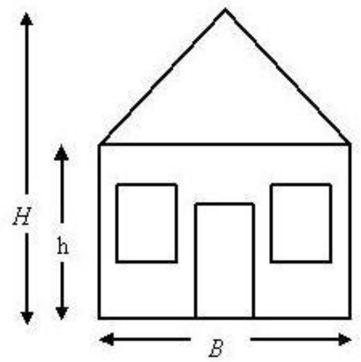
Hochschule Hannover | Klausur SS11 | 29.06.11
Fakultät II, Abteilung Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 SS11 (Prof. Schrewe) | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Betrachten Sie die gleichmäßig beschleunigte Fahrt eines Motorrades auf einem Kreis mit einem Radius von 100 m. Das Motorrad startet aus dem Stand. In 36 m und in 49 m Abstand vom Start befinden sich Lichtschranken. Das Motorrad passiert die beiden Lichtschranken im zeitlichen Abstand von genau 1,0 s. Der Fahrer beendet den Beschleunigungsvorgang zum Zeitpunkt, als die Schräglage (Winkel zwischen der Senkrechten und der Hochachse des Motorrades) 50° beträgt. Wie lange dauert die Beschleunigungsphase?
Hinweis: Bei einer stabilen Fahrt mit einem Zweirad verläuft die Resultierende der wirkenden Kräfte parallel zur Hochachse.

2. Ein Stück Rohr (Hohlzylinder) rollt von der Dachspitze (First) eines Hauses zunächst ein schräges Hausdach hinab und fällt dann vom Rand des Daches entlang einer parabelförmigen Flugbahn auf den Erdboden neben dem Haus. Berechnen Sie die Entfernung des Auftreffpunktes von der Hauswand unter Verwendung der vereinfachten Geometrie der Skizze rechts.



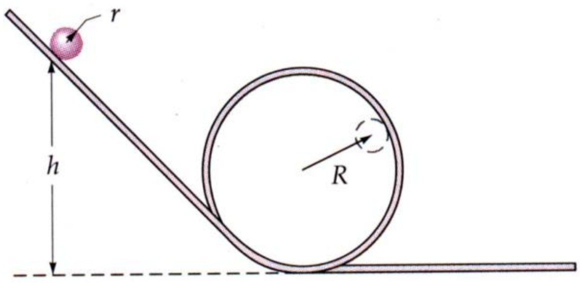
Firsthöhe: $H = 6{,}8\,m$
Traufhöhe: $h = 3{,}2\,m$
Hausbreite: $B = 9{,}6\,m$

3. Für einen Verbrennungsmotor wurden folgende Drehmomentwerte M als Funktion der Motordrehzahl n gemessen:

n / min^{-1}	1000	1500	2000	4000	4500	4800
M / Nm	50	200	500	500	445	260

a. Berechnen Sie für die in der Tabelle angegebenen Drehzahlwerte die Leistung des Motors.
b. Skizzieren Sie das Leistungs-Drehzahl-Diagramm zusammen mit dem Drehmoment-Drehzahl-Diagramm.
c. Der Motor ist mit einer Seiltrommel (Radius $R = 25\,cm$) ohne Untersetzung gekoppelt (Masse von Trommel und Seil können vernachlässigt werden). Die Winde soll schwere Massen in einer Gleitbewegung eine schiefe Ebene (Winkel gegen die Horizontale 45°) hochziehen. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0{,}2$. Der Motor soll mit maximaler Leistung von ~210 kW betrieben werden. Wie groß ist die gezogene Masse? Welche Geschwindigkeit hat die Masse auf der schiefen Ebene?

4. Eine homogene Kugel mit Radius r und der Masse m rollt (ohne zu gleiten) aus der Höhe h durch eine Loopingbahn mit Radius R = 50 cm.
(Beachten Sie die Zeichnung: Der Schwerpunkt der Kugel bewegt sich auf einem Kreis mit Radius R, der Radius der Loopingbahn ist R + r. Die Anfangshöhe h ist der Abstand zwischen dem tiefsten Punkt der Loopingbahn und dem unteren Kugelrand in der Ausgangshöhe h.)



Welche Ausgangshöhe h muss die Kugel mindestens haben, damit sie im höchsten Punkt der Loopingbahn nicht fällt?

Verwenden Sie zur Vereinfachung g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1. Das Motorrad startet aus dem Stand: $v(t=0)=0$ und $s(t=0)=0$.

Die Weg-Zeit-Funktion lautet: $s(t)=\frac{1}{2}a\,t^2$.

Die Lichtschranken sind im Abstand $\Delta s = s_2 - s_1$ positioniert.

Das Motorrad passiert die Lichtschranken im zeitlichen Abstand von $\Delta t = 1s$.

