Fach: Physik 1 im WS 2004/05 Übungsaufgaben zur Klausur am 18.01.05

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

1. Ein Fahrzeug (Nr. 1) durchfährt aus dem Stand eine 0,5 km lange Strecke zwischen zwei Ampeln im Stadtverkehr. Zunächst beschleunigt das Fahrzeug bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von $v_{\max} = 54\,km\,h^{-1}$, fährt anschließend einige Zeit mit konstanter Geschwindigkeit und bremst dann gleichmäßig ab. Der Betrag der Bremsverzögerung ist doppelt so groß wie der Betrag der Anfangsbeschleunigung.

a. Skizzieren Sie das *a*-*t*-, das *v*-*t*- und das *s*-*t*-Diagramm.

b. Die gesamte Fahrzeit beträgt 50 s. Wie groß sind die Beschleunigung a_0 und die Bremsverzögerung a_b?

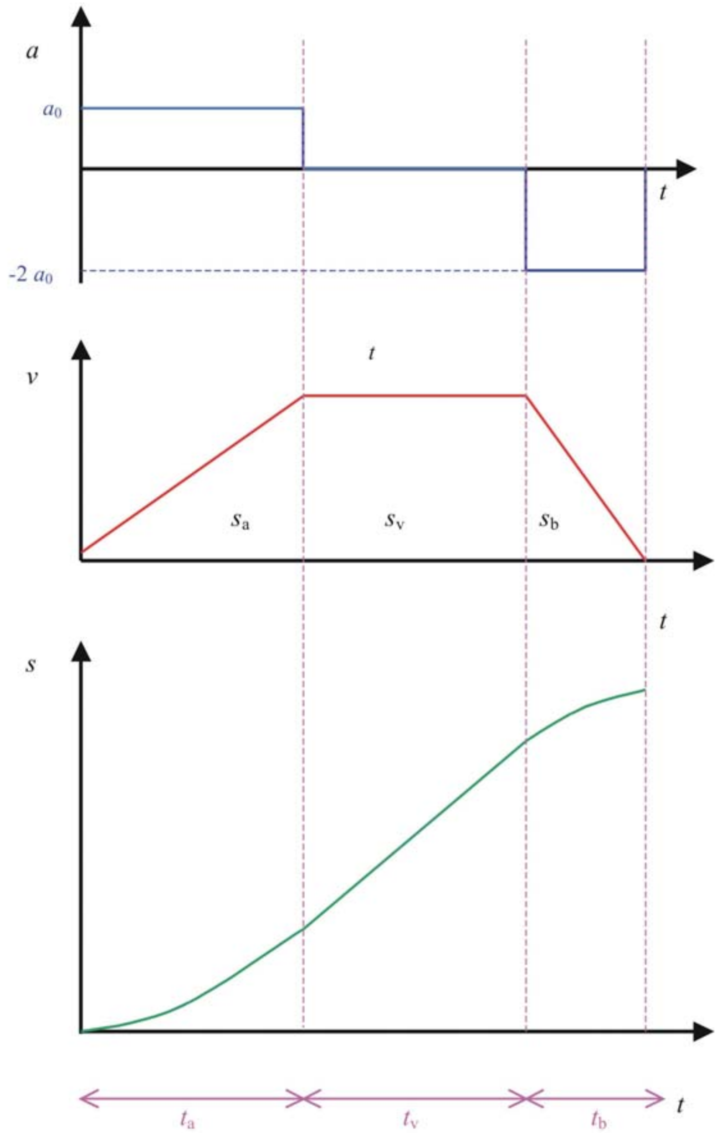
c. Wie lang sind die Streckenabschnitte der beschleunigten und der gleichförmigen Bewegung und der Bremsweg?

d. Fahrzeug Nr. 1 wird beim Start von einem anderen Fahrzeug Nr. 2 mit $v_2 = 36\,km\,h^{-1}$ überholt. Fahrzeug Nr. 2 fährt mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Nach welcher Strecke überholt Fahrzeug Nr 1 das Fahrzeug Nr. 2?

(Falls Sie in Aufg. **1.b** keine Lösung für a_0 finden können, rechnen Sie in den Aufg. **1.c** und **1.d**. mit einem angenommenen Wert von $a_0 = 2\,m\,s^{-2}$ weiter. Beachten Sie, dass für diesen angenommen Wert die Fahrzeit für die Gesamtstrecke nicht 50 s beträgt!)

Lösungen:

1a.



