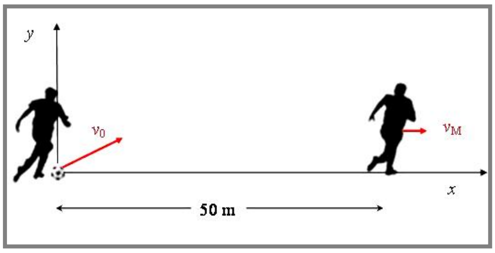
Hochschule Hannover — Klausur Physik I im WS11/12 — 19.01.2012
Fakultät II - Abteilung Maschinenbau — Zeit: 90 min
Professoren Grünemaier, Schrewe, Tornow — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1a	1b	1c	2	3.	4a.	4b.	4c.	Summe
15 P	10 P	(15 P)	25 P	25 P	20 P	5 P	(10 P)	100 P / (125 P)

1. Während eines Vorbereitungsspiels schießt Manuel Neuer einen Ball mit $v_0 = 100\,km\,h^{-1}$ und einem Winkel von $\varphi = 30°$ zur Horizontalen (x-Richtung) zu seinem Mitspieler Thomas Müller. Dieser ist beim Abschlag 50 m entfernt und bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_M = 5\,m\,s^{-1}$ in die gleiche horizontale x- Richtung wie der Ball. Thomas Müller ist 187 cm groß.



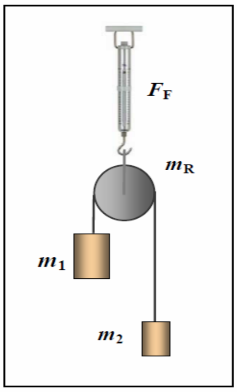
(Der Ball ist als Massenpunkt zu behandeln und die Luftreibung zu vernachlässigen.)

a. Wie lange dauert es bis der Fußball Thomas Müller erreicht (so dass beide dieselbe x-Koordinate haben)? (15 Punkte)

b. Wie hoch muss Thomas Müller springen, um den Ball köpfen zu können? (10 Punkte)

c. <u>Zusatzaufgabe:</u> Welche als konstant angenommene Geschwindigkeit muss Thomas Müller haben, damit er direkt den Ball köpfen kann und nicht springen muss?
(Alle anderen Größen bleiben gleich.) (15 Punkte)

2. An einer Federwaage hängt eine Atwoodsche Fallmaschine, die aus zwei Massestücken, $m_1 = 2{,}4\,kg$ und $m_2 = 1{,}4\,kg$, und einer drehbaren zylindrischen Umlenkrolle der Masse $m_R = 0{,}4\,kg$ besteht (siehe Abb. rechts). Die Massen sind mit einer masselosen Schnur verbunden. Wenn die Umlenkrolle blockiert wird, zeigt die Federwaage F_F die Summe der Gewichtskräfte der beiden Massestücke und der Umlenkrolle: $F_F = 42\,N$. Welche Kraft $F_F' \neq F_F$ zeigt die Federwaage, nachdem die Blockierung der Rolle gelöst worden ist und sich die Massen m_1 und m_2 bewegen? (25 Punkte)



3. PKW_1 mit der Masse $m_1 = 1000\,kg$ fährt auf einen langsamer fahrenden PKW_2 mit der Masse $m_2 = 1400\,kg$ auf. Die Geschwindigkeit des PKW_2 vor der Kollision beträgt 20 ms^{-1}. Die Analyse der Reifenspuren von PKW_2 ergibt, dass dieser nach der Kollision eine Geschwindigkeit von $25\,m\,s^{-1}$ hatte. Anhand der Schäden schätzt ein Sachverständiger die totale Verformungs- und freigesetzte Wärmeenergie an den beiden Unfallfahrzeugen auf Q = 35 kJ. Welche Geschwindigkeit hatte PKW_1 vor der Kollision? (25 Punkte)