Es gilt: $$s_1 = s(t) = \frac{1}{2}a\,t_1^2 \qquad (1)$$

es folgt: $$t_1 = \sqrt{\frac{2\,s_1}{a}} \qquad (2)$$

Es gilt ferner: $$s_2 = s(t_1+\Delta t) = \frac{1}{2}a\left(t_1+\Delta t\right)^2 \qquad (3)$$

Ziel: Aus den Gleichungen (1) und (3) soll die Beschleunigung a bestimmt werden.

Aus (1) und (3) folgt: $$\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_1+\Delta t) - s(t_1) = \frac{1}{2}a\left(t_1+\Delta t\right)^2 - \frac{1}{2}a\,t_1^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}a\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) - \frac{1}{2}a\,t_1^2$$

$$\Delta s = a\,t_1\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2 \qquad (4)$$

Einsetzen von Gl. (2) in (4): $$\Delta s = \sqrt{2\,s_1\,a}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2 \qquad (5)$$

Quadrieren der Gl. (5): $$\left(\Delta s\right)^2 - a\,\Delta s\,\Delta t^2 + \frac{1}{4}a^2\,\Delta t^4 = 2\,s_1\,a\left(\Delta t\right)^2$$

Umformung liefert: $$a^2 - \frac{4\,a}{\Delta t^2}\left(\Delta s + 2\,s_1\right) = -\frac{4\,\Delta s^2}{\Delta t^4}$$

$$a_{1/2} = \frac{2}{\Delta t^2}\left(\Delta s + 2\,s_1\right) \pm \sqrt{\frac{4}{\Delta t^4}\left(\Delta s + 2\,s_1\right)^2 - \frac{4\,\Delta s^2}{\Delta t^4}}$$

$$a_{1/2} = \frac{2}{1s^2}\left(13+2\cdot 36\right)m \pm \sqrt{\frac{4}{1s^4}\left(13+2\cdot 36\right)^2 m^2 - \frac{4\cdot 13^2 m^2}{1s^4}}$$

$$a_{1/2} = 170\,m\,s^{-2} \pm \sqrt{28900 m^2 s^{-4} - 676 m^2 s^{-4}}$$

$$a_{1/2} = 170\,m\,s^{-2} \pm 168\,m\,s^{-2}$$

Lösung für die Beschleunigung: $a_1 = 2\,m\,s^{-2}$ (Lösung $a_2 = 338\,m\,s^{-2}$ scheidet aus.)

Die Beschleunigungsphase wird beendet, wenn der Winkel α zwischen der Senkrechten und der Hochachse des Motorrades 50° beträgt.

Es gilt: $$\tan\alpha = \frac{F_{Zf}}{F_g} = \frac{m\frac{v_{\max}^2}{r}}{m\cdot g} = \frac{v_{\max}^2}{g\cdot r}$$

mit F_{Zf} Zentrifugalkraft

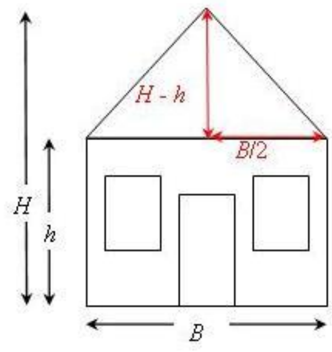
und F_g Gewichtskraft

Für die Höchstgeschwindigkeit gilt: $v_{\max} = \sqrt{g\cdot r\cdot\tan\alpha} = \sqrt{10\,m\,s^{-2}\cdot 100\,m\cdot\tan 50°}$

$$v_{\max} = 34{,}52\, m\, s^{-1} = 124{,}3\, km\, h^{-1}$$

Beschleunigungszeit: $$t_b = \frac{v_{\max}}{a} = \frac{34{,}52\, ms^{-1}}{2\, ms^{-2}} = 17{,}62\, s$$

2. Geometrie: Der Neigungswinkel φ der Dachfläche ergibt sich aus der Zeichnung.



Neigungswinkel φ gilt: $$tan\,\varphi = \frac{H-h}{B/2} = \frac{2\cdot(6{,}8-3{,}2)}{9{,}6/2}$$

$$tan\,\varphi = 0{,}75$$

$$\varphi = arctan(0{,}75) = 36{,}87°$$

Dachlänge: $$L = \sqrt{(H-h)^2 + (B/2)^2} = 6{,}0\, m$$

Die Geschwindigkeit des Rohrstücks am unteren Ende des Daches ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz.

Energieerhaltungssatz: $$m\, g\,(H-h) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2$$

Das Rohrstück rollt. Deshalb gilt: $v = r \cdot \omega$.

