Fachhochschule Hannover — 18.01.05
Fachbereich Maschinenbau — Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 2004/05 — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

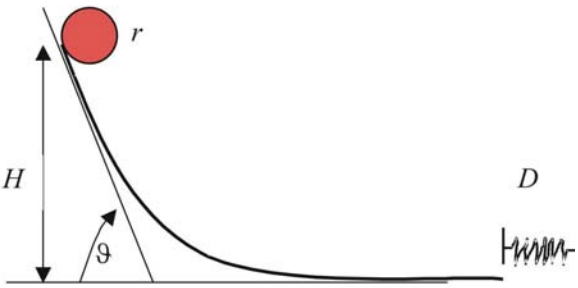
1. Ein PKW(1), der mit konstanter Geschwindigkeit von 72 kmh^{-1} fährt, wird von einem anderen PKW(2) mit 90 kmh^{-1} überholt. Im Moment des Überholens beschleunigt PKW(1), während PKW(2) mit konstanter Geschwindigkeit weiter fährt. Laut Herstellerangaben benötigt PKW(1) für die Geschwindigkeitserhöhung von 60 kmh^{-1} auf 100 kmh^{-1} eine Zeit von 8,5 s.

a. Zeichnen Sie ein *a-t-*, *v-t-* und *s-t*-Diagramm für beide Fahrzeuge. (10)
b. Berechnen Sie die Beschleunigung von PKW(1). (5)
c. Welche Zeit liegt zwischen den beiden Überholvorgängen? (10)
d. Nach welcher Wegstrecke wird PKW(2) vom PKW(1) überholt? (5)

2. Beim Schlag mit einem Hammer ($m_H = 8\ kg$) auf ein weiches Werkstück (Masse: $m_W = 2\ kg$), das auf einem Amboss (Masse: $m_A = 100\ kg$) liegt, kann nur ein Teil der kinetischen Energie des Hammers in Verformungsarbeit umgewandelt werden. Man betrachte den Schlag als vollkommen unelastisch.

a. Welcher Anteil der ursprünglichen kinetischen Energie des Hammers dient der Verformung des Werkstückes? (Hinweis: Berechnen Sie Q / E_{kin}^H) (15)

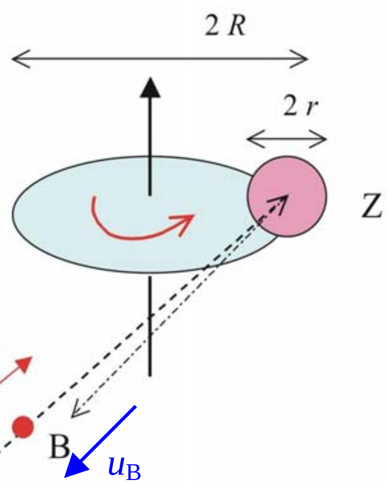
3. Ein Vollzylinder mit Masse $m = 1kg$ und Radius $r = 0{,}1m$ rollt (ohne zu gleiten) aus der Höhe $H = 1m$ eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel $\vartheta = 70°$ hinab. Am Ende der Bahn befindet sich eine Feder mit der Federkonstante $D = 215\,kN\,m^{-1}$. (Rollreibung soll vernachlässigt werden.)



a. Wie groß ist die Beschleunigung im Startpunkt? (15)
b. Welche Anfangsgeschwindigkeit müsste der Zylinder haben, um die Feder um den Weg $s = 0{,}01m$ zu spannen? (15)
c. Auf welche Höhe H' würde der Zylinder nach dem Entspannen der Feder zurückrollen? (10)

4. Ein Tennisball, der aus einer Fallhöhe von 100 inches (254 cm) auf harten Untergrund fällt, muss nach Regelement wieder auf eine Höhe von 53-58 inches steigen können.

