Hochschule Hannover | Klausur Physik I im WS12/13 | 18.01.2013

Fakultät II - Abteilung Maschinenbau | Zeit: 90 min

Dozenten: Grünemaier, Haussmann, Klebow, Pindrus, Schrewe, Tornow

Hilfsmittel: Erlaubte Formelsammlungen und Taschenrechner

Hinweis: Das Betreiben von Mobiltelefonen ist in den Prüfungsräumen nicht gestattet.

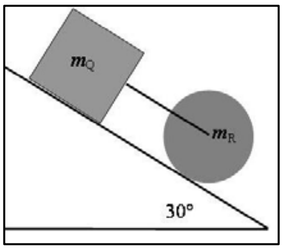
1a.	1b.	2a.	2b.	3a.	3b.	3c.	4b.	4c.	Summe
10 P	15 P	10 P	15P	12 P	8 P	5P	10 P	15 P	100 P

1. **Kinematik:** Ein PKW (Länge 5 m) fährt auf einer Bundesstraße mit konstantem Sicherheitsabstand von 40 m hinter einem LKW (20 m Länge) mit konstanter Geschwindigkeit von $80\,km\,h^{-1}$ her. Als der Fahrer eine 300 m lange freie Strecke einsehen kann, setzt er zum Überholen an. Dabei beschleunigt er mit $a = 1{,}3\,ms^{-2}$ bis auf $v_{max} = 100\,km\,h^{-1}$.

a. Zeichnen Sie das $s(t)$- und $v(t)$-Diagramm. ....(5P)

b. Schafft der PKW das Überholen innerhalb der einsehbaren freien Strecke, wenn auch beim Wiedereinscheren ein Sicherheitsabstand von 40 m beachtet wird? Berechnen Sie zur Beantwortung der Frage Überholzeit und den Überholweg. ....(20P)

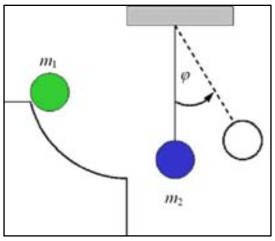
2. **Dynamik:** Eine Rolle und ein dahinter hängender Quader (Masse $m_Q = 2\,kg$) befinden sich auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel 30°. Für den Quader gilt: Haftreibungszahl $\mu_H = 0{,}9$, Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}4$. Die Rollreibung der Rolle kann vernachlässigt werden.



a. Wie groß muss die Masse m_R der Rolle mindestens sein, damit sich Quader und Rolle bewegen können? ....(10P)

b. Nehmen Sie an, dass die Masse der Rolle den unter **2a.** berechneten Wert gerade überschreitet. Wie groß ist die Beschleunigung von Quader und Rolle? ....(15P)

3. **Erhaltungssätze:** Eine homogene Kugel der Masse $m_1 = 0{,}3\,kg$ und Radius $r_1 = 0{,}2\,m$ rollt eine Bahn in Form eines Viertelkreises mit dem Radius $R = 1\,m$ herunter und stößt mit einer zweiten Kugel mit gleichem Radius und der Masse $m_2 = 0{,}2\,kg$ zentral und elastisch zusammen. Die zweite Kugel hängt an einem $L = 1{,}2\,m$ langen Seil. Die Masse des Seils ist vernachlässigbar.

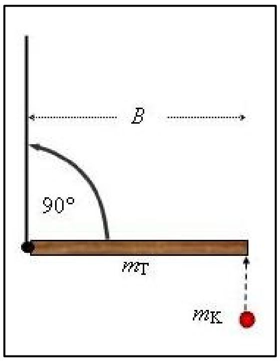


a. Wie groß ist die Geschwindigkeit der ersten Kugel unmittelbar vor dem Stoß? ....(12P)

b. Um welchen Winkel φ wird die zweite Kugel am Seil nach dem Stoß ausgelenkt? (8P)

c. Wie groß wäre die Deformationsenergie, wenn die Kugeln nach dem Stoß aneinander haften würden? ....(5P)

4. **Rotation:** Eine Tür sei anfangs um 90° geöffnet und in Ruhe. Die Tür sei $B = 1{,}25\,m$ breit und habe eine Masse von $m_T = 75\,kg$. Sie bewege sich reibungsfrei.