Das Massenträgheitsmoment ist: $J = k \cdot m r^2$, mit $k = 1$. Es folgt:

$$m\, g\,(H-h) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(m r^2\right)\frac{v^2}{r^2}$$

Es folgt: $$g\,(H-h) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} v^2 = v^2$$

Geschwindigkeit: $$v = \sqrt{g\,(H-h)} = \sqrt{10\, m\, s^{-2} \cdot 3{,}6\, m} = 6\, m\, s^{-1}$$

Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors liegt parallel zur Dachfläche.

Horizontalkomponente von *v*: $v_h = v_{horizontal} = v \cdot cos\,\varphi = 6\, m\, s^{-1} \cdot cos\, 36{,}87° = 4{,}80\, m\, s^{-1}$

Vertikalkomponente von *v*: $v_v = v_{vertikal} = v \cdot sin\,\varphi = 6\, m\, s^{-1} \cdot sin\, 36{,}87° = 3{,}60\, m\, s^{-1}$

Die Fallbewegung entlang der vertikalen Fallstrecke *h* ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_v:

$$h = \frac{1}{2} g\, t_{ges}^2 + v_v\, t_{ges},$$

wobei t_{ges} die Gesamtzeit der Fallbewegung darstellt.

Umformung: $$t_{ges}^2 + 2\frac{v_v}{g} t_{ges} = \frac{2h}{g}$$

Lösung: $$t_{ges} = -\frac{v_v}{g} \pm \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_v^2}{g^2}}$$

$$t_{ges} = -\frac{3{,}6}{10} s \pm \sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2}{10} + \frac{3{,}6^2}{100}}\, s = -0{,}3600\, s \pm 0{,}8773\, s$$

$$t_{ges,1} = 0{,}5173\, s$$

$$(t_{ges,2} = -1{,}2373\, s \text{ scheidet aus})$$

Die horizontale Wegstrecke x, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_h in der Zeit t_{ges} zurückgelegt werden kann, beträgt:

$$x = v_h \cdot t_{ges} = 4{,}80\, m\, s^{-1} \cdot 0{,}5617\, s = 2{,}696\, m$$

3a. Leistung: $P = M \cdot \omega = M \cdot 2\pi \cdot n$

Bei der Umrechnung von der Drehzahl n in die Winkelgeschwindigkeit ω sind die unterschiedlichen Einheiten (1/min für n und 1/s für ω) zu beachten.

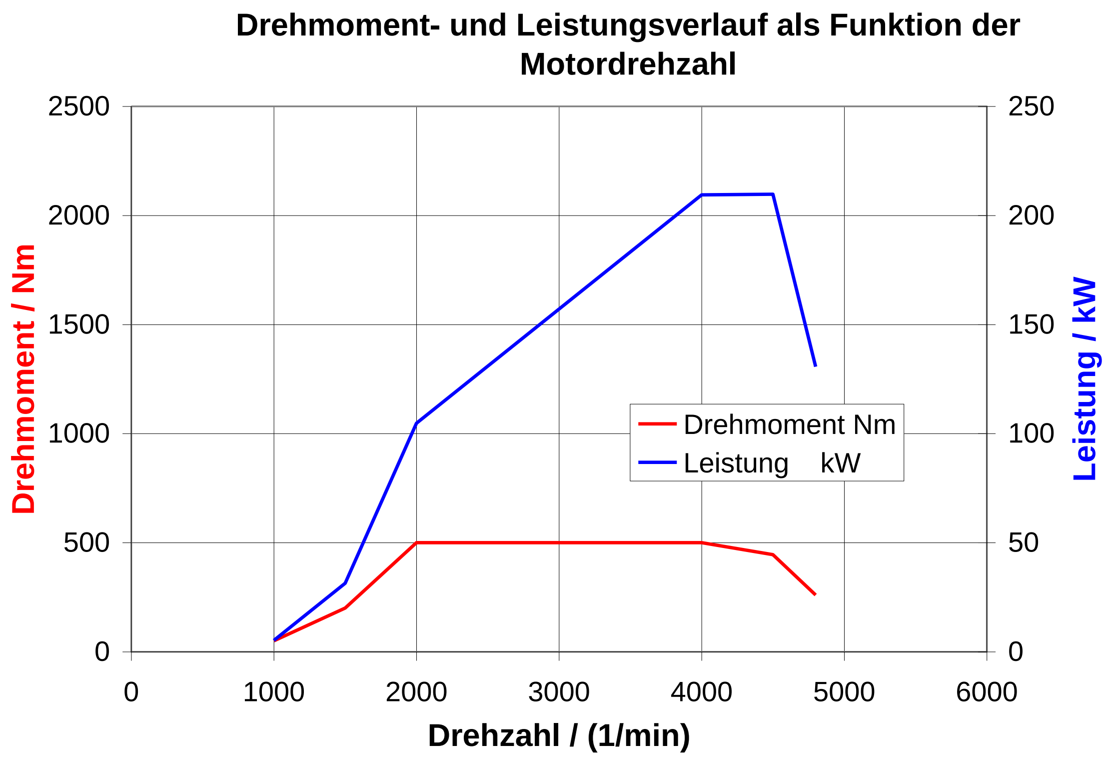
Beispiel: $n = 1000\,\text{min}^{-1}$ entspricht $\omega = 2\pi \cdot \frac{1000}{60\, s} = 104{,}7\, s^{-1}$

