} = 6{,}5\,N$ zwischen den beiden Massen m_1 und m_2. Die Masse m_1 kann also auf der Masse m_2 gleiten. Es wirkt zwischen m_1 und m_2 die Gleitreibungskraft $F_{G,12}$.

$$F_{G,12} = \mu_{G,1}\, F_n = \mu_{G,1}\, m_1\, g = 0{,}55 \cdot 1kg \cdot 10\,m\,s^{-1} = 5{,}5\,N$$

Die Gleitreibungskraft $F_{G,12} = 5{,}5\,N$ ist größer als die Haftreibungskraft $F_{H_{\max},2E} = 5{,}0\,N$ zwischen m_2 und der Ebene, so dass nicht nur m_1, sondern auch m_2 bewegt werden.

Beschleunigung a_1: $$a_1 = \frac{F - F_{G,12}}{m_1} = \frac{F - \mu_{G,1} \cdot m_1 \cdot g}{m_1}$$

$$a_1 = \frac{8\,N - 5{,}5\,N}{1kg} = 2{,}5\,m\,s^{-2}$$

Beschleunigung a_2: $$a_2 = \frac{F_{G,12} - F_{G,2E}}{m_2} = \frac{\mu_{G,1} \cdot m_1 \cdot g - \mu_{G,2} \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot g}{m_2}$$

$$a_2 = \frac{5{,}5N - 0{,}15 \cdot 2\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{1kg}$$

$$a_2 = \frac{5{,}5N - 3N}{1kg} = 2{,}5\,m\,s^{-2}$$

4a. Es gilt der Energieerhaltungssatz: $$m_S\, g\, \frac{l}{2} = \frac{1}{2} J_S\, \omega^2$$

Massenträgheitsmoment der Stange: $$J_S = \frac{1}{12} m_S\, l^2 + m_S \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_S\, l^2 = 0{,}1 kg\, m^2$$

Es folgt: $$m_S\, g\, \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_S\, l^2\right)\omega_0^2$$

Lösung: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\,g}{l}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10\,m\,s^{-2}}{1\,m}} = 5{,}477\,s^{-1}$$

4b. Beim Stoß gilt der Drehimpulserhaltungssatz:

$$J_S\, \omega_0 = m_1\, u_1\, l + J_S\, \omega_1 \qquad (*)$$

Da der Stoß elastisch sein soll, gilt zusätzlich der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} J_S \, \omega_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} J_S \, \omega_1^2 \qquad (**)$$

Vereinfachung von Gl. (*)

$$\omega_0 = \frac{m_1 l}{J_S} u_1 + \omega_1 = \frac{m_1 l^2}{J_S} \cdot \frac{u_1}{l} + \omega_1 = \chi \, \omega' + \omega_1$$

Vereinfachung von Gl. (**)

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 l^2}{J_S} \frac{u_1^2}{l^2} + \omega_1^2 = \chi \, \omega'^2 + \omega_1^2$$

mit dem dimensionslosen Faktor:

$$\chi = \frac{m_1 l^2}{J_S} = \frac{m_1 l^2}{\frac{1}{3} m_S \, l^2} = \frac{3 m_1}{m_S} = \frac{3 \cdot 1}{0,3} = 10$$

und der Hilfsgröße:

$$\omega' = \frac{u_1}{l}$$

Vereinfachtes Gleichungssystem:

$$\omega_0 = 10 \, \omega' + \omega_1 \qquad (+)$$

$$\omega_0^2 = 10 \, \omega'^2 + \omega_1^2 \qquad (++)$$

Einsetzen von Gl. (+) in Gl. (++):

$$\left(10 \, \omega' + \omega_1\right)^2 = 10 \, \omega'^2 + \omega_1^2$$

$$100 \, \omega'^2 + 20 \omega' \omega_1 + \omega_1^2 = 10 \, \omega'^2 + \omega_1^2$$

$$0,9 \, \omega'^2 + 0,2 \, \omega' \omega_1 = 0$$

Quadratische Gleichung:

$$\omega'^2 + \frac{2}{9} \omega' \omega_1 = 0$$

Lösungen für ω':

$$\omega_1' = 0 \qquad \text{(Triviallösung)}$$

$$\omega_2' = -\frac{2}{9} \omega_1 \qquad \text{(Ergebnis)}$$

Lösung für ω_1:

$$\omega_0 = 10 \, \omega' + \omega_1 = 10 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \omega_1 + \omega_1 = -\frac{11}{9} \omega_1$$

Ergebnis für ω_1:

$$\omega_1 = -\frac{9}{11} \omega_0 = -\frac{9}{11} \cdot 5,477 \, s^{-1} = -4,93 \, s^{-1}$$

das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Stange nach rechts zurück schwingt.

Ergebnis für ω':

$$\omega' = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{9}{11}\right) \omega_0 = \frac{2}{11} 5,477 \, s^{-1} = 0,996 \, s^{-1}$$

Ergebnis für u_1:

$$u_1 = \omega' \cdot l$$

$$u_1 = 0,996 \, s^{-1} \cdot 1 m = 0,996 \, m \, s^{-1}$$