Hochschule Hannover vorgezogene Wiederholungsklausur im SS13 21.03.2013
Fakultät II - Abteilung Maschinenbau Zeit: 90 min

Dozenten: Grünemaier, Haussmann, Pindrus, Schrewe
Hilfsmittel: Erlaubte Formelsammlungen und Taschenrechner
Hinweis: Das Betreiben von Mobiltelefonen ist in den Prüfungsräumen nicht gestattet.

1a.	1b.	1c	2a.	2b.	2c.	3a.	3b.	4a.	4b.	4c.	Summe
10 P	5 P	10 P	15 P	5P	5 P	15 P	10P	10 P	10 P	5 P	100 P

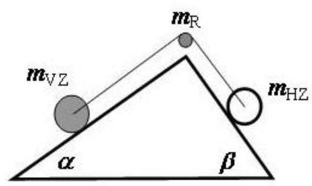
1. Kinematik: Ein zylindrischer Zentrifugenbehälter mit Radius 10 cm läuft zunächst mit einer Drehzahl von 20.000 min^{-1}. Dann wird die Drehzahl gleichmäßig 30 s lang erhöht, bis am Zentrifugenrand eine radiale Beschleunigung vom Vierhunderttausendfachen der Erdbeschleunigung wirkt.

a. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung? ....(10 Punkte)

b. Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit am Zentrifugenrand, wenn die maximale Drehzahl erreicht ist? ....(5 Punkte)

c. Wie viele Umdrehungen sind bis zum Erreichen der maximalen Drehzahl nötig? ....(10 Punkte)

2. Dynamik: Ein Vollzylinder der Masse $m_{VZ} = 1kg$ und Radius $r = 0,5m$ auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$ ist mittels eines Seils über eine Umlenkrolle der Masse $m_R = 0,2kg$ (Vollzylinder) mit einem Hohlzylinder gleicher Masse und gleichem Radius verbunden. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene des Hohlzylinders beträgt $\beta = 40°$, die Rollreibungszahl $\mu_{RR} = 0,05$.



a. Bestimmen Sie die resultierende Beschleunigung des Systems unter der Nebenbedingung, dass die Zylinder rollen und nicht gleiten. ....(15 Punkte)

b. Wie groß sollte der Winkel β näherungsweise sein, damit sich die beiden Zylinder nicht mehr bewegen, wenn $\alpha = 30°$ fest bleibt. ....(5 Punkte)

c. Wie groß sind die Seilkräfte am Vollzylinder $F_{S,VZ}$ und am Hohlzylinder $F_{S,HZ}$ für die in **2a.** genannten Bedingungen? ....(5 Punkte)

3. Energieerhaltung: Zur Bestimmung der Rollreibungszahl μ_{RR} lässt man eine Kugel mit Radius 1 cm eine schiefe Ebene herabrollen. Nachdem die Kugel auf der schiefen Ebene den Weg $s_1 = 1m$ herabgerollt ist, rollt auf einer ebenen Fläche bis sie nach $s_2 = 5,5m$ liegen bleibt. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene beträgt $\alpha = 20°$. Die Oberflächenbeschaffenheit der gesamten Bahn ist einheitlich.

a. Berechnen Sie die Rollreibungszahl μ_{RR} der Stahlkugel auf der Bahn. ....(15 Punkte)

b. Mit welcher Drehzahl *n* dreht sich die Kugel am Ende der schiefen Ebene? ....(10 Punkte)

4. Rotation: Auf einem Spielplatz gibt es eine homogene Holzscheibe (Durchmesser: $d = 2,4m$, Dicke: $b = 20cm$, Dichte: $\rho = 0,5g\,cm^{-3}$), die drehbar im Mittelpunkt horizontal aufgestellt ist.

