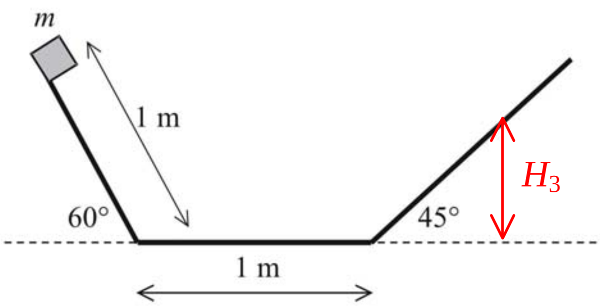
Fachhochschule Hannover | vorgezogene Wiederholungsklausur | 16.03.05
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik 1 im WS 2004/05 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

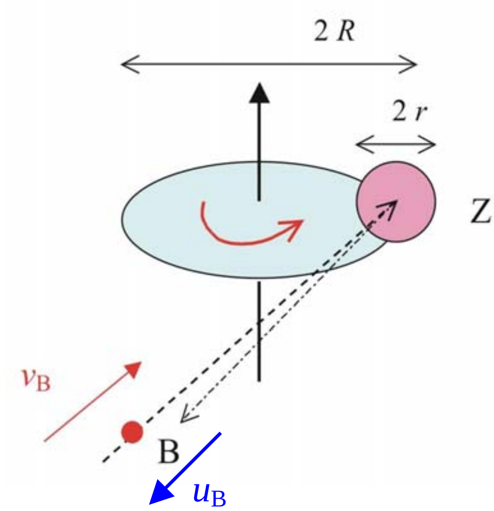
1. Ein Fahrzeug, dass nach Herstellerangaben in 10 s von Null auf 100 km/h beschleunigt, soll auf einer kreisförmigen Pkw-Teststrecke mit einem Radius von 50 m getestet werden. Betrachten Sie die Bewegung als gleichmäßig beschleunigt.
a. Wie groß ist die Bahnbeschleunigung? (2)
Betrachten Sie in **1b. - 1g.** den Punkt mit der Geschwindigkeit von 50 km/h: **b.** Welcher Weg wurde auf dem Kreis zurückgelegt? Berechnen Sie: **c.** Die Radialbeschleunigung. **d.** Die Gesamtbeschleunigung. **e**. Die Winkelbeschleunigung. **f.** Die Winkelgeschwindigkeit. **g.** Die Drehzahl. (10)
h. Nehmen Sie an, dass die Haftreibungszahl für Reifen/Fahrbahn richtungsunabhängig ist und $\mu_{H,\max} = 1.0$ beträgt. Bei welcher Geschwindigkeit können die Reifen nicht mehr haften? (10)
i. Welche Zeit benötigt das Fahrzeug für zwei Runden, wenn das Testfahrzeug nach dem Erreichen einer Geschwindigkeit von 50 km/h gleichförmig weiterfährt? (10)
j. Welche (maximale) Motorleistung ist erforderlich, um mit der in **1a.** berechneten Beschleunigung und einer Fahrzeugmasse von 1250 kg die Geschwindigkeit 50 km h^{-1} zu erreichen? (5)

2. Eine Masse von 0,5 kg gleitet aus der Ruhelage eine 1 m lange und 60° geneigte schiefe Ebene hinab. Anschließend gleitet die einer waagerechten Ebene 1 m weit und dann eine schiefe Ebene unter 45° hinauf. Die Gleitreibungszahl für die gesamten Strecke beträgt $\mu_G = 0{,}25$.
a. Welche Höhe H_3 erreicht die Masse auf der 45° Ebene, bevor sie zurückrutscht? (15)
b. Welche Energie geht auf dem Weg bis zum Umkehrpunkt als Wärme verloren? (5)



3. Betrachten Sie erneut eine Masse von 0,5 kg in der geometrischen Anordnung der Aufgabe **2**. wobei die Reibung vernachlässigt werden kann (d.h. setze . $\mu_G = 0$).
a. Wie groß ist bei einer <u>Gleitbewegung</u> die Beschleunigung der Masse im Startpunkt? (5)
b. Wie groß wäre die Beschleunigung einer <u>rollenden</u> Kugel gleicher Masse? (15)
c. Wie groß ist die Beschleunigung für die Bedingungen von **3a.** und **3b.** für eine Masse von 1 kg? (5)