1b. Beschleunigung: $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\max} - 0}{t_a - 0} = \frac{v_{\max}}{t_a}$

für die Beschleunigungszeit gilt: $t_a = \frac{v_{\max}}{a_0}$

Für die Bremsverzögerung gilt: $a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_{\max}}{t_b - 0} = -\frac{v_{\max}}{t_b}$

für die Bremszeit folgt: $t_B = \frac{0 - v_{\max}}{a_B} = -\frac{v_{\max}}{a_B}$

Es gilt laut Aufgabenstellung: $a_b = -2\,a_0$

es folgt für die Bremszeit: $t_b = -\frac{v_{\max}}{a_b} = -\frac{v_{\max}}{(-2\,a_0)} = \frac{1}{2}t_a$

Zeit mit maximaler Geschwindigkeit: $t_v = \frac{v_{\max}}{s_v}$

Für die Gesamtstrecke gilt: $s_{ges} = s_a + s_v + s_b$

Es folgt: $s_{ges} = \frac{1}{2}a_0 t_a^2 + v_{\max} t_v + \left(v_{\max} t_b + \frac{1}{2}a_b t_b^2\right)$

Für die Gesamtzeit gilt: $t_{ges} = t_a + t_v + t_b = t_a + t_v + \frac{1}{2}t_a = \frac{3}{2}t_a + t_v$

Einsetzen: $s_{ges} = \frac{1}{2}\frac{v_{\max}}{t_a}t_a^2 + v_{\max}\left(t_{ges} - \frac{3}{2}\frac{v_{\max}}{a_0}\right) + \left(v_{\max}\frac{v_{\max}}{2\cdot a_0} + \frac{1}{2}(-2\,a_0)\left(\frac{v_{\max}}{2\cdot a_0}\right)^2\right)$

Es folgt: $s_{ges} = \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} t_{ges} - \frac{3}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} - \frac{1}{4}\frac{v_{\max}^2}{a_0} = -\frac{3}{4}\frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} t_{ges}$

Lösung für die Beschleunigung: $a_0 = \frac{3\cdot v_{\max}^2}{4\cdot\left(v_{\max} t_{ges} - s_{ges}\right)} = 0{,}675\,\frac{m}{s^2}$

Bremsverzögerung: $a_b = -2\,a_0 = -1{,}35\,\frac{m}{s^2}$

1c. Beschleunigungsstrecke: $s_a = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{v_{\max}}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} = 166{,}66\,m$

Strecke mit $v_{\max}$: $s_v = v_{\max} t_v = v_{\max}\left(t_{ges} - \frac{3}{2}t_a\right) = v_{\max} t_{ges} - \frac{3}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} = 250\,m$

Bremsweg: $s_b = v_{\max} t_b + \frac{1}{2}a_b t_b^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{\max}^2}{a_0} + \frac{1}{2}(-2a_0)\frac{v_{\max}^2}{4a_0^2} = \frac{1}{4}\frac{v_{\max}^2}{a_0} = 83{,}33\,m$

1d. Vorüberlegung:

Nr. 1 benötigt bis zum Bremsen: $t_1 = \frac{v_{\max}}{a_0} + \frac{s_v}{v_{\max}} = 22{,}22\,s + 16{,}66\,s = 38{,}888\,s$

Nr.2 benötigt für 166,66 m: $t_{21} = \frac{166{,}66\,m}{10\,m/s} = 16{,}666\,s$

Fahrzeug Nr. 2 benötigt für 250 m: $t_{22} = \frac{250\,m}{10\,m/s} = 25{,}0\,s$

Fahrzeug Nr. 2 hat nach 38,888 s eine Strecke von 388,88 m gefahren, während Fahrzeug Nr. 1 bereits 416,66 m weit gekommen ist. **Folgerung:** Fahrzeug Nr. 1 überholt Fahrzeug Nr. 2 während der gleichförmigen Bewegung mit $v_{\max}$.

Der Überholvorgang erfolgt zum Zeitpunkt t'. Beide Fahrzeuge haben zum Zeitpunkt t' die selbe Wegstrecke zurückgelegt.

Fahrzeug Nr. 1 $\quad s'(t') = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_{\max} \cdot (t' - t_a)$

Fahrzeug Nr. 2: $\quad s'(t') = v_2 \cdot t'$

Zeit bis zum Überholpunkt: $\quad t' = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0 (v_{\max} - v_2)} = 33{,}33\, s$

Fahrtstrecke für Nr. 1: $\quad s'(t') = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_0} + v_{\max} \cdot (t' - t_a)$

$$s'(t') = 166.66\, m + 166{,}66\, m = 333{,}3\, m$$

Fahrtstrecke für Nr. 2: $\quad s'(t') = v_2 \cdot t' = 333{,}3\, m$

2. Zwei PKW fahren nebeneinander mit gleicher Geschwindigkeit auf eine grüne Ampel zu. Bei einem Abstand von 75 m schaltet die Ampel auf gelb. Die Gelbphase dauert 3 s. Beide Fahrer reagieren 0,8 s nach der Ampelschaltung: Fahrer Nr. 1 bremst gleichmäßig mit –3,5 m s^{-2} bis zum Stop direkt vor der Ampel, Fahrer Nr. 2 beschleunigt mit +2,5 m s^{-2}.

a. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit der Fahrzeuge?
b. Kann Fahrzeug Nr. 1 noch während der Gelbphase stoppen?
c. Kann Fahrzeug Nr. 2 die Ampel noch während der Gelbphase passieren?
d. Berechnen Sie die Beschleunigung, die nötig wäre, damit Fahrzeug Nr. 2 genau beim Umschalten von gelb auf rot die Ampel passiert.