a. Drei Kinder beschleunigen diese Scheibe in 15 s auf 12 Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist die Kraft, die jedes Kind aufbringen muss, unter der Annahme, dass jedes Kind die gleiche tangential wirkende Kraft am Außenrand der Scheibe aufbringt? ....(10 Punkte)

b. Jetzt springt ein Kind (punktförmig angenommen) ($m = 20kg$) in radialer Richtung vom Drehpunkt auf und landet von diesem 1 m entfernt. Mit welcher Drehzahl *n* dreht sich jetzt die Scheibe? ....(10 Punkte)

c. Anschließend springt das Kind in radialer Richtung wieder ab. Der Absprung erfolgt in der Verlängerung der Linie Drehmittelpunkt - Kind. Bleibt die Winkelgeschwindigkeit gleich oder ändert sie sich? (Begründung!) ....(5 Punkte)

Verwenden Sie zur Vereinfachung $g = 10\ m\ s^{-2}$.

Lösungen:

1a. Bei $t = 0$ dreht sich die Zentrifuge mit einer Drehzahl von

$$n_0 = 20.000\,\text{min}^{-1} = 333,33\,s^{-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot n_0 = 2094,40\,s^{-1}$$

Die Drehlzahl/Winkelgeschwindigkeit der Zentrifuge steigt dann so lange, bis für die Radialbeschleunigung gilt: $a_r = 400.000 \cdot g = 4.000.000\,m\,s^{-2}$

Für die Radialbeschleunigung gilt: $a_r = \dfrac{v_B^2}{r}$,

Bahngeschwindigkeit: $v_B = r \cdot \omega_1$

Es folgt: $a_r = \dfrac{r^2 \cdot \omega_1^2}{r} = r \cdot \omega_1^2$

Maximale Winkelgeschwindigkeit: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{a_r}{r}} = \sqrt{\dfrac{4.000.000\,ms^{-2}}{0,1m}} = 6324,55\,s^{-1}$

Maximale Drehzahl: $n_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 1006,58\,s^{-1} = 60395\,\text{min}^{-1}$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}$

Ergebnis Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dfrac{(6324,55 - 2094,40)\,s^{-1}}{30\,s} = 141,0\,s^{-2}$

1b. Bahngeschwindigkeit: $v_B = r \cdot \omega_1 = 0,1m \cdot 6324,55s^{-1} = 632,455\,ms^{-1}$

1c. Zahl der Umdrehungen: $N_{ges} = \dfrac{\varphi_{\max}}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \left(\omega_0 \cdot \Delta t + \dfrac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2\right)$

$$N_{ges} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(2094,40\,s^{-1} \cdot 30\,s + \frac{1}{2} \cdot 141,0\,s^{-2} \cdot (30\,s)^2\right)$$

Zahl der Umdrehungen: $N_{ges} = 20098$

2a. Wegen der größeren Steilheit der schiefen Ebene am Hohlzylinder bewegt sich das verbundene System der beiden Zylinder nach rechts. Auf den Hohlzylinder wirkt die Tangentialkomponente der Gewichtskraft $F_{t,HZ}$ als beschleunigende Kraft in positive Richtung (nach rechts) und die Rollreibungskraft $F_{RR,HZ}$, die Seilkraft $F_{S,HZ}$ und die Trägheitskraft $F_{Tr,HZ}$ in negative Richtung (nach links).

Tangentialkraft Hohlzylinder: $F_{t,HZ} = m_{HZ} \cdot g \cdot \sin\beta$

Rollreibungskraft: $F_{RR,HZ} = \mu_{RR} \cdot m_{HZ} \cdot g \cdot \cos\beta$

Seilkraft Hohlzylinder: $F_{S,HZ}$

Trägheitskraft: $F_{Tr,HZ} = m_{HZ} \cdot a$

Da der Körper rollt, wirkt an der Kontaktstelle von Hohlzylinder und schiefer Ebene die Haftreibungskraft $F_{H,HZ}$, die ein Drehmoment M_{HZ} erzeugt:

$$M_{HZ} = F_{H,HZ} \cdot r$$

D'Alembertsches Prinzip für die Rotation des Hohlzylinders:

$$\sum_i \vec{M}_i - J_{HZ}\vec{\alpha} = 0$$

Massenträgheitsmoment: $J_{HZ} = m_{HZ} \cdot r^2$

Es folgt: $F_{H,HZ} \cdot r - m_{HZ} \cdot r^2 \cdot \alpha = 0$

Rollbedingung: $\alpha = \frac{a}{r}$

Es folgt: $F_{H,HZ} = m_{HZ} \cdot a$

D'Alembertsches Prinzip für die Translation des Hohlzylinders:

$$\sum_i \vec{F}_i - m_{HZ}\vec{a} = 0$$

Es folgt: $\left(F_{t,HZ} - F_{H,HZ} - F_{RR,HZ} - F_{S,HZ}\right) - m_{HZ}\, a = 0$

$$\left(m_{HZ} \cdot g \cdot \sin\beta - m_{HZ}a - \mu_{RR} \cdot m_{HZ} \cdot g \cdot \cos\beta - F_{S,HZ}\right) - m_{HZ} \cdot a = 0 \qquad (1)$$

Die Betrachtung für den Vollzylinder ist ähnlich, hier ist jedoch nur die Seilkraft $F_{S,VZ}$ positiv, währen alle anderen Kräfte ($F_{t,VZ}$, $F_{RR,VZ}$, $F_{Tr,VZ}$ und $F_{H,VZ}$) negativ sind.

Tangentialkraft Hohlzylinder: $F_{t,VZ} = m_{VZ} \cdot g \cdot \sin\beta$

Rollreibungskraft: $F_{RR,VZ} = \mu_{RR} \cdot m_{VZ} \cdot g \cdot cos\,\beta$

Seilkraft Hohlzylinder: $F_{S,VZ}$

Trägheitskraft: $F_{Tr,VZ} = m_{VZ} \cdot a$

Da der Körper rollt, wirkt an der Kontaktstelle von Hohlzylinder und schiefer Ebene die Haftreibungskraft $F_{H,VZ}$, die ein Drehmoment M_{VZ} erzeugt:

$$M_{VZ} = F_{H,VZ} \cdot r$$

D'Alembertsches Prinzip für die Rotation des Vollzylinders:

$$\sum_i \vec{M}_i - J_{VZ}\vec{\alpha} = 0$$

Massenträgheitsmoment: $J_{VZ} = \frac{1}{2} m_{VZ} \cdot r^2$

Es folgt: $F_{H,VZ} \cdot r - \frac{1}{2} m_{VZ} \cdot r^2 \cdot \alpha = 0$

Rollbedingung: $\alpha = \frac{a}{r}$

Es folgt: $F_{H,VZ} = \frac{1}{2} m_{VZ} \cdot a$

D'Alembertsches Prinzip für die Translation des Vollzylinders:

$$\sum_i \vec{F}_i - m_{VZ}\vec{a} = 0$$

Es folgt: $\left(F_{S,VZ} - F_{H,VZ} - F_{RR,VZ} - F_{t,HZ}\right) - m_{VZ}\, a = 0$

$$\left(F_{S,VZ} - \frac{1}{2} m_{VZ}a - \mu_{RR} \cdot m_{VZ} \cdot g \cdot \cos\alpha - m_{VZ} \cdot g \cdot \sin\alpha\right) - m_{VZ} \cdot a = 0 \qquad (2)$$

Die Seilkräfte $F_{S,VZ}$ und $F_{S,HZ}$ sind entgegen gesetzt gerichtet und ihr Beträge sind <u>nicht</u> gleich. Vielmehr erzeugt die Differenz der beiden Kräfte ein Drehmoment M_R zur Beschleunigung der Umlenkrolle erzeugt.