a. Verwenden Sie den Mittelwert ~56 inches (entsprechend ~142 cm), um den relativen Energieverlust Q/E_0 und das Geschwindigkeitsverhältnis u_B/v_B zu berechnen? (10)
b. Der Ball(B) (Masse $m_B = 58\,g$) wird auf eine Zielscheibe (Z) (mit vernachlässigbarer Masse) geworfen, die senkrecht am äußeren Rand einer drehbaren horizontalen Scheibe (homogener Zylinder mit Masse $m_S = 5{,}8\,kg$ und Radius $R = 0{,}5\,m$) befestigt ist. Der Stoß soll als unelastisch, jedoch nicht als vollkommen unelastisch) betrachtet werden. Berechnen Sie erneut das Geschwindigkeitsverhältnis u_B/v_B . (20)



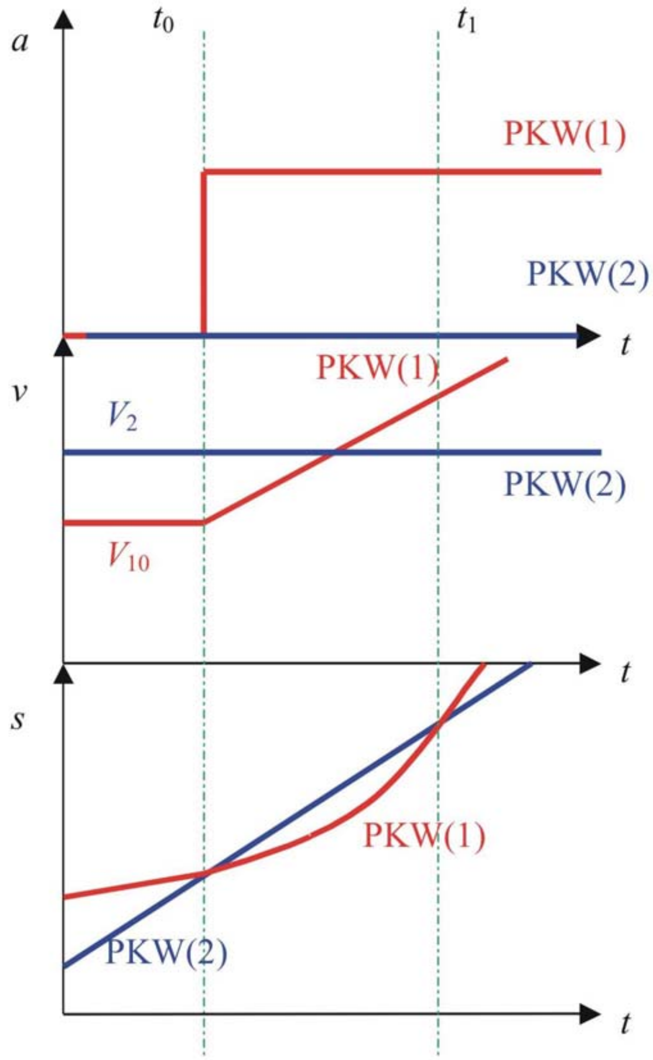
c. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Scheibe nach dem Wurf, wenn die Ballgeschwindigkeit $v_B = 144\,km\,h^{-1}$ beträgt? (15)

(Hinweise: Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt es sich, die dimensionslose Größe $\hat{J} = J/m_B R^2$ zu verwenden)

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. a-t-, v-t- und s-t-Diagramm.



Bei $t_0 = 0$ überholt PKW(2) PKW(1). PKW(1) beginnt zu beschleunigen. Beschleunigung von PKW(2) ist Null.

Bei $t_0 = 0$ beginnt die Geschwindigkeit von PKW(1) zu wachsen. Geschwindigkeit von PKW(2) bleibt konstant.

Für PKW(2) nimmt der Weg linear mit der Zeit zu. Für PKW(1) beginnt bei $t_0 = 0$ eine zusätzliche quadratische Zunahme. Bei t_1 hat PKW(1) den PKW(2) dann wieder eingeholt.