Lösungen:

2a. Gegeben: Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\, m$, Bremsverzögerung PKW(1): $a_1 = -3{,}5\, m\, s^{-2}$, Beschleunigung PKW(2): $a_2 = +2{,}5\, m\, s^{-2}$ Reaktionszeit = Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\, s$. Gesucht: Anfangsgeschwindigkeit: v_0

Es gilt für PKW(1): $\quad s_{ges} = s_v + s_{a1} = v_0\, t_v + \frac{v_0^2}{2|a_1|}$

Lösung für v_0: $\quad v_0 = \pm\sqrt{2|a_1| s_{ges} + a_1^2 t_v^2} - |a_1| t_v = +20{,}28\, \frac{m}{s} = 73{,}0\, \frac{km}{h}$

2b. Bremszeit PKW(1): $\quad t_{a1} = \frac{v_0}{a_{a1}} = 5{,}79\, s \approx 5{,}8\, s$

Gesamtzeit = Reaktionszeit + Bremszeit = 0,8 s + 5,8 s = 6,6 s.
Ergebnis: PKW(1) stoppt nicht während der Gelbphase (Verkehrstechnisch in Ordnung, weil PKW(1) vor der Ampel zum Stehen kommt).

2c. Zurückgelegter Weg s_g von Fahrzeug Nr.2 während der Gelbphase $t_g = 3\, s$ setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Weg mit gleichmäßiger Beschleunigung a_2 zusammen.

Lösung: $\quad s_g = s_v + s_{a2} = v_0\, t_g + \frac{1}{2} a_2 (t_g - t_v)^2 = 66{,}9\, m$

Die Ampel (Entfernung: 75 m) kann also während der Gelbphase nicht erreicht werden. PKW(2) passiert die Ampel bei Rotlicht.

2d. Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\,m$, Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\,s$, Gesamtzeit der Gelbphase: $t_g = 3\,s$, Beschleunigungszeit: $t_a = (t_g - t_v) = 2.2\,s$

Gesucht: Beschleunigung a_2', so dass die Ampel in 3 s erreicht werden kann.

Es gilt: $$s_{ges} = s_v + s_a = v_0\, t_g + \frac{1}{2} a_2' (t_g - t_v)^2$$

Lösung: $$a_2' = \frac{2 \cdot (s_{ges} - v_0 t_g)}{(t_g - t_v)^2} = 5{,}85\,\frac{m}{s^2}.$$

(Bemerkung: Diese Beschleunigung ist sehr hoch. Mit 5,85 m/s^2 beschleunigt ein Fahrzeug "in 4,7 s von 0 auf 100 km/h". Fazit. Bremsen wäre besser.)

3. Einer gut einsehbaren Kreuzung nähern sich auf der vorfahrtberechtigten Straße ein mit der konstanten Geschwindigkeit von 36 km/h fahrender Lkw und auf der senkrecht dazu verlaufenden anderen Straße ein Pkw, der zu diesem Zeitpunkt von der Kreuzung mit 150 m dreimal so weit entfernt ist wie der Lkw und eine Geschwindigkeit von 72 km/h besitzt. (Die Fahrzeuge sind punktförmig!)

a. Wann erreicht der Lkw die Kreuzung?

b. Um die Kreuzung noch vor dem Lkw passieren zu können, beschleunigt der Pkw- Fahrer gleichmäßig. Wie groß ist die Beschleunigung und welche Geschwindigkeit hat der Pkw auf der Kreuzung?

Lösungen:

3a Entfernung LKW: $$s_{LKW} = \frac{1}{3} s_{PKW} = \frac{150\,m}{3} = 50\,m$$

Zeit für LKW bis zum Erreichen der Kreuzung:

$$t_{LKW} = \frac{s_{LKW}}{v_{LKW}} = \frac{50\,m}{(36/3{,}6)\,m\,s^{-1}} = \frac{50}{10}\,s = 5\,s$$

3b. Beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit:

$$s_{PKW} = v^0_{PKW}\; t_{LWK} + \frac{1}{2} a_{PKW} t^2_{LKW}$$

Beschleunigung für PKW: $$a_{PKW} = \frac{2\left(s_{PKW} - v^0_{PKW} \cdot t_{LKW}\right)}{t^2_{LKW}} = 4\,\frac{m}{s^2}$$

Endgeschwindigkeit PKW: $$v^{End}_{PKW} = v^0_{PKW} + a_{PKW} \cdot t_{LKW}$$

$$v^{End}_{PKW} = 20\,\frac{m}{2} + 4\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 40\,\frac{m}{s} = 144\,\frac{km}{h}$$