Drehmoment: $M_R = \left(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}\right) \cdot R$

Radius der Umlenkrolle: R

D'Alembertsches Prinzip für die Rotation der Umlenkrolle m_R

$$\sum_i \vec{M}_i - J_R \vec{\alpha} = 0$$

Massenträgheitsmoment der Umlenkrolle:

$$J_R = \frac{1}{2} m_R R^2$$

Rollbedingung: $a = R \cdot \alpha$

Es folgt: $\left(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}\right) \cdot R - \frac{1}{2} m_R R^2 \frac{a}{R} = 0$

$$\left(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}\right) = \frac{1}{2} m_R\ a \qquad (3)$$

Addiere Gleichung (2) und Gleichung (1). Es folgt:

$$m_{HZ}\ g \sin\beta - m_{HZ} a - \mu_{RR}\ m_{HZ}\ g \cos\beta - F_{S,HZ} - m_{HZ}\ a + F_{S,VZ}$$
$$-\frac{1}{2} m_{VZ} a - \mu_{RR}\ m_{VZ}\ g \cos\alpha - m_{VZ}\ g \sin\alpha - m_{VZ}\ a = 0$$

Es folgt weiter:

$$m_{HZ}\ g \sin\beta - m_{HZ} a - \mu_{RR}\ m_{HZ}\ g \cos\beta - \left(F_{S,HZ} - F_{S,VZ}\right) - m_{HZ}\ a$$
$$-\frac{1}{2} m_{VZ} a - \mu_{RR}\ m_{VZ}\ g \cos\alpha - m_{VZ}\ g \sin\alpha - m_{VZ}\ a = 0$$

Einsetzen von Gl. (3):

$$m_{HZ}\ g \sin\beta - m_{HZ} a - \mu_{RR}\ m_{HZ}\ g \cos\beta - \frac{1}{2} m_R\ a - m_{HZ}\ a$$
$$-\frac{1}{2} m_{VZ} a - \mu_{RR}\ m_{VZ}\ g \cos\alpha - m_{VZ}\ g \sin\alpha - m_{VZ}\ a = 0$$

Umformung:

$$g\left(\left(m_{HZ} \sin\beta - m_{VZ} \sin\alpha\right) - \mu_{RR}\left(m_{HZ} \cos\beta + m_{VZ} \cos\alpha\right)\right) - \left(\frac{1}{2} m_R + 2\,m_{HZ} + \frac{3}{2} m_{VZ}\right) a = 0$$

Lösung: $$a = \frac{\left(m_{HZ} \sin\beta - m_{VZ} \sin\alpha\right) - \mu_{RR}\left(m_{HZ} \cos\beta + m_{VZ} \cos\alpha\right)}{\frac{1}{2} m_R + 2\,m_{HZ} + \frac{3}{2} m_{VZ}}\, g$$

Einsetzen: $$a = \frac{\left(\sin 40° - \sin 30°\right) - 0{,}05 \cdot \left(\cos 40° + \cos 30°\right)}{0{,}1 + 2 + 1{,}5} \cdot 10\,ms^{-2}$$

Ergebnis: $a = 0{,}17\,ms^{-2}$

2b. Wenn die Beschleunigung gleich Null ist, bewegen sich die beiden Zylinder nicht:

Für $a = 0$ folgt: $$0 = \frac{\left(m_{HZ} \sin\beta - m_{VZ} \sin\alpha\right) - \mu_{RR}\left(m_{HZ} \cos\beta + m_{VZ} \cos\alpha\right)}{\frac{1}{2} m_R + 2\,m_{HZ} + \frac{3}{2} m_{VZ}}\, g$$

Es folgt: $0=\left(m_{HZ}\sin\beta-m_{VZ}\sin\alpha\right)-\mu_{RR}\left(m_{HZ}\cos\beta+m_{VZ}\cos\alpha\right)$

$$\left(m_{HZ}\sin\beta-\mu_{RR}m_{HZ}\cos\beta\right)=m_{VZ}\sin\alpha+\mu_{RR}m_{VZ}\cos\alpha$$

$$\sin\beta-\mu_{RR}\cos\beta=\frac{m_{VZ}}{m_{HZ}}\sin\alpha+\mu_{RR}\cos\alpha$$