4. Eine massive Kugel mit der Masse $m_K = 100\,kg$ und einem Durchmesser von $D_K = 1\,m$ dreht sich zunächst mit einer konstanten Drehzahl von 1800 Umdrehungen pro Minute. Dann wird sie innerhalb von 500 Umdrehungen auf eine Drehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute gebracht. Reibung ist zu vernachlässigen.

a. Wie groß ist das dazu notwendige Drehmoment? (20 Punkte)

b. Wie groß ist die bei diesem Vorgang verrichtete Arbeit? (5 Punkte)

c. <u>Zusatzaufgabe:</u> Wie groß sind die mittlere Leistung, die minimale Leistung und die maximale Leistung? (10Punkte)

Verwenden Sie zur Vereinfachung g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Anfangsgeschwindigkeit des Balls: $v_0 = 100\,km\,h^{-1} = 27{,}8\,m\,s^{-1}$

Komponente in *x*-Richtung: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\varphi = 27{,}8\,m\,s^{-1} \cdot \cos(30°) = 24{,}1\,m\,s^{-1}$

Komponente in y-Richtung: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\varphi = 27{,}8\,m\,s^{-1} \cdot \sin(30°) = 13{,}9\,m\,s^{-1}$

x-Koordinate des Balls: $x_B(t) = v_{0x} \cdot t$

y-Koordinate des Balls: $y_B(t) = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

x-Koordinate Müller: $x_M(t) = x_{M0} + v_M \cdot t$

x-Koordinate Müller für $t = 0$: $x_{M0} = 50\,m$

Geschwindigkeit Müller: $v_M = 5\,m\,s^{-1}$

Größe von Thomas Müller: $H_M = 187\,cm$

Gesucht ist der Zeitpunkt t_1, an dem die x-Koordinaten des Balls und von Thomas Müller gleich sind. $x_B(t_1) = x_M(t_1)$

Einsetzen: $x_B(t_1) = v_{0x} \cdot t_1 = x_{M0} + v_M \cdot t_1 = x_M(t_1)$

Lösung: $t_1 = \frac{x_{M0}}{v_{0x} - v_M} = \frac{50\,m}{(24{,}1 - 5)\,m\,s^{-1}} = 2{,}62\,s$

1b. Gesucht ist die Strecke Δs, die Müller springen muss, um den Ball erreichen zu können.

Ansatz: $\Delta s = y_B(t_1) - H_M$

y-Komponente des Balls bei t_1: $y_B(t_1) = v_{y0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$

Näherungslösung mit $g = 10\,m\,s^{-2}$: $y_B(t_1) = 13{,}9\,m\,s^{-1} \cdot 2{,}62 s - 0{,}5 \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 2{,}62^2\,s^2$

$y_B(t_1) = 2{,}02\,m$ mit $g = 10\,m\,s^{-2}$

Thomas Müller muss $\Delta s = y_B(t_1) - H_M = 2{,}02\,m - 1{,}87 m = 0{,}15\,m$ hoch springen.

Realistische Lösung mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

$y_B(t_1) = 13{,}9\,m\,s^{-1} \cdot 2{,}62 s - 0{,}5 \cdot 9{,}81\,m\,s^{-2} \cdot 2{,}62^2\,s^2$

$y_B(t_1) = 2{,}67\,m$ mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

Thomas Müller muss $\Delta s = y_B(t_1) - H_M = 2{,}67\,m - 1{,}87 m = 0{,}80\,m$ hoch springen.

1c. Gesucht ist eine Geschwindigkeit $v'_M \neq 5\,m\,s^{-1}$, damit Thomas Müller nicht springen muss.