1b. Beschleunigung von PKW(1): $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(100-60)10^3\,m}{8{,}5\,s \cdot 3600\,s} = 1{,}31\frac{m}{s^2}$

1c. Für PKW(1) gilt: $s_1(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_{10}\,t$

Für PKW(2) gilt: $s_2(t) = v_2\,t$

Beim Überholen gilt: $s_1(t_{0/1}) = s_2(t_{0/1})$

$$\frac{1}{2}a\,t_{0/1}^2 + v_{10}\,t_{0/1} = v_2\,t_{0/1}$$

$$\frac{1}{2}a\,t_{0/1}^2 = t_{0/1}(v_2 - v_{10})$$

Lösung 0 (Triviallösung): $t_0 = 0\,s$

Lösung 1: $t_1 = \frac{2(v_2 - v_1)}{a} = \frac{2(90-72)m\,s^{-1}}{1{,}307\,m\,s^{-2}\;3{,}6} = 7{,}65\,s$

Ergebnis $\Delta t = t_1 - t_0 = 7{,}65\,s$

1d. Für PKW(1): $s_1(\Delta t) = \frac{1}{2}a\,t_1^2 + v_{10}\,t_1 = 191{,}3\,m$

für PKW(2) (nur Kontrolle): $s_2(\Delta t) = v_2\,t_1 = \frac{90}{3{,}6}7{,}65\,m = 191{,}3\,m$

2a. Impulserhaltungssatz (1): $m_H\, v_1 = (m_H + m_W + m_A)\, u$

Energieerhaltungssatz (2): $E_{kin}^H = \frac{1}{2} m_H\, v_1^2 = \frac{1}{2}(m_H + m_W + m_A)\, u^2 + Q$

Setze *u* aus (1) in (2) ein: $E_{kin}^H = \frac{1}{2} m_H\, v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{m_H + m_W + m_A} v_1^2 + Q$

Auflösen nach Q: $Q = \frac{1}{2} m_H\, v_1^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{m_H + m_W + m_A} v_1^2$

$Q = E_{kin}^H \cdot \left(1 - \frac{m_H}{m_H + m_W + m_A}\right)$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{kin}^H} = 1 - \frac{m_H}{m_H + m_W + m_A} = 1 - \frac{8}{8+2+100} = 92{,}7\%$

3a. Zerlege die Gewichtskraft in Tangential- und Normalkomponente: Die Tangentialkomponente $F_t = F_g \cdot \sin\vartheta = m\,g\,\sin\vartheta$ erzeugt sowohl die Beschleunigung *a* für die Translation des Schwerpunktes als auch ein Drehmoment *M*, das den Zylinder rotieren lässt.

Drehmoment: $M = F_r \cdot r$

Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft teilt sich auf in die Kraft F_a, die den Schwerpunkte beschleunigt, und die Kraft F_r, die das Drehmoment erzeugt.

Es gilt: $F_t = F_a + F_r$

Grundgleichung Translation(1): $F_a = m\,a = F_t - F_r = F_t - \frac{M}{r}$

Rollbedingungen: $s = r\,\varphi$, $v = r\,\omega$ und $a = r\,\alpha$

Grundgleichung Rotation: $M = J\,\alpha = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{a}{r}$

Es folgt (2): $\frac{M}{r} = \frac{1}{2} m \cdot a$

Setze Gl. (2) in Gl. (1): $F_t = m\,a + \frac{1}{2} m\,a = \frac{3}{2} m\,a = m\,g \sin\vartheta$

Lösung für *a*: $a = \frac{2}{3} g \sin\vartheta = 6{,}66 \cdot 0{,}9396\, m\,s^{-1} = 6{,}26\, m\,s^{-1}$

3b. Spannarbeit der Feder: $E_{el} = \frac{1}{2} D\, s^2$

Pot. Energie im Ausgangszustand: $E_{pot} = m\,g\,H$

Kin. Energie im Ausgangszustand: $E_{kin} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2$

Rollbedingung: $v_0 = r\,\omega_0$

Es folgt: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3}{4} m v_0^2$

Energieerhaltungssatz: $E_{kin} + E_{pot} = E_{el}$

$\frac{3}{4} m v_0^2 + m\,g\,H = \frac{1}{2} D\, s^2$

Lösung: $v_0 = \sqrt{\frac{2\,D\,s^2}{3m} - \frac{4}{3} g\,H} = 1\, m\,s^{-1}$

3c. Nach dem Entspannen der Feder wird die gespeicherte Energie zunächst in kinetische und dann komplett in potentielle Energie umgewandelt.