a. Sie schließen die Tür mit einer konstanten Kraft von 220 N am äußeren Rand. Die Kraft wirke immer senkrecht zum Türblatt. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist? (Massenträgheitsmoment der Tür $J = \frac{1}{3} m_T\, B^2$)...(10P)

b. Nun schließen Sie die um 90° geöffnete Tür, in dem Sie eine Knetkugel (punktförmige Masse mit $m_K = 0{,}5\,kg$) mit der Geschwindigkeit $12\,m\,s^{-1}$ an den äußeren Rand werfen (siehe Bild). Die Knetkugel bleibt an der Tür haften. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist? ....(15P)

Verwenden Sie zur Vereinfachung $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. Der Überholvorgang kann in drei Phasen unterteilt werden:

Phase I = gleichförmige Bewegung mit $v_0 = 80\,km\,h^{-1}$

Phase II = gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = 1{,}3\,m\,s^{-2}$

Phase III = gleichförmige Bewegung mit $v_0 = 100\,km\,h^{-1}$

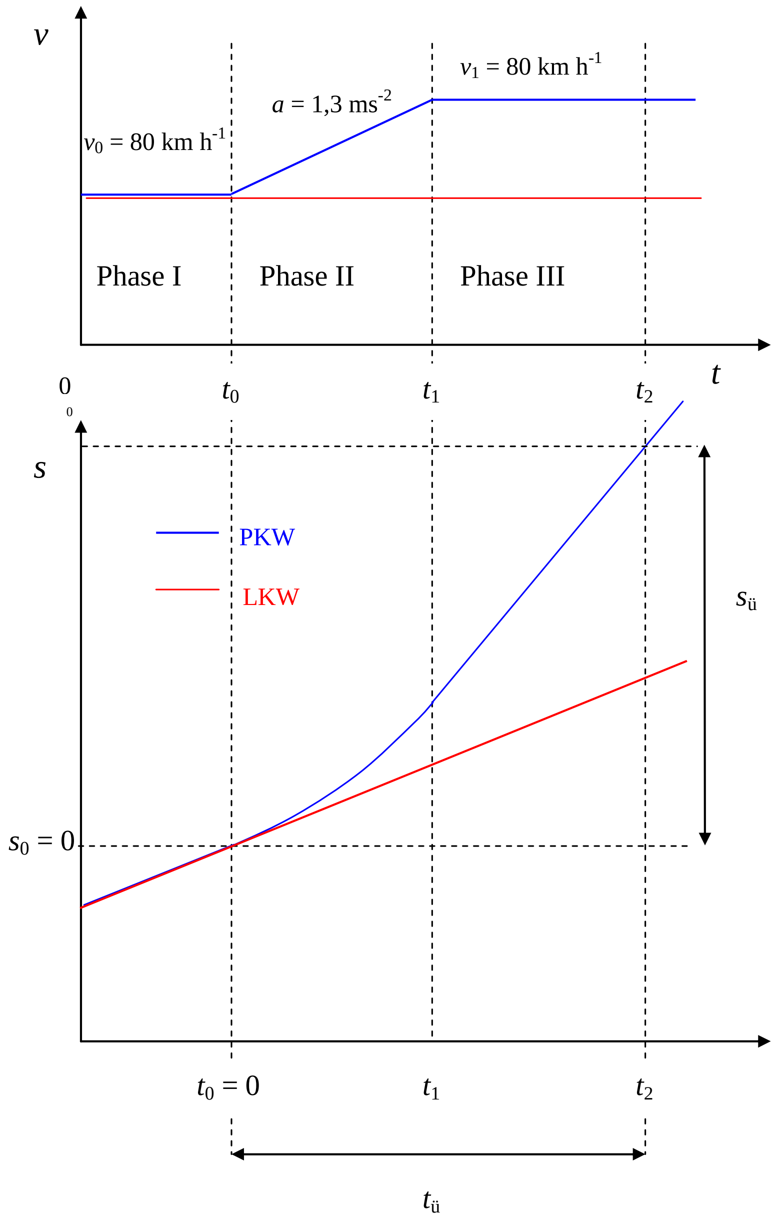
Setze $t_0 = 0$ und $s_0 = 0$ bei Beginn der Phase II,

t_1 = Zeitpunkt am Ende des Beschleunigungsvorgangs (Phase II),

$t_B = t_1 - t_0$ = Beschleunigungszeit, es gilt: $t_B = t_1$

t_2 = Zeitpunkt am Ende des Überholvorgangs (Ende von Phase II),

$t_ü$ = Zeit für den gesamten Überholvorgang, es gilt: $t_ü = t_2$



1b. Der Überholweg $s_ü$ setzt sich zusammen aus der Strecke, die der LKW mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklegt: $s_{LKW} = v_{LKW} \cdot t_ü$