Ansatz: $H_M = v_{0y} \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2$ Gl. (1)

und: $x_B(t_2) = v_{0x} \cdot t_2 = x_{M0} + v'_{M0} \cdot t_2 = x_M(t_2)$ Gl. (2)

Gl (1) kann die Zeit t_2 liefern: $H_M = v_{0y} \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2$

$$t_{2\pm} = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 - \frac{2H_M}{g}}$$

Lösung (mit $g = 10\,m\,s^{-2}$): $t_{2+} = 2{,}64\,s$ und $t_{2-} = 0{,}14\,s$

Lösung (mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$)	$t_{2-} = 2{,}69\,s$ und $t_{2-} = 0{,}14\,s$
Aus Gl (2) erhält man:	$v'_{M0} = v_{0x} - \frac{x_{M0}}{t_2}$
Lösung für t_{2+}	$v'_{M0,+} = 5{,}09\,ms^{-1}$ für $g = 10\,m\,s^{-2}$
	$v'_{M0,+} = 5{,}47\,ms^{-1}$ für $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$
Lösung für t_{2-}	$v'_{M0,-} = -328\,ms^{-1}$ für $g = 10\,m\,s^{-2}$
	$v'_{M0,-} = -329\,ms^{-1}$ für $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

Müller müsste also etwas schneller in positive Richtung laufen, nämlich mit 5,09 ms^{-1}, bzw. 5,47 ms^{-1}, oder mit -328 ms^{-1}, bzw. -329 ms^{-1}, in negative x-Richtung, also auf Neuer zu, was auch ein Thomas Müller kaum schaffen dürfte.

2. Bezeichnungen:

Gewichtskraft der Masse m_1:	$F_{g,1}$
Seilkraft an Masse m_1:	$F_{S,1}$
Beschleunigung der Masse m_1:	a_1
Gewichtskraft der Masse m_2:	$F_{g,2}$
Seilkraft an Masse m_2:	$F_{S,2}$
Beschleunigung der Masse m_2:	a_2
Gemeinsame Beschleunigung:	a
Gewichtskraft der Umlenkrolle m_R:	$F_{g,R}$
Radius der Umlenkrolle:	R

Ansatz: Die Kraftanzeige der Federwaage entspricht der Summe der beiden Seilkräften links und rechts der Umlenkrolle und der Gewichtskraft der Umlenkrolle. Wenn die Umlenkrolle blockiert ist, ist die Summe der Seilkräfte gleich der Summe der Gewichtskräften der Massen m_1 und m_2. Wenn die Blockierung der Rolle gelöst wird und sich die Massen bewegen, wirken zusätzlich zu den Gewichtskräften auch noch die Trägheitskräfte $F_{Tr,1} = -m_1 \cdot a$ und $F_{Tr,2} = -m_2 \cdot a$, wobei $\left|\vec{F}_{Tr,1}\right| < \left|\vec{F}_{Tr,2}\right|$ ist. Die betragsmäßig größere Kraft $\left|\vec{F}_{Tr,2}\right|$ ist nach oben gerichtet, die betragsmäßig kleinere Kraft $\left|\vec{F}_{Tr,1}\right|$ ist nach unten gerichtet.
Die Folge ist eine kleinere Kraftanzeige an der Federwaage: $F'_F < F_F$.
Um die Trägheitskräfte zu bestimmen, benötigt man die Beschleunigung.

Ansatz mit Hilfe des D'Alembertschen Prinzips: $\sum_i \vec{F}_i - m \cdot \vec{a} = 0$

Man betrachte die Kräfte an den Masse m_1 und m_2 und die Drehmomente an der Rolle m_R:
D'Alemembertsches Prinzip für die Kräfte an m_1:

$$\left(F_{g,1} - F_{S,1}\right) - m_1 \cdot a_1 = 0 \qquad \text{Gl.(1)}$$

D'Alemembertsches Prinzip für die Kräfte an m_2:

$$\left(F_{S,2} - F_{g,2}\right) - m_2 \cdot a_2 = 0 \qquad \text{Gl. (2)}$$

D'Alembertsches Prinzip für die Drehmomente an der Umlenkrolle m_R:

$$\left(F_{S,1}\cdot R - F_{S,2}\cdot R\right) - J_R\cdot\alpha = 0 \qquad \text{Gl. (3)}$$