4. Der Anhalteweg eines Pkw setzt sich aus dem Reaktionsweg (gleichförmige Bewegung vom Erkennen des Hindernisses bis zum Beginn des Bremsens) und dem tatsächlichen Bremsweg (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bis zum Stillstand zusammen. Die Reaktionszeit des Fahrers, betrage 0,5 s und die Bremsverzögerung sei -7m/s².

a. Prinzipskizze des *a*-*t*-, *v*-*t*- und *s*-*t*-Diagramms.

b. Wie groß darf die maximale Geschwindigkeit vor z. B. einer Schule höchstens sein, wenn der Anhalteweg 5m nicht überschreiten soll?

c. Wie groß ist die Bremszeit und wie groß sind der Reaktionsweg und der reine Bremsweg?

d. Wie lautet die mittlere Geschwindigkeit für den Anhalteweg?

Lösungen:

4a. siehe Lösung der Aufgabe **1a**

4b. Anhalteweg: $s_{ges} = v_{\max} t_R + \frac{v_{\max}^2}{2|a|}$

Lösung für $v_{\max}$: $v_{\max} = \sqrt{2|a| s_{ges} + a^2 t_R^2} - |a| t_R = 5{,}569 \frac{m}{s} = 20{,}04 \frac{km}{h}$

4c. Bremszeit: $t_B = \frac{0 - v_{\max}}{a} = \frac{-5{,}569}{-7} s = 0{,}7956\, s$

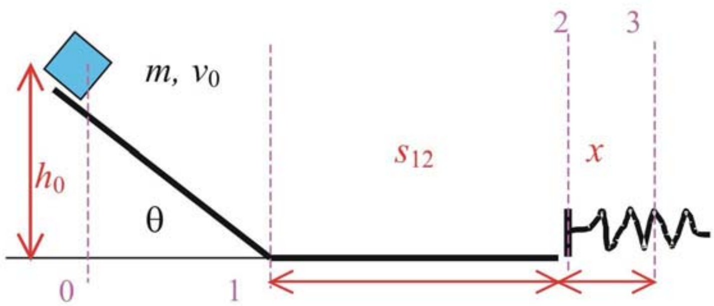
Reaktionsweg: $s_R = v_{\max} t_R = 5{,}569 \cdot 0{,}5\, m = 2{,}785\, m$

Bremsweg $s_B = \frac{1}{2}|a| t_B^2 = 2{,}215\, s$

4d. Mittlere Geschwindigkeit = Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_m = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{5m}{(0{,}5 + 0{,}7956)s} = 3{,}859 \frac{m}{s}$$

5. Die Masse m = 1 kg rutscht mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 4 m/s aus einer Höhe von h_0 = 0,5 m eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel θ = 30° hinab. Anschließend rutscht sie auf einer Strecke s_{12} = 2 m horizontal weiter und trifft am Ende auf eine Feder mit der Federkonstanten $D = 5000\ N/m$. Die Gleitreibungszahl beträgt auf dem gesamten Weg $\mu_G = 0{,}2$.



a. Berechnen Sie die Gesamtenergie E_{ges}, die kinetischen Energien E_{kin} und die Reibungsarbeiten W_R in den Punkten 1 und 2 der Bahn, sowie die an der Feder geleistete Verformungsarbeit W_E^3 im Punkt 3.

b. Wie groß ist der Federweg x?

c. Wie groß müsste die Anfangsgeschwindigkeit v_0' gewählt werden, damit die Masse nach dem Rückprall wieder genau die Anfangshöhe h_0 ohne Geschwindigkeit erreicht? (Vernachlässigen Sie zur Vereinfachung die Reibung auf dem Federweg x)

Lösungen:

5a. Gesamtenergie: $E_{ges} = m\, g\, h_0 + \frac{1}{2} m\, v_0^2 = 5\ J + 8\ J = 13\ J$

Reibungsarbeit auf der Strecke 0→1: $W_R^{01} = \mu_G\, F_N\, s_{01} = \frac{\mu_G\, m\, g \cos 30° h_0}{\sin 30°} = 1{,}732\ J$

Kinetische Energie im Punkt 1: $E_{kin}^1 = E_{ges} - W_R^{01} = (13 - 1{,}732)\,J = 11{,}268\ J$

Reibungsarbeit auf der Strecke 1→2: $W_R^{12} = \mu_G\, F_N\, s_{12} = \mu_G\, m\, g\, s_{12} = 4\ J$

Reibungsarbeit auf der Strecke 0→2: $W_R^{02} = W_R^{01} + W_R^{12} = 5{,}732\ J$

Kinetische Energie im Punkt 2: $E_{kin}^2 = E_{ges} - W_R^{02} = (13 - 5{,}732)\,J = 7{,}268\ J$