Energieerhaltungssatz: $E_{kin} + E_{pot} = E_{el} = m\,g\,H'$

$$m\,g\,H' = \frac{3}{4} m\,v_0^2 + m\,g\,H$$

Lösung: $H' = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g} + H = \frac{3}{40}m + 1m = 1{,}075\,m$

4a. Das Reglement für Tennisbälle verlangt, dass ein bestimmter Teil der kinetischen Energie $E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m\,v_B^2$, die der potentiellen Energie E_{pot}^0 der Ausgangshöhe von 254 cm entspricht, nach einem Aufprall auf hartem Untergrund zum Teil wieder in kinetische Energie $E_{kin}^1 = \frac{1}{2} m\,u_B^2$ verwandelt werden muss, und zwar soviel, dass diese der potentiellen Energie E_{pot}^1 der Höhe von ~142 cm entspricht. Der Rest wird in Reibung- und Wärmeenergie Q umgesetzt. Der Quotient $RE = \frac{Q}{E_{pot}^0}$ bezeichnet den relativen Energieverlust des Stoßvorgangs.

Energieerhaltungssatz: $E_{pot}^0 = E_{pot}^1 + Q$

Lösung für RE: $RE = \frac{Q}{E_{pot}^0} = \frac{E_{pot}^0 - E_{pot}^1}{E_{pot}^0} = \frac{254-142}{254} = 0{,}44$

Für die kinetische Energie vor und nach dem Bodenkontakt gilt entsprechend:

Energieerhaltungssatz: $E_{kin}^0 = E_{kin}^1 + Q = E_{kin}^1 + RE \cdot E_{kin}^0$

Es folgt: $E_{kin}^0 \cdot (1 - RE) = E_{kin}^1$

Lösung für $\frac{u_B}{v_B}$: $\frac{u_B}{v_B} = \sqrt{1-RE} = 0{,}7483$

4b. Es handelt sich um einen unelastischen, aber <u>nicht</u> um einen <u>vollkommen unelastischen</u> Stoß.

Drehimpulserhaltungssatz: $m_B\,v_B\,R = J\,\omega + m_B\,u_B\,R$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_B\,v_B^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\,u_B^2 + Q$

Man kann den Wert für Q (näherungsweise) mit Hilfe von RE aus 4a abschätzen:

$$Q \cong RE \cdot E_{kin}^B = RE \cdot \left(\frac{1}{2} m_B v_B^2\right)$$

Es folgt: $\frac{1}{2} m_B\,v_B^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\,u_B^2 + RE \cdot \left(\frac{1}{2} m_B\,v_B^2\right)$

Durch Umstellung erhält man: $\frac{1}{2} m_B\,v_B^2 \cdot (1 - RE) = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\,u_B^2$

oder: $(1 - RE) \cdot v_B^2 = \frac{J}{m_B\,R^2} (R\omega)^2 + u_B^2$

Zur Vereinfachung verwende man: $\widehat{J} = \frac{J}{m_B R^2} = \frac{\frac{1}{2} m_S\,R^2}{m_B\,R^2} = \frac{0{,}5 \cdot 5800}{58} = 50$

$R\,\omega = u_R$ entspricht der Bahngeschwindigkeit, den ein Punkt am Rand der Drehscheibe nach dem Wurf hat.

Verwendet man zur Abkürzung $\widehat{J}$ und u_R, so folgt aus dem

Energieerhaltungssatz: $(1-RE)\cdot v_B^2 = \hat{J}\cdot u_R^2 + u_B^2$ (1)

aus dem Impulserhaltungssatz: $v_B = \hat{J}\, u_R + u_B$ (2)

Aus Gl (2) erhält man: $u_R = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B)$

Dies eingesetzt in Gl (1) ergibt: $(1-RE)\cdot v_B^2 = \frac{1}{\hat{J}}\cdot(v_B - u_B)^2 + u_B^2$

Es folgt:

$$\hat{J}\cdot(1-RE)\cdot v_B^2 = v_B^2 - 2 v_B\, u_B + u_B^2 + \hat{J}_B\, u_B^2$$

$$u_B^2\cdot\left(1+\hat{J}\right) - 2\, v_B\, u_B = v_B^2\cdot\left(\hat{J} - \hat{J}\, RE - 1\right)$$

$$u_B^2 - 2\frac{1}{1+\hat{J}} v_B\, u_B = v_B^2\,\frac{\hat{J} - \hat{J}\, RE - 1}{1+\hat{J}}$$