Nebenbedingungen: $a_1 = a_2 = a$ Gl. (4)

Massenträgheitsmoment der Umlenkrolle: $J_R = \frac{1}{2}m_R\cdot R^2$ Gl. (5)

da Rolle und Seil schlupffrei sind: $\alpha = \frac{a}{R}$ Gl. (6)

Bestimmung der Beschleunigung a:

Setze $F_{S,1}$ aus Gl. (1) und $F_{S,2}$ aus Gl. (2) in Gl. (3) ein:

$$\left(F_{g,1} - m_1\cdot a_1\right)\cdot R - \left(F_{g,2} + m_2\cdot a_2\right)\cdot R - J_R\cdot\alpha = 0$$

Verwende die Nebenbedingungen Gl. (4) bis Gl. (6):

$$\left(F_{g,1} - m_1\cdot a\right)\cdot R - \left(F_{g,2} + m_2\cdot a\right)\cdot R - \frac{1}{2}m_R\cdot R^2\cdot\frac{a}{R} = 0$$

Umformung: $F_{g,1} - F_{g,2} - m_1\cdot a - m_2\cdot a - \frac{1}{2}m_R\cdot a = 0$

Lösung für a: $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_R}\cdot g = \dfrac{2,4-1,4}{2,4+1,4+\frac{1}{2}\cdot 0,4}\cdot g$

Ergebnis für *a*: $a = 2,5\,m\,s^{-2}$ (15 Teilpunkte)

Mit Hilfe der Beschleunigung a können die Seilkräfte unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte bestimmt werden:

Subtrahiert man Gl. (2) von Gl. (1), erhält man:

$$F_{g,1} + F_{g,2} - F_{S,1} - F_{S,2} - m_1\cdot a_1 + m_2\cdot a_1 = 0$$

Aus Gl. (4) folgt: $\left(F_{g,1} + F_{g,2}\right) - \left(F_{S,1} + F_{S,2}\right) - \left(m_1 - m_2\right)\cdot a = 0$ Gl. (7)

Die gesuchte Kraft F_F' an der Federwaage ergibt sich aus den Seilkräften und der Gewichtskraft der Umlenkrolle:

$$F_F' = F_{S,1} + F_{S,2} + F_{g,R}$$

Mit Hilfe von Gl (7) folgt: $F_F' = \left(F_{g,1} + F_{g,2} + F_{G,R}\right) - \left(m_1 - m_2\right)\cdot a$

$$F_F' = \left(24 + 14 + 4\right)N - \left(2,4 - 1,4\right)kg\cdot 2,5\,m\,s^{-2}$$

Ergebnis für F_F': $F_F' = F_{S,1} + F_{S,2} = 42\,N - 2,5\,N = 39,5\,N$

Berechnung der Seilkräfte (war nicht gefordert und dient nur der Kontrolle):

Aus Gl. (1) folgt: $F_{S,1} = F_{g,1} - m_1\cdot a_1 = 24\,N - 2,4\,kg\cdot 2,5\,m\,s^{-2}$

$F_{S,1} = 18\,N$

Aus Gl. (2) folgt: $F_{S,2} = F_{g,2} + m_2\cdot a = 14\,N + 1,4\,kg\cdot 2,5\,m\,s^{-2}$

$F_{S,1} = 17,5\,N$

Lösung: $F_F' = F_{S,1} + F_{S,2} + F_{g,R}$

Ergebnis für F_F': $F_F' = \left(18 + 17,5 + 4\right)N = 39,5\,N$

---

3. **Impulserhaltungssatz:** $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Umformung: $m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) = 7000\, kg\, m\, s^{-1}$

Geteilt durch m_1 $v_1 - u_1 = 7\, m\, s^{-1}$ Gl. (1)

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + Q$

Umstellen: $m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) + 2 \cdot Q = 385\, kJ$