den beiden Sicherheitsabständen $s_s = 2 \cdot 40\,m = 80\,m$

der Gesamtlänge von PKW und LKW: $s_L = 5\,m + 20\,m = 25\,m$

Für den Überholweg gilt: $s_ü = v_{LKW} \cdot t_ü + \Delta s = v_0 \cdot t_2 + \Delta s \quad (1)$

mit: $\Delta s = 105\,m$

Der PKW legt die Überholstrecke in Form einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung und einer anschließenden gleichförmigen Bewegung zurück.

Für den PKW gilt:

$$s_ü = v_0 \cdot t_B + \frac{1}{2} a\, t_B^2 + v_1 \cdot \left(t_ü - t_B\right)$$

$$s_ü = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} a\, t_1^2 + v_1 \cdot \left(t_2 - t_1\right) \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2):

$$v_0 \cdot t_2 + \Delta s = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} a\, t_1^2 + v_1 \cdot \left(t_2 - t_1\right) \quad (3)$$

Für die Beschleunigungszeit gilt:

$$t_B = t_1 - t_0 = t_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{a}$$

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{\left(27{,}78 - 22{,}22\right) m\, s^{-1}}{1{,}3\, m\, s^{-2}} = 4{,}28\, s \quad (4)$$

Einsetzen von (4) in (3):

$$v_0 \cdot t_2 + \Delta s = v_0 \cdot \frac{v_1 - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{\left(v_1 - v_0\right)^2}{a^2} + v_1 \cdot \left(t_2 - \frac{v_1 - v_0}{a}\right)$$

$$a\, v_0\, t_2 + a \cdot \Delta s = v_0 v_1 - v_0^2 + \frac{1}{2} v_1^2 - v_0 v_1 + \frac{1}{2} v_0^2 + a\, v_1\, t_2 - v_1^2 + v_0 v_1$$

$$a \cdot \Delta s = a \cdot \left(v_1 - v_0\right) \cdot t_2 - \frac{1}{2} v_1^2 + v_0 v_1 - \frac{1}{2} v_0^2$$

$$t_2 = \frac{\Delta s}{v_1 - v_0} + \frac{1}{2\,a}\left(v_1 - v_0\right)$$

$$t_2 = \frac{105\, m}{\left(27{,}78 - 22{,}22\right) m\, s^{-1}} + \frac{1}{2 \cdot 1{,}3\, m\, s^{-2}} \left(27{,}78 - 22{,}22\right) m\, s^{-1}$$

Ergebnis für die Überholzeit t_2: $t_2 = 18{,}88\, s + 2{,}14\, s = 21{,}02\, s$

Überholweg $s_ü$ (Bed. für LKW) $s_ü = v_{LKW} \cdot t_ü + \Delta s = v_0 \cdot t_2 + \Delta s$

$$s_ü = 22{,}22\, m\, s^{-1} \cdot 21{,}02\, s + 105\, m = 572\, m$$

Da $s_ü = 572\, m$ größer ist als die einsehbare freie Strecke, schafft der PKW den Überholvorgang nicht risikolos.

Kontrolle:

Überholweg $s_ü$ (Bed. für PKW) $s_ü = v_0 \cdot t_B + \frac{1}{2} a\, t_B^2 + v_1 \cdot \left(t_ü - t_B\right)$

$$s_ü = 22{,}22\, m\, s^{-1} \cdot 4{,}28\, s + \frac{1}{2} 1{,}3\, m\, s^{-2} \cdot 4{,}28^2\, s^2 + 27{,}78 ms^{-1} \cdot \left(21{,}02 - 4{,}36\right) s$$

$$s_ü = 95{,}10\, m + 11{,}91\, m + 462{,}81\, m = 570\, m$$

2a. Haftbedingung: $F_{H,\max}^{Quader} > F_{\mathrm{t}}^{Quader} + F_t^{Rolle}$

Haftreibungskraft des Quaders: $F_{H,\max}^{Quader} = \mu_H \cdot m_Q \cdot g \cdot \cos 30°$

Hangabtriebskraft des Quaders: $F_t^{Quader} = m_Q \cdot g \cdot \sin 30°$

Hangabtriebskraft der Rolle: $F_t^{Rolle} = m_R \cdot g \cdot \sin 30°$

Es folgt: $\mu_H\, m_Q\, g \cdot \cos 30° > m_Q\, g \cdot \sin 30° + m_R\, g \cdot \sin 30°$

$$m_R < m_Q \cdot \left(\mu_H \cdot \cot 30° - 1 \right)$$

Ergebnis: $m_R < 2\,kg \cdot \left(0{,}9 \cdot \sqrt{3} - 1\right) = 2\,kg \cdot 0{,}559 = 1{,}12\,kg$

2b. Jetzt sei $m_R = 1{,}12\,kg$ und damit die Haftreibungsbedingung gerade überschritten. Das System wird beschleunigt.