Einsetzen: $\sin\beta-0,05\cdot\cos\beta=\sin 30°+0,05\cdot\cos 30°=0,5433$

$$\sin\beta-0,05\cdot\cos\beta=0,5433$$

Näherungslösung: $\beta\approx 36°$

2c. Berechnung der Seilkräfte:

Nach Gl. (1) aus **2a.** gilt: $\left(m_{HZ}\,g\sin\beta-m_{HZ}a-\mu_{RR}\,m_{HZ}\,g\cos\beta-F_{S,HZ}\right)-m_{HZ}\,a=0$

Es folgt für $F_{S,HZ}$: $F_{S,HZ}=m_{HZ}\,g\sin\beta-m_{HZ}a-\mu_{RR}\,m_{HZ}\,g\cos\beta-m_{HZ}\,a$

Ergebnis für $F_{S,HZ}$: $F_{S,HZ}=m_{HZ}\left(\sin\beta-\mu_{RR}\cos\beta\right)g-2\,a\,m_{HZ}=5,7049N$

Nach Gl. (2) aus 2a. gilt: $\left(F_{S,VZ}-\frac{1}{2}m_{VZ}a-\mu_{RR}\,m_{VZ}\,g\,\cos\alpha-m_{VZ}\,g\sin\alpha\right)-m_{VZ}\,a=0$

Ergebnis für $F_{S,VZ}$: $F_{S,VZ}=m_{VZ}\left(\mu_{RR}\cos\alpha+\sin\alpha\right)g+\frac{3}{2}a\,m_{VZ}=5,6879N$

3a. Höhe des Startpunktes: $h_S=s_1\cdot sin\left(20°\right)=0{,}342\,m$

Energieerhaltungssatz für die Position am Ende der schiefen Ebene:

$$E_{pot}=E_{kin,trans}+E_{kin,rot}+W_{R,s_1}$$

$$m\,g\,h_S=\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}J\,\omega^2+\mu_{RR}\,m\,g\,cos\left(\alpha\right)\cdot s_1$$

wobei v die Geschwindigkeit der Kugel am Ende der schiefen Ebene bezeichnet.

Energieerhaltungssatz am Ende der ebenen Fläche:

$$E_{kin,trans}+E_{kin,rot}=W_{R,s_2}$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}J\,\omega^2=\mu_{RR}\,m\,g\cdot s_2$$

Energieerhaltungssatz für die gesamte Bewegung:

$$m\,g\,h_S=\mu_{RR}\,m\,g\cdot\cos(\alpha)s_1+\mu_{RR}\,m\,g\,s_2$$

Lösung für μ_{RR}: $\mu_{RR}=\dfrac{m\,g\,h_S}{m\,g\cdot\cos(\alpha)s_1+m\,g\,s_2}$

Ergebnis: $\mu_{RR}=\dfrac{h_S}{\cos(20°)s_1+s_2}=\dfrac{0{,}342\,m}{0{,}9396\cdot 1m+5{,}5\,m}=0{,}0531$

3b. Gesucht ist die Drehzahl der Kugel am Ende der schiefen Ebene:

Es gilt (siehe oben): $m\,g\,h_S=\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}J\,\omega^2+\mu_{RR}\,m\,g\,cos\left(\alpha\right)\cdot s_1$

Massenträgheitsmoment der Kugel: $J=\frac{2}{5}m\,r^2$

Rollbedingung: $v=r\cdot\omega$

Es folgt: $\frac{1}{2} J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5} m\,r^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{5} m\,v^2$

Einsetzen: $m\,g\,h_S = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{5} m\,v^2 + \mu_{RR}\,m\,g\,cos(\alpha)\cdot s_1$

$$g\,h_S = \frac{7}{10} v^2 + \mu_{RR}\,g\,cos(\alpha)\cdot s_1$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g\left(h_S + \mu_{RR}\,cos(\alpha)\cdot s_1\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} 10\,m\,s^{-2}\left(0{,}342m + 0{,}0531\cdot 0{,}93696\cdot 1m\right)}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunktes: $v = 2{,}04\,m\,s^{-1}$