Verformungsarbeit (Feder) im Punkt 3: $W_E^3 = E_{kin}^2 = 7{,}268\ J$

5b. Federweg:

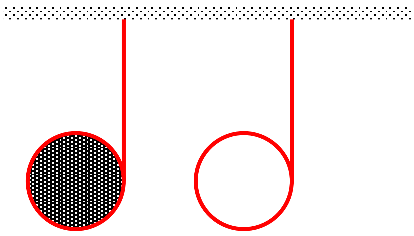
da $W_E^3 = \frac{1}{2} D x^2$, folgt: $x = \sqrt{\frac{2 \cdot W_E^3}{D}} = 0{,}0539\ m \cong 5{,}4\ cm$

5c. Die kinetische Anfangsenergie im Punkt 0 muss gleich der Summe aller Reibungsarbeiten sein.

Kinetische Anfangsenergie: $E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m (v_0')^2 = 2 \cdot (W_R^{01} + W_R^{12}) = 11{,}464\ J$

Anfangsgeschwindigkeit: $v_0' = \sqrt{\frac{4 \cdot (W_R^{01} + W_R^{01})}{m}} = 4{,}79 \frac{m}{s}$

6. Man vergleiche einen Vollzylinder und einen (dünnwandigen) Hohlzylinder, beide mit gleicher Masse $m = 1\ kg$ und gleichem Radius $R = 0{,}1\ m$, um die ein Faden gewickelt ist, dessen Ende an einer Aufhängung befestigt ist.



a. Mit welcher Beschleunigung fallen die Zylinder?
b. Wie groß sind die Seilkräfte?
c. Wie groß sind die Winkelbeschleunigungen?
d. Welche Zeit benötigen die Zylinder für eine Fallstrecke von $s = 1\ m$?
e. Welche Geschwindigkeit und welche Winkelgeschwindigkeit besitzen die Zylinder bei $s = 1\ m$?
f. Wie groß sind die kinetischen Energien der Translation und der Rotation der Zylinder bei $s = 1\ m$?

Lösungen:

6a. Die Gewichtskraft der Zylinder ist: $F_G = m \cdot g$

Die Rotation der Zylinder beruht auf einer Winkelbeschleunigung α, diese muss durch ein Drehmoment M_Z erzeugt wird. $M_Z = J \cdot \alpha$

Das Drehmoment M_Z, entsteht durch die Seilkraft F_S.

Es gilt: $F_S = \frac{M_Z}{R}$

Gewichtskraft F_G und Seilkraft F_S sind entgegengesetzt gerichtet.

Es gilt (D-Alembertsches Prinzip): $(F_G - F_S) - ma = 0 = \left(mg - \frac{J \cdot \alpha}{R} \right) - ma$

Rollbedingung: $\alpha = \frac{a}{R}$

Trägheitsmoment des Vollzylinders: $J_{VZ} = \frac{1}{2} mR^2$

Trägheitsmoment des Hohlzylinders: $J_{HZ} = mR^2$

Beschleunigung des Vollzylinders: $a_{VZ} = \frac{2}{3} g = 6{,}66 \frac{m}{s^2}$

Beschleunigung des Hohlzylinders: $a_{HZ} = \frac{1}{2} g = 5 \frac{m}{s^2}$

6b. Seilkraft beim Vollzylinder: $F_S^{VZ} = \frac{1}{2} m \cdot a_{VZ} = 3{,}33\ N$

Seilkraft beim Hohlzylinder: $F_S^{HZ} = m \cdot a_{HZ} = 5\ N$

6c. Winkelbeschleunigung Vollzylinder: $\alpha_{VZ} = \frac{a_{VZ}}{R} = \frac{6{,}66\ m/s^2}{0{,}1\ m} = 66{,}6\ s^{-2}$

Winkelbeschleunigung Hohlzylinder: $\alpha_{HZ} = \frac{a_{HZ}}{R} = \frac{5\ m/s^2}{0{,}1\ m} = 50\ s^{-2}$

6d. Fallzeit Vollzylinder für $s = 1\,m$: $t_{VZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a_{VZ}}} = \sqrt{\frac{2\ m}{6{,}66\ m/s^2}} = 0{,}548\ s$

Fallzeit Hohlzylinder für $s = 1\,m$: $t_{HZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a_{HZ}}} = \sqrt{\frac{2\ m}{5\ m/s^2}} = 0{,}632\ s$

6e. Man kann unterschiedliche Lösungsverfahren verwenden.

