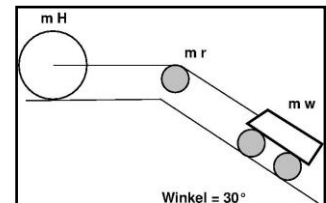


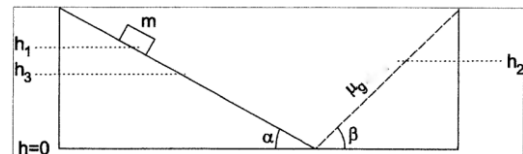
**1. Kinematik:** Ein Motorrad fährt aus dem Stillstand heraus gleichmäßig beschleunigt auf einer kreisförmigen Teststrecke. Am Ende der ersten Runde beträgt die Schräglage des Motorrads  $45^\circ$  (entspricht dem Winkel zwischen der Hochachse des Motorradfahrers und der Horizontalen, der bei einer stabilen Zweiradfahrt erforderlich ist). Wie groß ist die Bahnbeschleunigung, wie groß ist die Radialbeschleunigung und wie groß ist die Gesamtbeschleunigung nach einmaligem Umrunden der Kreisstrecke? (gefordert sind: Herleitung und Bestimmung der Zahlenwerte der Beschleunigungen). 27

**2. Dynamik:** Ein Wagen auf vier Rädern mit der Gesamtmasse (inklusive der Räder) von  $m_w = 10\text{ kg}$  beginnt zum Zeitpunkt  $t = 0\text{ s}$  eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  herunter zu rollen. Die Räder des Wagens (Vollzylinder) wiegen je  $m_R = 1,5\text{ kg}$  und haben einen Durchmesser von  $0,2\text{ m}$ . Der Wagen ist über ein Seil und über eine Umlenkrolle (Vollzylinder) der Masse  $m_r = 1\text{ kg}$  und einem Durchmesser von  $0,2\text{ m}$  mit einem Hohlzylinder der Masse  $m_H = 10\text{ kg}$  und Radius  $r = 0,5\text{ m}$  verbunden (siehe Skizze). Der Hohlzylinder rollt dadurch auf der waagerechten Ebene, wobei der Rollreibungskoeffizient sowohl für Hohlzylinder als auch für Wagenräder  $\mu_R = 0,05$  beträgt.



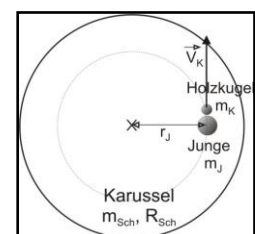
- Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems? 12
- Wie groß sind die Seilkräfte in diesem System? 8
- Wie viele Umdrehungen machte der Hohlzylinder in den ersten  $15\text{ s}$ ? 8

**3. Erhaltungssätze:** Ein Körper der Masse  $m = 1\text{ kg}$  gleitet auf zwei schiefen Ebenen auf und ab. Die linke Ebene ist reibungsfrei und um den Winkel  $\alpha = 30^\circ$  gegen die Horizontale geneigt, die rechte Ebene ist um den Winkel  $\beta$  gegen die Horizontale geneigt und besitzt den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G = 0,5$ . Energieverluste und Sprünge am Knick werden vernachlässigt.



- Der Körper wird auf der linken Ebene am Punkt  $h_1$  losgelassen. Bestimmen Sie allgemein die Höhe  $h_2$  auf der rechten Ebene, die der Körper nach einmaligem Hinab- und Hinaufgleiten maximal erreicht. Welche Höhe  $h_3$  auf der linken Ebene erreicht der Körper nach nochmaligem Hinab- und Hinaufgleiten? 10
- Berechnen Sie  $h_2$  und  $h_3$  für  $\beta = 60^\circ$  und  $h_1 = 30\text{ cm}$ . 5
- Wie müsste der Winkel  $\beta$  gewählt werden, damit der Körper nach dem Abgleiten von der rechten Ebene im Knick zur Ruhe kommt? 10

**4. Dynamik der Drehbewegungen, Drehimpulserhaltung:** Ein Junge (Masse  $m_J = 40\text{ kg}$ ) sitzt mit einer Holzkugel (Masse  $m_K = 2\text{ kg}$ ) auf einem Karussell in Form einer Scheibe (Masse  $m_{Sch} = 100\text{ kg}$ , Radius  $R_{Sch} = 1,5\text{ m}$ ) in einem Abstand  $r_J = 1,3\text{ m}$  von der Drehachse. Junge und Kugel können als Massenpunkte, das Karussell als Vollzylinder behandelt werden. Das Karussell steht zunächst still.



- Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich das Karussell mit Junge (ohne Holzkugel), wenn der Junge die Kugel mit der Geschwindigkeit  $v_K = 10\text{ m s}^{-1}$  tangential einem anderen Kind zuwirft? 15
- Wie viele Umdrehungen  $N$  führt das Karussell anschließend mit dem sitzenden Jungen bis zum Stillstand aus, wenn in der Drehachse ein Reibungsdrehmoment von  $-0,2\text{ Nm}$  wirkt? 15

**Verwenden Sie zur Vereinfachung  $g = 10\text{ m s}^{-2}$ .**

## Lösungen:

Bei einer Schräglage von  $45^\circ$  ist die nach außen gerichtete, horizontale Zentrifugalbeschleunigung  $a_{ZF} = -a_{ZP} = -\frac{v_B^2}{R}$  betragsmäßig gleich der vertikal nach unten gerichteten Erdbeschleunigung  $g$  ist. Es gilt für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{ZP} = \frac{v_B^2}{R}$$

Es folgt:

$$R = \frac{v_B^2}{g} \quad (1)$$

Bezeichnungen:  $v_B =$  Bahngeschwindigkeit,  $R =$  Radius der Kreisbahn

Da die Bewegung entlang der Kreisbahn gleichmäßig beschleunigt sein soll, gilt für die Geschwindigkeit am Ende der ersten Runde:

$$v_B = a_B \cdot \Delta t_1$$

wobei  $a_B$  die konstante Bahnbeschleunigung und  $\Delta t_1$  die Zeit für die erste Runde und bezeichnet.

Es folgt aus Gl. (1):

$$R = \frac{a_B^2 \cdot (\Delta t_1)^2}{g} \quad (2)$$

Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, gilt für die Wegfunktion:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_B t^2 :$$

Bei der ersten Runde beträgt der zurückgelegte Weg:

$$U = 2\pi \cdot R$$

Wobei  $U$  der Umfang der Kreisbahn ist, für den gilt:

$$U = 2\pi R = \frac{1}{2} a_B (\Delta t_1)^2$$

Für den Radius der Kreisbahn ergibt sich:

$$R = \frac{1}{4\pi} a_B (\Delta t_1)^2 \quad (3)$$

Aus Gl. (2) und Gl. (3) folgt:

$$\frac{1}{4\pi} a_B (\Delta t_1)^2 = \frac{a_B^2 \cdot (\Delta t_1)^2}{g}$$

Es folgt:

$$a_B = \frac{g}{4\pi}$$

Ergebnis Bahnbeschleunigung:

$$a_B = g \cdot 0,079577 = 0,7957 \text{ m s}^{-2}$$

(18 Punkte)

Laut Aufgabenstellung soll die Schräglage des Motorrades am Ende der ersten Runde  $45^\circ$  betragen. Die Zentripetalbeschleunigung (= Radialbeschleunigung) ist demnach gleich  $g$ , die Zentrifugalbeschleunigung gleich  $-g$ .

Ergebnis Radialbeschleunigung:  $a_R = g = 10 \text{ m s}^{-2}$  (4 Punkte)

Da Radialbeschleunigung und Bahnbeschleunigung senkrecht zueinander sind, gilt für die Gesamtbeschleunigung:

Gesamtbeschleunigung:

$$a_{ges} = \sqrt{a_R^2 + a_B^2} = \sqrt{g^2 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}}$$

$$a_{ges} = g \sqrt{1 + \frac{1}{(4\pi)^2}} = \frac{g}{4\pi} \cdot \sqrt{1 + (4\pi)^2} = 1,0032 \cdot g$$

$a_{ges} = 10,032 \text{ m s}^{-2}$  (5 Punkte)

- 2a. Wenn man berücksichtigt, dass die antreibende Hangabtriebskraft, welche auf den Wagen auf der schiefen Ebene wirkt, durch die Rollreibung, durch die Trägheit der vier Räder und durch die Seilkraft gemindert wird so ergibt sich die Bewegungsgleichung für den Wagen:

$$0 = \sum_i \vec{F}_i = m_W g \cdot \sin \alpha - F_{s2} - \mu_R m_W g \cdot \cos \alpha - m_W a - 4 \cdot \left( \frac{1}{2} m_R a \right)$$

Eine analoge Gleichung ergibt sich für den Hohlzylinder:

$$0 = F_{s1} - \mu_R m_H g - m_H a - m_H a$$

Der Beitrag der Umlenkrolle beträgt:

$$0 = F_{s2} - F_{s1} - \frac{1}{2} m_r a$$

Für die Gesamtgleichung ergibt sich dann:

$$2m_H a + m_W a + 2m_R a + \frac{1}{2} m_r a = g \cdot (m_W \cdot \sin \alpha - \mu_R (m_W \cos \alpha + m_H))$$