Drehzahl	Winkelgeschwindigkeit	Drehmoment	Leistung
n	ω	M	P
1/min	**1/s**	**Nm**	**kW**
1000	104,7	50	5
1500	157,1	200	31
2000	209,4	500	105
4000	418,9	500	209
4500	471,2	445	210
4800	502,7	260	131

Bei der Drehzahl $n = 4500\,\text{min}^{-1}$ erreicht der Motor sein Leistungsmaximum:

$$P_{\max} \cong 210\, kW\ .$$

3b. Leistungs-Drehzahl-Diagramm zusammen mit dem Drehmoment-Drehzahl-Diagramm:



3c. Der Motor soll mit einer Leistung von $P_{max} \cong 210\,kW$ betrieben werden. Aus der Tabelle zum Aufgabenteil 3a. kann man entnehmen, dass dies einer Drehzahl von $n_{max} = 4500\,\text{min}^{-1}$ entspricht. Der maximalen Leistung entspricht ein bestimmtes Drehmoment M_{max}.

$$M_{max} = \frac{P_{max}}{\omega_{max}} = \frac{P_{max}}{2\pi \cdot n_{max}} = \frac{210\,kW \cdot 60s}{2\pi \cdot 4500}$$

$$M_{max} = \frac{210\,000 \cdot 60}{2\pi \cdot 4500} Nm = 445\,Nm$$

Mit einem Radius von $R = 0,25\,m$ an der Seiltrommel erzeugt das Drehmoment

$M_{max} = 445\,Nm$ eine Seilkraft von: $\quad F_{max} = \frac{M_{max}}{R} = \frac{445\,Nm}{0,25\,m} = 1780\,N$

Mit dieser Kraft wird die Masse gleichförmig die schiefe Ebene hoch bewegt. Die Gegenkräfte sind die Tangentialkomponente der Gewichtskraft und die Gleitreibungskraft:

Es gilt: $\quad F_{max} = m\,g \cdot \sin\varphi + \mu_G\, m\,g \cdot \cos\varphi$

$$F_{max} = m \cdot g \cdot \left(\sin\varphi + \mu_G \cdot \cos\varphi\right)$$

Masse: $\quad m = \frac{F_{max}}{g \cdot \left(\sin\varphi + \mu_G \cdot \cos\varphi\right)}$

$$m = \frac{1780N}{10\,ms^{-2} \cdot \left(0,7071 + 0,2 \cdot 0,7071\right)}$$

Ergebnis: $\quad m = 210\,kg$

Geschwindigkeit: $\quad v = \omega_{max} \cdot R = 2\pi \cdot n \cdot R = 2\pi \cdot \frac{4500}{60\,s} \cdot 0,25\,m = 117,8\,m\,s^{-1}$

4a. Bedingung für die Kräfte im höchsten Punkt der Loopingbahn: Zentrifugalkraft ist größer gleich der Gewichtskraft: $\quad F_{Zf} = m\frac{v^2}{R} \geq m\,g = F_g$

Für die Mindestgeschwindigkeit gilt: $\quad v_{min}^2 = R\,g$

Energieerhaltungssatz: $\quad E_{pot}(h) = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} + E_{pot}(2R)$

Für die kleinsten Höhe h_{min} gilt: $\quad m\,g\,h_{min} = \frac{1}{2} m\,v_{min}^2 + \frac{1}{2} J\,\omega_{min}^2 + m\,g\,(2R)$

. Rollbedingung (ohne Gleiten): $\quad v_{min} = r \cdot \omega_{min}$

Durch Einsetzen von $\quad v_{min}^2 = R\,g$

$$\omega_{min}^2 = \frac{v_{min}^2}{r^2} = \frac{R\,g}{r^2}$$

und Massenträgheitsmoment: $\quad J = \frac{2}{5} m\,R^2 \quad$ (homogene Kugel)

erhält man: $\quad m\,g\,h_{min} = \frac{1}{2} m(R\,g) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m\,r^2\right)\frac{R\,g}{r^2} + m\,g\,(2R)$

Kürze *m* und *g*: $\quad h_{min} = \frac{1}{2}R + \frac{1}{5}R + 2R = \frac{27}{10}R$

Ergebnis: $\quad h_{min} = \frac{27}{10} \cdot 0,5\,m = \frac{27}{20}\,m = 1,35m$

Die Ausgangshöhe muss größer als $h_{min} = 1,35\,m$ sein.