Beispiel 1: Energieerhaltungssatz: $mgh = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

Rollbedingung: $\omega = \frac{v}{R}$

für Vollzylinder: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}mv^2$

für Hohlzylinder: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = mv^2$

Geschwindigkeit VZ für $s = 1\,m$: $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 3{,}65\ \frac{m}{s}$

Geschwindigkeit HZ für $s = 1\,m$: $v = \sqrt{gh} = 3{,}16\ \frac{m}{s}$

Beispiel 2: Kinematik

Geschwindigkeit VZ für $s = 1\,m$: $v_{VZ} = a_{VZ} \cdot t_{VZ} = 6{,}66\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}548\ s = 3{,}65\ \frac{m}{s}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_{VZ} = \frac{v_{VZ}}{R} = 36{,}5\ s^{-1}$

Geschwindigkeit HZ für $s = 1\,m$: $v_{HZ} = a_{HZ} \cdot t_{HZ} = 5\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}632\ s = 3{,}16\ \frac{m}{s}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_{HZ} = \frac{v_{HZ}}{R} = 31{,}6\ s^{-1}$

6f. Vollzylinder:

$$\left(E_{kin}^{trans}\right)_{VZ} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{4}{3}gh = \frac{2}{3}mgh = 6{,}66\ J$$

$$\left(E_{kin}^{rot}\right)_{VZ} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$\left(E_{kin}^{rot}\right)_{VZ} = \frac{1}{4}m \cdot \frac{4}{3}gh = \frac{1}{3}mgh = 3{,}33\ J$$

Hohlzylinder:

$$\left(E_{kin}^{trans}\right)_{HZ} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot gh = 5\ J$$

$$\left(E_{kin}^{rot}\right)_{HZ} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}m \cdot gh = 5\ J$$

7. Ein Schmied bearbeitet ein Werkstück (Masse: $m_W = 2\ kg$) mit einem Hammer (Masse:

$m_H = 6\ kg$) auf einem Amboss (Masse: $m_A = 192\ kg$). Betrachten Sie den Schlag als <u>vollkommen unelastisch</u>. Die Wechselwirkung des Amboss mit seiner Unterlage muss nicht berücksichtigt werden.
a. Welcher Anteil der kinetischen Energie des Hammers dient der Verformung des Werkstückes?

Lösung:

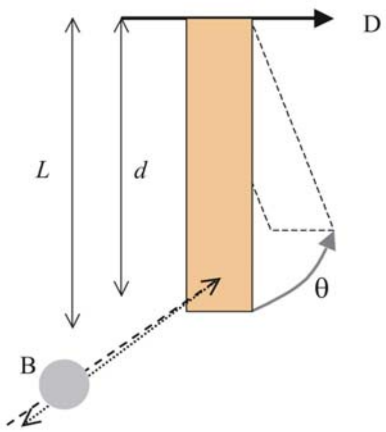
7a. Bei einem "vollkommen unelastischen Schlag" besitzen der Hammer (H), das Werkstück (W) und der Amboss (A) nach dem Schlag die gleiche Geschwindigkeit. Der Schlag mit dem Hammer überträgt Impuls auf das Werkstück und den Amboss. (Die Bewegung des Amboss muss dann durch die Unterlage bedämpft werden.)

Impulserhaltungssatz: $m_H v_H = (m_H + m_A + m_W)\, u$

Energieerhaltungssatz: $E^0_{kin} = \frac{1}{2} m_H v_H^2 = \frac{1}{2}(m_H + m_A + m_W)\, u^2 + Q$

Es folgt: $\frac{Q}{E^0_{kin}} = 1 - \frac{m_H}{m_H + m_A + m_W} = 1 - \frac{6}{200} = 97\ \%$

8. Nach internationalen Normen muss ein Fußball bei einem freien Fall aus 2m Höhe einen Rückprall von mindestens 1 m Höhe aufweisen.



a. Wie groß ist der relative Energieverlust Q/E_0 ?
b. Wie groß ist Geschwindigkeitsverhältnis u_B/v_B vor und nach dem Aufprall?
c. Ein Fußball (B) (Masse $m_B = 420\, g$) wird gegen ein um die Drehachse D frei schwingendes Holzbrett ($m_H = 16{,}611\ kg$, $L = 1{,}6\ m$)geschossen (siehe Abb). Der Ball trifft das Brett im Abstand $d = 1{,}5\ m$ von der Drehachse. Der Stoß soll als <u>unelastisch</u>, jedoch <u>nicht</u> als <u>vollkommen unelastisch</u>) betrachtet werden. Berechnen Sie erneut das Geschwindigkeitsverhältnis u_B/v_B .
d. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit pendelt das Brett nach dem Schuss, wenn die Ballgeschwindigkeit $v_B = 72\, km\, h^{-1}$ beträgt?
e. Um welchen Winkel $\theta_{\max}$ schlägt das Brett aus?
(<u>Hinweise</u>: Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt es sich, die dimensionslosen Größe $\hat{J} = J/m_B R^2$ zu verwenden)

Lösungen:

8a. Nach den internationalen Regeln für Fußbälle wird bei einem Fall aus einer Ausgangshöhe von 2 m eine Rückprallhöhe von 1 m verlangt. Entsprechend muss das Verhältnis der potentiellen Energien für die beiden Höhen lauten: $E^1_{pot}(h = 1m)/E^0_{pot}(h = 2m) = 1/2$. Gleiches gilt nach Energieerhaltungssatz für das Verhältnis der kinetischen Energien direkt vor und direkt nach dem Bodenkontakt: $E^1_{kin}/E^0_{kin} = 1/2$.