Lösung für die Beschleunigung:

$$a = g \cdot \frac{(m_W \cdot \sin \alpha - \mu_R (m_W \cos \alpha + m_H))}{2m_H + m_W + 2m_R + \frac{1}{2} m_r}$$

$$a = 10 \text{ m s}^{-2} \frac{10 \sin 30^\circ - 0,05(10 \cos 30^\circ + 10)}{20 + 10 + 3 + 0,5}$$

mit  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  folgt:  $a = 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,1214 = 1,214 \text{ m s}^{-2}$

mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  folgt:  $a = 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,1214 = 1,19 \text{ m s}^{-2}$  (12 Punkte)

- 1b. Die Seilkräfte ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen der einzelnen Systeme:

Mit  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  folgt:

$$F_{s1} = \mu_R m_H g + m_H a + m_H a = 0,05 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} + 2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 1,214 \text{ m s}^{-2} = 29,28 \text{ N}$$

Mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  folgt:

$$F_{S1} = \mu_R m_H g + m_H a + m_H a = 0,05 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} + 2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 1,19 \text{ m s}^{-2} = 28,7 \text{ N}$$

Mit  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  folgt:

$$F_{S2} = F_{S1} + \frac{1}{2} m_r a = 29,28 \text{ N} + 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1,214 \text{ m s}^{-2} = 29,887 \text{ N}$$

Mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  folgt:

$$F_{S2} = F_{S1} + \frac{1}{2} m_r a = 28,7 \text{ N} + 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1,19 \text{ m s}^{-2} = 29,295 \text{ N}$$

(8 Punkte)

1c. Die beiden kinematischen Gleichungen für die Drehbewegung des Hohlzylinders lauten:

$$2\pi \cdot N_1 = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t_1$$

wobei  $\varphi_0 = 0$  und  $\omega_0 = 0$ , sowie  $\alpha = \frac{a}{R}$

Daraus ergibt sich für die Anzahl der Umdrehungen des Hohlzylinders:

mit  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  folgt: 
$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\pi} t^2 = \frac{a \cdot t^2}{4\pi \cdot R} = \frac{1,214 \text{ m s}^{-1} \cdot 15^2 \text{ s}^2}{4\pi \cdot 0,5 \text{ m}} = 43,5 \text{ Umdrehungen}$$

mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  folgt: 
$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\pi} t^2 = \frac{a \cdot t^2}{4\pi \cdot R} = \frac{1,19 \text{ m s}^{-1} \cdot 15^2 \text{ s}^2}{4\pi \cdot 0,5 \text{ m}} = 42,6 \text{ Umdrehungen}$$

(8 Punkte)

---

Alternativ könnte die Anzahl der Umdrehungen auch aus dem zurückgelegten Weg berechnet werden über die kinematischen Gleichungen für die gradlinige Bewegung des Wagens:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

wobei  $s_0 = 0$  und  $v_0 = 0$ .

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{1,19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 15^2 \text{ s}^2}{2}$$

Dann den Weg durch den Umfang des Kreises teilen:

mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  folgt: 
$$N_1 = \frac{s}{2\pi \cdot R} = 42,6 \text{ Umdrehungen}$$

(8 Punkte)

---

3a. Bestimmung der Höhe  $h_2$ :

Gesamtenergie bei Beginn in der Höhe  $h_1$ : potentielle Energie

$$E_{ges,1} = E_{pot,1} = m g h_1$$

Gesamtenergie auf der rechten Seite in Höhe  $h_2$ : potentielle Energie plus Reibungsarbeit

$$E_{ges,2} = E_{pot,2} + W_R = m g h_2 + F_G \cdot s_2$$

Gleitreibungskraft:

$$F_G = \mu_G \cdot F_n = \mu_G \cdot m g \cdot \cos \beta$$

Weg auf der rechten Seite:  $s_2 = \frac{h_2}{\sin \beta}$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt:

$$m g h_1 = m g h_2 + \mu_G F_n s_2 \quad (1)$$

$$m g h_1 = m g h_2 + \mu_G \cdot m g \cdot h_2 \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

Es folgt: 
$$h_1 = h_2 \left( 1 + \frac{\mu_G}{\tan \beta} \right)$$

Lösung für  $h_2$ :

$$h_2 = \frac{h_1}{1 + \frac{\mu_G}{\tan \beta}}$$

Berechnung von  $h_3$  auf der linken Seite:

Energieerhaltungssatz liefert für Rückweg von der rechten Seite zur linken Seite:

$$m g h_2 = m g h_3 + \mu_G F_n s_2 \quad (2)$$

Aus Gl. (1) folgt:

$$\mu_G F_n s_2 = m g h_1 - m g h_2 = m g (h_1 - h_2) \quad (3)$$

Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (2):  $m g h_2 = m g h_3 + m g (h_1 - h_2)$

Lösung für  $h_3$ :

$$h_3 = 2 \cdot h_2 - h_1 \quad (10 \text{ Punkte})$$

**3b.** Berechnung von  $h_2$  und  $h_3$  für  $\beta = 60^\circ$  und  $h_1 = 30 \text{ cm}$ :

Ergebnis für Höhe  $h_2$ : 
$$h_2 = \frac{0,3 \text{ m}}{1 + \frac{0,5}{\tan 60^\circ}} = 0,233 \text{ m}$$

Ergebnis für Höhe  $h_3$ : 
$$h_3 = 2 \cdot 0,233 \text{ m} - 0,3 \text{ m} = 0,166 \text{ m} \quad (5 \text{ Punkte})$$

**3c.** Die Bedingung, dass der Körper im Knick zur Ruhe kommt, lautet:

$$h_3 = 0$$

Es folgt:

$$0 = 2 \cdot h_2 - h_1$$

$$h_1 = 2 \cdot h_2 = \frac{2 \cdot h_1}{1 + \frac{\mu_G}{\tan \beta}}$$

Es folgt:

$$1 = \frac{2}{1 + \frac{\mu_G}{\tan \beta}}$$

$$\frac{\mu_G}{\tan \beta} = 1$$

Ergebnis für  $\beta$ :

$$\beta = \arctan(\mu_G) = 26,56^\circ \quad (10 \text{ Punkte})$$

+

**4a.** Zustand 1:

Alles ruht

Es folgt:

$$L_1 = 0$$

Zustand 2:

Kugel fliegt mit Geschwindigkeit  $v_K$  weg,

Scheibe mit dem Jungen dreht sich im Uhrzeigersinn mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

Es folgt:

$$L_2 = -L_K + (L_J + L_{Sch}) = -m_K r_J v_K + (m_J r_J^2 + J_{Sch}) \cdot \omega$$

mit:

$$L_K = m_K r_J v_K = 2 \text{ kg} \cdot 1,3 \text{ m} \cdot 10 \text{ ms}^{-1} = 26 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$L_J = m_J \cdot r_J^2 \cdot \omega = 40 \text{ kg} \cdot 1,3^2 \text{ m}^2 \cdot \omega = 67,6 \text{ kg m}^2 \cdot \omega$$

$$L_{Sch} = \frac{1}{2} m_{Sch} \cdot R_{Sch}^2 \cdot \omega = 0,5 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 1,5^2 \text{ m}^2 \cdot \omega = 112,5 \text{ kg m}^2 \cdot \omega$$

Drehimpulserhaltungssatz:

$$L_1 = L_2$$

Es folgt:

$$0 = -m_K r_J v_K + (m_J r_J^2 + J_{Sch}) \cdot \omega$$

Lösung für  $\omega$ :

$$\omega = \frac{m_K r_J v_K}{m_J r_J^2 + J_{Sch}} = \frac{26 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}{(67,6 + 112,5) \text{ kg m}^2} = 0,144 \text{ s}^{-1}$$

Drehzahl:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = 0,0230 \text{ s}^{-1}$$

(15 Punkte)

**4b.** Dynamische Grundgleichung der Drehbewegung:

$$M = J \cdot \alpha$$

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{-0,2 \text{ Nm}}{(67,6 + 112,5) \text{ kg m}^2} = -0,00111 \text{ s}^{-2}$$

Für die Zeit des Bremsvorgangs  $t_x$  gilt:

$$n(t_x) = n_0 + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t_x = 0$$

Es folgt:

$$t_x = \frac{-n_0}{\alpha} = \frac{-2\pi \cdot 0,0230 \text{ s}^{-1}}{-0,00111 \text{ s}^{-2}} = 130,19 \text{ s}$$

Zahl der Umdrehungen während des Abbremsvorgangs:

$$N = N(t_x) = n_0 \cdot t_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \cdot t_x^2$$

$$N = 0,0230 \text{ s}^{-1} \cdot 130,19 \text{ s} + \frac{-0,00111 \text{ s}^{-2}}{4\pi} \cdot 130,19^2 \text{ s}^2$$

Ergebnis:

$$N = N(t_x) = 2,9944 - 1,4972 = 1,497$$

(15 Punkte)