Geteilt durch m_1 $(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = \frac{385000\, kg\, m^2\, s^{-2}}{1000\, kg} = 385\, m^2\, s^{-2}$

Einsetzen von Gl. (1) $7\, m\, s^{-1} \cdot (v_1 + u_1) = 385\, m^2\, s^{-2}$

Umformung: $(v_1 + u_1) = \frac{385}{7} m\, s^{-1} = 55\, m\, s^{-1}$

Lösung für u_1: $u_1 = 55\, m\, s^{-1} - v_1$

Einsetzen in Gl. (1) $v_1 - (55\, m\, s^{-1} - v_1) = 7\, m\, s^{-1}$

Lösung für v_1: $v_1 = 31\, m\, s^{-1}$

4a. **Gesucht ist das Drehmoment M :**

Für starre Körper gilt: $M = J \cdot \alpha$

Für gleichmäßig beschleunigte Drehbewegungen mit gleichförmiger Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 gilt:

$$\varphi_{ges} = \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 + \omega_0 \cdot \Delta t$$

und Endwinkelgeschwindigkeit ω_e :

$$\omega_e = \alpha \cdot \Delta t + \omega_0$$

Beschleunigungszeit Δt : $\Delta t = \frac{\omega_e - \omega_0}{\alpha}$

Durch Einsetzen von Δt folgt: $\varphi = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{(\omega_e - \omega_0)^2}{\alpha^2} + \omega_0 \frac{\omega_e - \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_e^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \alpha}$

Winkelbeschleunigung α : $\alpha = \frac{\omega_e^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \varphi} = \frac{4\pi^2 \cdot (n_e^2 - n_0^2)}{2 \cdot 2\pi \cdot N} = \frac{\pi \cdot (n_e^2 - n_0^2)}{N}$

Ergebnis für α : $\alpha = \frac{\pi \cdot (50^2\, s^{-2} - 30^2\, s^{-2})}{500} = 10{,}05\, s^{-2}$

Massenträgheitsmoment: $J_K = \frac{2}{5} m_K \cdot R_K^2 = 0{,}4 \cdot 100\, kg \cdot 0{,}5^2\, m^2 = 10\, kg\, m^2$

Drehmoment: $M = J_K \cdot \alpha = 10\, kg\, m^2 \cdot 10{,}05 s^{-2} = 100{,}5\, Nm$

4b. Geleistete Arbeit $\Delta W = M \cdot \varphi = M \cdot 2\pi \cdot N = 100{,}5\, Nm \cdot 2\pi \cdot 500 = 315827\, J$

4c. Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{(\omega_e - \omega_0)/\alpha}$

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta W \cdot \alpha}{\omega_e - \omega_0} = \frac{315730\, J \cdot 10{,}05 s^{-2}}{2\pi \cdot (50 s^{-1} - 30 s^{-1})} = 25{,}266\, kW$$

Alternativ kann die Leistung P als Produkt aus Drehmoment M und Winkelgeschwindigkeit ω ausgedrückt werden.

Mittlere Leistung:
$$\bar{P} = M \cdot \bar{\omega} = M \cdot \frac{\omega_e + \omega_0}{2} = 100,5\,Nm \cdot \frac{2\pi \cdot \left(50\,s^{-1} + 30\,s^{-1}\right)}{2}$$

$$\bar{P} = 100,5\,Nm \cdot \frac{2\pi \cdot \left(50\,s^{-1} + 30\,s^{-1}\right)}{2} = 25,266\,kW$$

Minimale Leistung:
$$P_{\min} = M \cdot \omega_0 = 100,5\,Nm \cdot 2\pi \cdot 30\,s^{-1} = 18,950\,kW$$

Maximale Leistung:
$$P_{\max} = M \cdot \omega_e = 100,5\,Nm \cdot 2\pi \cdot 50\,s^{-1} = 31,582\,kW$$