Energieerhaltungssatz: $E^0_{kin} = E^1_{kin} + Q$, bzw. $E^0_{pot} = E^1_{pot} + Q$

Definiert man als (den durch Reibung, Verformung usw. verlorenen) <u>relativen Energieverlust</u> *RE* den Quotienten aus Q und E^0_{pot}:

$$RE = \frac{Q}{E^0_{pot}}$$

erhält man als Lösung für *RE*: $$RE = \frac{Q}{E^0_{pot}} = \frac{E^0_{pot} - E^1_{pot}}{E^0_{pot}} = 1 - \frac{E^1_{pot}}{E^0_{pot}} = 0{,}5$$

8b. Die kinetische Energie vor und nach dem Bodenkontakt kann in folgender Form geschrieben werden:

Energieerhaltungssatz: $$E^0_{kin} = E^1_{kin} + Q = E^1_{kin} + RE \cdot E^0_{kin}$$

Es folgt: $$E^0_{kin} \cdot (1 - RE) = E^1_{kin}$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis ist: $$\frac{u_B}{v_B} = \sqrt{\frac{E^1_{kin}}{E^0_{kin}}} = \sqrt{1 - RE} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071$$

8c. Es handelt sich um einen unelastischen, aber nicht um einen vollkommen unelastischen Stoß.

Der Drehimpulserhaltungssatz lautet: $$m_B\, v_B\, d = J\,\omega + m_B\, u_B\, d$$

Der Energieerhaltungssatz lautet: $$\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2 + Q$$

Man kann den Wert für Q (näherungsweise) mit Hilfe von RE aus **8a** abschätzen:

$$Q \cong RE \cdot E^B_{kin} = RE \cdot \left(\frac{1}{2} m_B v_B^2\right)$$

Es folgt nach Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2 + RE \cdot \left(\frac{1}{2} m_B\, v_B^2\right)$$

Durch Umstellung erhält man: $$\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 \cdot (1 - RE) = \frac{1}{2} J\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_B\, u_B^2$$

und nach Multiplikation mit $\frac{2}{m_B}$: $$(1 - RE) \cdot v_B^2 = \frac{J}{m_B\, d^2} (d\omega)^2 + u_B^2$$

Zur Vereinfachung verwende man: $$\widehat{J} = \frac{J}{m_B d^2} = \frac{\frac{1}{3} m_H\, L^2}{m_B\, d^2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 16{,}612 \cdot 1{,}6^2}{0{,}420 \cdot 1{,}5^2} = 15{,}00$$

$d\,\omega = v_R$ entspricht der Bahngeschwindigkeit eines Massenpunktes an der Stelle, an der das Brett getroffen worden ist.

Verwendet man $\widehat{J}$ und v_R, so folgt:

aus dem Energieerhaltungssatz: $$(1 - RE) \cdot v_B^2 = \widehat{J} \cdot v_R^2 + u_B^2 \qquad (1)$$

aus dem Impulserhaltungssatz: $$v_B = \widehat{J}\, v_R + u_B \qquad (2)$$

Aus Gl (2) erhält man: $$v_R = \frac{1}{\widehat{J}} (v_B - u_B)$$

Dies eingesetzt in Gl (1) ergibt: $$(1 - RE) \cdot v_B^2 = \frac{1}{\widehat{J}} \cdot (v_B - u_B)^2 + u_B^2$$

Es folgt: $$\widehat{J} \cdot (1 - RE) \cdot v_B^2 = v_B^2 - 2 v_B\, u_B + u_B^2 + \widehat{J}_B\, u_B^2$$

$$u_B^2 \cdot (1 + \widehat{J}) - 2\, v_B\, u_B = v_B^2 \cdot (\widehat{J} - \widehat{J}\, RE - 1)$$

$$u_B^2 - 2 \frac{1}{1 + \widehat{J}} v_B\, u_B = v_B^2 \frac{\widehat{J} - \widehat{J}\, RE - 1}{1 + \widehat{J}}$$

Zur Vereinfachung verwende man: $$\alpha = \frac{1}{1 + \widehat{J}} = \frac{1}{1 + 15} = \frac{1}{16}$$

sowie: $\beta = \frac{\hat{J} - \hat{J}\,RE - 1}{1 + \hat{J}} = \frac{15 - 0{,}5 \cdot 15 - 1}{1 + 15} = \frac{6{,}5}{16} = \frac{13}{32}$

Es folgt: $u_B^2 - 2\alpha\, v_B\, u_B = \beta\, v_B^2$

Lösungen der quadratischen Gl. $u_B = \left(\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \alpha\right) \cdot v_B$

$$\frac{u_B}{v_B} = \pm\sqrt{\frac{1}{16^2} + \frac{13}{32}} + \frac{1}{16} = \pm\sqrt{\frac{1}{256} + \frac{104}{256}} + \frac{1}{16}$$

Die zur positiven Wurzel gehörende Lösung scheidet aus, da u_B und v_B entgegengesetzte Richtungen haben.