D'Alembertsches Prinzip für die Rolle:

i. Rotation um den Schwerpunkt: $\sum_i \vec{M}_i - J_R \cdot \vec{\alpha} = 0$

ii. Translation des Schwerpunktes $\sum_i \vec{F}_i - m_R\, \vec{a} = 0$

Zu *i.* Reine Rotation: $M = F_H \cdot r$

mit r gleich Radius der Rolle, F_H gleich Haftreibungskraft von Rolle und schiefer Ebene.

Massenträgheitsmoment: $J_R = \frac{1}{2} m_R \cdot r^2$

Winkelbeschleunigung der Rolle: $\alpha = \frac{a}{r}$, mit $a =$ Schwerpunktbeschleunigung der Rolle.

Es folgt: $F_H \cdot r - \frac{1}{2} m_R\, r^2 \cdot \frac{a}{r} = 0$

Haftreibungskraft: $F_H = \frac{1}{2} m_R\, a$ **(1)**

Zu 2. Beschleunigung des Schwerpunktes: $\left(F_t^{Rolle} - F_s - F_H \right) - m_R\, a = 0$

mit Seilkraft: F_S

Einsetzen von F_H aus Gl. **(1)**: $m\, g \sin 30° - F_s - \frac{1}{2} m_R\, a - m_R\, a = 0$

$m\, g \sin 30° - F_s - \frac{3}{2} m_R\, a = 0$ **(2)**

D'Alembertsches Prinzip für den Quader: $\sum_i \vec{F}_i - m_Q\, \vec{a} = 0$

Für den Quader gilt: $\left(F_t^{Quader} + F_s - F_G \right) - m_Q \cdot a = 0$

Gleitreibungskraft des Quaders: $F_G^{Quader} = \mu_G \cdot m_Q \cdot g \cdot \cos 30°$

Es folgt: $\left(m_Q\, g \cdot \sin 30° + F_s - \mu_G\, m_Q\, g \cdot \cos 30° \right) - m_Q\, a = 0$ **(3)**

Aus **(2)** und **(3)** folgt: $m_Q\, g \cdot \sin 30° + m_R\, g \cdot \sin 30° - \frac{3}{2} m_R\, a - \mu_G\, m_Q\, g \cdot \cos 30° - m_Q\, a = 0$

$$a = g \cdot \frac{\left(m_Q + m_R\right)\sin 30° - \mu_G\, m_Q \cos 30°}{m_Q + \frac{3}{2} m_R}$$

$$a = g \cdot \frac{\left(2+1{,}12\right)\, kg \cdot 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 2\,kg\, \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(2+1{,}5 \cdot 1{,}12\right) kg} = g \cdot 0{,}2356$$

Ergebnis: $a = 2{,}356\, m\, s^{-2}$

3a. Energieerhaltungssatz für m_1: Gesamtenergie am Beginn ist gleich Gesamtenergie am Ende der Rollstrecke:

$$E_{pot} = E_{kin,trans} + E_{kin,rot}$$

$$m_1\, g\left(R-r\right) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

$$m_1\, g\left(R-r\right) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m_1 R^2\right)\omega_1^2$$

Es gilt die Rollbedingung: $v_1 = r \cdot \omega_1$

Es folgt: $m_1\, g\left(R-r\right) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{2}{10} m_1 R^2 \frac{v_1^2}{R^2}$

$$m_1\, g\left(R-r\right) = \frac{7}{10} m_1 v_1^2$$

Geschwindigkeit von m_1 vor dem Stoß: $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}\left(R-r\right)\cdot g}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot\left(1-0{,}2\right) m \cdot 10\, m\, s^{-2}}$$

Ergebnis: $v_1 = 3{,}381 ms^{-1}$

3b. Zentraler elastischer Stoß zwischen m_1 und m_2. Es gelten der

Impulserhaltungssatz: $m_1\, v_1 = m_1\, u_1 + m_1\, u_2$

und der Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1\, v_1^2 = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, u_2^2$