Zur Vereinfachung verwende man: $\alpha = \frac{1}{1+\hat{J}} = \frac{1}{1+50} = \frac{1}{51}$

sowie: $\beta = \frac{\hat{J} - \hat{J}\, RE - 1}{1+\hat{J}} = \frac{50 - 0{,}44\cdot 50 - 1}{1+50} = \frac{27}{51}$

Es folgt: $u_B^2 - 2\,\alpha\, v_B\, u_B = \beta\, v_B^2$

Lösungen der quadratischen Gl. $u_B = \left(\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \alpha\right)\cdot v_B$

$$\frac{u_B}{v_B} = \pm\sqrt{\frac{1}{51^2} + \frac{27}{51}} + \frac{1}{51} = \pm\sqrt{\frac{1}{51^2} + \frac{27\cdot 51}{51^2}} + \frac{1}{51}$$

Die zur positiven Wurzel gehörende Lösung scheidet aus, da u_B und v_B entgegengesetzte Richtungen haben.

Lösung: $\frac{u_B}{v_B} = -\frac{\sqrt{1378}}{51} + \frac{1}{51} = \frac{1-37{,}1214}{51} = -0{,}7082$

4c. Die Winkelgeschwindigkeit ω erhält man am einfachsten aus den Beziehungen für u_R und $\frac{u_B}{v_B}$ aus **4b**:

$$u_R = R\,\omega = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B) = \frac{1}{\hat{J}}(v_B + 0{,}7082\cdot v_B)$$

$$u_R = R\,\omega = \frac{1}{50}(v_B + 0{,}7079\cdot v_B) = \frac{1{,}7082}{50}\cdot v_B$$

$$\frac{u_R}{v_B} = \frac{1{,}7082}{50} = 0{,}03416$$

Lösung für ω: $\omega = \frac{u_R}{R} = \frac{1{,}7079\cdot v_B}{50\cdot R} = \frac{1{,}7079\cdot 40\, m}{50\cdot 0{,}5\, m\; s} = 2{,}73\, s^{-1}$

Zur <u>Kontrolle</u> kann man die Winkelgeschwindigkeit auch direkt aus dem Impulserhaltungssatz und dem Energieerhaltungssatz berechnen.

Aus Impulserhaltungssatz folgt: $v_B = \hat{J}\, u_R + u_B$ (1)

Aus Energieerhaltungssatz folgt: $(1-RE)\cdot v_B^2 = \hat{J}\cdot u_R^2 + u_B^2$ (2)

Setze u_B aus (1) in (2) ein: $(1-RE)\cdot v_B^2 = \hat{J}\, u_R^2 + v_B^2 - 2\,\hat{J}\, u_R v_B + \hat{J}^2\, u_R^2$

Es folgt: $\left(\hat{J} + \hat{J}^2\right)\cdot u_R^2 - 2\hat{J}\, v_B\, u_R = -RE\cdot v_B^2$

Definiert man: $\alpha = \frac{\hat{J}}{\hat{J} + \hat{J}^2} = \frac{1}{1+\hat{J}} = \frac{1}{1+50} = \frac{1}{51}$

und: $\gamma = \frac{RE}{\hat{J} + \hat{J}^2} = \frac{0{,}44}{50+2500} = \frac{1}{5795}$

folgt: $u_R^2 - 2\,\alpha\, v_B u_R = -\gamma\, v_B^2$

Lösung: $u_R = \pm\sqrt{\alpha^2 v_B^2 - \gamma v_B^2} + \alpha v_B = v_B \cdot \left(\pm\sqrt{\alpha^2 - \gamma} + \alpha\right)$

$$\frac{u_R}{v_B} = \pm\sqrt{\alpha^2 - \gamma} + \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{51^2} - \frac{1}{5795}} + \frac{1}{51}$$

Lösung zur positiven Wurzel: $\frac{u_R}{v_B} = +0{,}01455 + 0{,}01950 = 0{,}03416$

ist in Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen Wert.