Ergebnis Drehzahl: $n = \frac{v}{2\pi\cdot r} = \frac{2{,}04\,m\,s^{-1}}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-2}\,m} = 32{,}5\,s^{-1}$

4a. Drehmoment an der Holzscheibe: $M_S = F_{ges}\cdot\frac{d}{2}$

mit $F_{ges} = 3\cdot F_K$

wobei F_K die Kraft bezeichnet, die jedes Kind aufwenden muss.
Maximale Winkelgeschwindigkeit nach der Beschleunigung:

$$\omega_{max} = 2\,\pi\cdot n_{max} = 2\pi\cdot 12\frac{1}{60\,s} = 1{,}2566\,s^{-1}$$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{max} - 0}{t_{max} - 0} = \frac{1{,}2566 s^{-1}}{15\,s} = 0{,}08377\,s^{-2}$

D'Alembertsches Prinzip: $\sum_i \vec{M}_i - J\cdot\vec{\alpha} = 0$

Es folgt: $M_S = F_{ges}\cdot r = 3F_K\cdot r = \frac{1}{2}\left(\rho\cdot\pi\frac{d^2}{4} b\right)\cdot\left(\frac{d^2}{4}\right)\cdot\alpha = J\cdot\alpha$

$$F_K = \frac{1}{6}\left(\rho\cdot\pi\frac{d^2}{4} b\right)\cdot\left(\frac{d}{2}\right)\cdot\frac{\omega_{max}}{t_{max}}$$

$$F_K = \frac{\rho\cdot\pi\cdot d^3\cdot b\cdot 2\pi\cdot n_{max}}{6\cdot 4\cdot 2\cdot t_{max}}$$

Ergebnis: $F_K = \frac{0{,}5\cdot 10^{-3} kg\cdot\pi\cdot 2{,}4^3 m^3\cdot 0{,}2\,m\cdot 2\pi\cdot\frac{12}{60\,s}}{48\cdot 15\,s\cdot 10^{-6} m^3} = 7{,}58\,N$

4b. Nachdem das Kind auf die Holzscheibe gesprungen ist, besitzt das System aus Holzscheibe plus Kind eine anderes Massenträgheitsmoment. Der Drehimpulserhaltungssatz besagt, dass der Drehimpuls erhalten bleiben muss.
Es gilt: $L_{vorher} = L_{nachher}$

$$J\cdot\omega_{max} = J'\cdot\omega'$$

Das Massenträgheitsmoment der Drehscheibe beträgt:

$$J = \frac{1}{2}\cdot\left(\rho\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot b\right)\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\rho\cdot\pi\cdot d^4\cdot b}{2\cdot 4\cdot 4}$$

$$J = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot \pi \cdot 2{,}4^4\,m^4 \cdot 0{,}2\,m}{10^{-6}\,m^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} = 325{,}7\,kg\,m^2$$

Nach dem Aufspringen des Kindes beträgt die neue Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega' = \frac{J}{J'}\,\omega_{max}$$

Wobei für J' gilt: $J' = J + m \cdot R^2 = J + 20\,kg \cdot 1^2\,m^2$

Neue Winkelgeschwindigkeit: $\omega' = \frac{J}{J + m \cdot R^2}\,\omega_{max}$

Neue Drehzahl $n' = \frac{J}{J + m \cdot R^2}\,n_{max} = \frac{325{,}7}{325{,}7 + 20} 12 \frac{1}{60\,s} = 11{,}30\,min^{-1}$

4c. Da das Kind in radialer Richtung abspringt, wirken ausschließlich radiale Kräfte auf die Holzscheibe. Radiale Kräfte können kein Drehmoment erzeugen, deshalb ist die Änderung der Winkelgeschwindigkeit (Drehzahl) Null. Das Kind nimmt folglich einen Teil des Drehimpulses mit und muss deshalb bei der Landung aufpassen, das es nicht seitlich umfällt.