Aus der Formelsammlung kann die Lösung für u_2 entnommen werden:

$$u_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\cdot v_2$$

Da $v_2 = 0$ ist, gilt: $u_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\cdot v_1 = \frac{0{,}6}{0{,}5}\cdot 3{,}381 = 4{,}057\, m\, s^{-1}$

Nach dem Stoß wird die kinetische Energie des Pendels mit Masse m_2 und der Pendellänge L ausgelenkt und dabei der wird der Schwerpunkt um h angehoben. Es gilt:

$$\frac{1}{2} m_2\, u_2^2 = m_2 g\, h$$

$$\frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v_1^2 = m_2 g\,h$$

$$h=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

$$h=\left(\frac{2\cdot 0,3}{0,3+0,2}\right)^2 \cdot \frac{3,381^2\,m^2 s^{-2}}{2\cdot 10\,ms^{-2}} = 0,8230\,m$$

Auslenkungswinkel: $\alpha = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) = \arccos\left(\frac{1,0-0,8230}{1,0}\right)$

Ergebnis: $\alpha = \arccos\left(\frac{1,0-0,8230}{1,0}\right) = 79,8°$

3c. Es handelt sich um einen vollkommen unelastischen Stoß.

Es gilt der Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 = (m_1 + m_1)\cdot u$

Es folgt: $u = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 = \frac{0,3}{0,3+0,2} v_1 = \frac{3}{5}\cdot 3,381\,m\,s^{-1}$

$$u = 2,0286\,m\,s^{-1}$$

Der Energieerhaltungssatz in erweiterter Form lautet:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot u_1^2 + Q$$

Deformationsenergie $Q = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cdot v_1^2$

$$Q=\left(\frac{1}{2}m_1\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\right)\cdot v_1^2$$

Ergebnis: $Q=\left(\frac{1}{2}0,3\,kg\left(1-\frac{0,3}{0,3+0,2}\right)\right)\cdot 3,381^2\,m^2 s^{-2}$

Ergebnis: $Q = 0,6859\,J$

4a. Drehmoment $M = F\cdot r = 220\,N\cdot 1,25\,m = 275\,Nm$

Massenträgheitsmoment der Tür bezüglich des Drehpunktes:

$$J_T = \frac{1}{3}m_T\,B^2 = \frac{1}{3}\cdot 75\,kg\cdot 1,25^2\,m^2$$

$$J_T = \frac{1}{3}\cdot 75\,kg\cdot 1,25^2\,m^2 = 39,06\,kg\,m^2$$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{M}{J_T} = \frac{275\,Nm}{39,06\,kg\,m^2} = 7,04\,s^{-2}$

Die Bewegung der Tür ist eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung mit Anfangsgeschwindigkeit und Anfangswinkel gleich Null. Gesucht ist die Zeit, in der der Winkel den Wert von $90° = \frac{\pi}{2}$ erreicht:

Für die Funktion $\varphi(t)$: $\varphi(t)=\frac{1}{2}\alpha\, t^2$

Schließzeit der Tür: $t_{\pi/2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=0{,}67\,s$

4b. Für den vollkommen unelastischen Stoß der Knetkugel mit der Tür gilt der Drehimpulserhaltungssatz: $L_{vorher}=\sum_i L_{i,nachher}$

Vor dem Stoß: $L_{vorher}=B\cdot p=B\cdot m_K\cdot v_K$

Nach dem Stoß: $\sum_i L_{i,nachher}=\left(J_T+J_K\right)\omega$

Es folgt: $B\cdot m_K\cdot v_K=\left(J_T+J_K\right)\omega$

Massenträgheitsmoment der Knete: $J_K=m_K\,B^2=0{,}5\,kg\cdot 1{,}25^2\,m^2=0{,}78\,kg\,m^2$

Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß: $\omega=\frac{B\cdot m_K\cdot v_K}{J_T+J_K}=\frac{m_K\cdot v_K}{\left(\frac{1}{3}m_T+m_K\right)B}$

$$\omega=\frac{0{,}5\,kg\cdot 12\,ms^{-1}}{\left(\frac{1}{3}\cdot 75\,kg+0{,}5kg\right)\cdot 1{,}25\,m}=0{,}1882\,s^{-1}$$

Die Tür schließt in Form einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Es gilt: $t_2=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{2\,\omega}=8{,}35\,s$