Lösung: $\frac{u_B}{v_B} = -\frac{\sqrt{105}}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1 - 10{,}24}{16} = -\frac{9{,}24}{16} = -0{,}5779$

8d. Die Winkelgeschwindigkeit ω des Brettes direkt nach dem Schuss erhält man am einfachsten aus den Beziehungen für v_R und $\frac{u_B}{v_B}$ aus **4c**:

$$v_R = d\,\omega = \frac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B) = \frac{1}{\hat{J}}(v_B + 0{,}5779 \cdot v_B)$$

$$v_R = R\,\omega = \frac{1{,}5779}{15{,}0} \cdot v_B$$

$$\frac{v_R}{v_B} = \frac{1.5779}{15{,}0} = 0{,}1052$$

Lösung für ω: $\omega = \frac{1{,}5779}{15} \cdot \frac{v_B}{R} = \frac{1{,}5779 \cdot 20\,m\,s^{-1}}{15 \cdot 1{,}5\,m} = 1{,}4025\ s^{-1}$

Zur <u>Kontrolle</u> kann man die Winkelgeschwindigkeit auch direkt aus dem Impulserhaltungssatz und dem Energieerhaltungssatz berechnen (dient nur Übungszwecken):

Aus Impulserhaltungssatz folgt: $v_B = \hat{J}\, v_R + u_B$ (1)

Aus Energieerhaltungssatz folgt: $(1 - RE) \cdot v_B^2 = \hat{J} \cdot v_R^2 + u_B^2$ (2)

Setze u_B aus (1) in (2) ein: $(1 - RE) \cdot v_B^2 = \hat{J}\, v_R^2 + v_B^2 - 2\hat{J}\, v_R v_B + \hat{J}^2\, v_R^2$

Es folgt: $\left(\hat{J} + \hat{J}^2\right) \cdot v_R^2 - 2\hat{J}\, v_B\, v_R = -RE \cdot v_B^2$

Definiert man: $\alpha = \frac{\hat{J}}{\hat{J} + \hat{J}^2} = \frac{1}{1 + \hat{J}} = \frac{1}{1 + 15} = \frac{1}{16}$

und: $\gamma = \frac{RE}{\hat{J} + \hat{J}^2} = \frac{0{,}5}{15 + 225} = \frac{1}{480}$

folgt: $v_R^2 - 2\alpha\, v_B v_R = -\gamma\, v_B^2$

Lösung: $v_R = \pm\sqrt{\alpha^2\, v_B^2 - \gamma\, v_B^2} + \alpha\, v_B = v_B \cdot \left(\pm\sqrt{\alpha^2 - \gamma} + \alpha\right)$

$$\frac{v_R}{v_B} = \pm\sqrt{\alpha^2 - \gamma} + \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{480}} + \frac{1}{16}$$

Lösung zur positiven Wurzel: $\frac{v_R}{v_B} = +\sqrt{\frac{30}{7680} - \frac{16}{7680}} + \frac{1}{16} = +\sqrt{\frac{14}{7680}} + \frac{1}{16} = 0{,}1052$

ist in Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen Wert.

8e. Für die Pendelbewegung des Brettes gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin}^{rot} = E_{pot}$$

Rotationsenergie:

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}\,\hat{J}\left(m_B\, d^2\right)\omega^2$$

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot\left(0{,}42\cdot 1{,}5^2\right)1{,}4025^2\ J = 13{,}94\ J$$

Die potentielle Energie entspricht der Hubarbeit für den Schwerpunkt:

$$E_{pot} = m_H\ g\ H_{\max} = 13{,}94\ J$$

$$H_{\max} = \frac{E_{pot}}{m_H\ g} = \frac{13{,}94\,J}{16{,}611\,kg\cdot 10\,ms^{-2}} = 0{,}0839\ m$$

Für den maximalen Winkelausschlag des Brettes gilt:

$$\cos\theta_{\max} = \frac{L/2 - H_{\max}}{L/2} = 1 - \frac{2\,H_{\max}}{L}$$

$$\theta_{\max} = ar\cos\left(1 - \frac{2\,H_{\max}}{L}\right) = ar\cos\left(1 - \frac{2\,E_{pot}}{m_H\ g\ L}\right)$$

$$\theta_{\max} = \arccos\left(1 - \frac{2\cdot 13{,}94}{16{,}611\cdot 10\cdot 1{,}6}\right)$$

$$\theta_{\max} = \arccos(1 - 0{,}1049) = 26{,}5°$$