4. Betrachten Sie den Wurf eines Balls(B) (Masse $m_B = 58\,g$) auf eine Zielscheibe (Z) (mit vernachlässigbarer Masse), die senkrecht am äußeren Rand einer drehbaren horizontalen Scheibe (homogener Zylinder mit Masse $m_S = 5{,}8\,kg$ und Radius $R = 0{,}5\,m$) befestigt ist. Ballgeschwindigkeit: $v_B = 144\,km\,h^{-1}$.
a. Betrachten Sie den Stoss als <u>vollkommen elastisch</u>. Welchen Wert hat das Verhältnis der Geschwindigkeiten u_B/v_B (Geschwindigkeit des Balls nach Stoß u_B, vor Stoß v_B)? (20)
b. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Drehscheibe? (10)
c. Betrachten Sie ein Stück Knetmaterial gleicher Masse, das nach dem Wurf an der Zielscheibe haftet. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Drehscheibe jetzt? (10)
d. Welcher Energieanteil wird in Wärme/Verformung umgewandelt? (10)



(<u>Hinweise</u>: Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, die dimensionslose Größe $\hat{J} = J/m_B R^2$ zu verwenden)
(Summe=132 Punkte; Bewertung: 100Prozent = 110 Punkte)
Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1. Die *Bahngschwindigkeit* entspricht der *Tangentialgeschwindigkeit*, deshalb Index *T*.
Die *Radialbeschleunigung* entspricht der *Normalbeschleunigung*, deshalb Index *N*.

1a. Bahngeschwindigkeit nach 10 s: $v_T(t = 10\,s) = 100\ km\ h^{-1} = 27{,}8\,m\ s^{-1}$.

Für die Bahnbeschleunigung folgt: $$a_T = \frac{\Delta v_T}{\Delta t} = \frac{(27{,}8 - 0)\ m\ s^{-1}}{(10 - 0)\,s} = 2{,}78\ m\ s^{-2}$$

1b. Bei gleichm. Beschleunigung gilt: $$s = \frac{1}{2} a_T\ t^2 \text{ und } a_T = \frac{\Delta v_T}{\Delta t} = \frac{v_T}{t}$$

Einsetzen von *t* ergibt: $$s = \frac{v_T^2}{2a_T} = 34{,}7\,m$$

1c. Radialbeschleunigung: $$a_N = \frac{v_T^2}{R} = \frac{50^2\ km^2}{50\,m\ s^2} = \frac{13{,}88^2\ m^2}{50\,m\ s^2} = 3{,}86\frac{m}{s^2}$$

1d. Gesamtbeschleunigung: $$a_{ges} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{2{,}78^2 + 3{,}86^2}\ m\,s^{-2} = 4{,}75\,m\,s^{-2}$$

1e. Winkelbeschleunigung: $$\alpha = \frac{a_T}{R} = \frac{2{,}78\,m\,s^{-2}}{50\,m} = 0{,}0556\ s^{-2}$$

1f. Winkelgeschwindigkeit: $$\omega = \frac{v_T}{R} = \frac{13{,}88\,m\,s^{-1}}{50\,m} = 0{,}278\,s^{-1}$$

oder berechne *t* für 50 km h^{-1}: $$t = \frac{v_T}{a_T} = \frac{13{,}88\,m\,s^{-1}}{2{,}78\,m\,s^{-2}} = 5{,}0\,s$$

und $$\omega(t) = \alpha \cdot t = 0{,}0556 \cdot 5{,}0\ s^{-1} = 0{,}278\,s^{-1}$$

1g. Drehzahl $$n(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = \frac{0{,}278\,m\,s^{-1}}{2\,\pi} 0{,}0442\,s^{-1} = 2{,}65\,\text{min}^{-1}$$

1h. Wenn die Haftreibungskraft $F_{H,\max}$ kleiner ist als die (Vektor-)Summe aller Beschleunigungskräfte F_{ges}, können die Reifen des PKW nicht mehr haften.

$$F_{H,\max} = \mu_H\ F_N = \mu_H\ m \cdot g < F_{ges}$$

Die gesamte Beschleunigungskraft, die entgegen der Haftreibungskraft der Reifen wirkt, ist die (Vektor-)Summe aus Beschleunigungskraft F_a und Zentripetalkraft F_Z. Da F_a tangential und F_a radial wirken, stehen beide Kräfte senkrecht und es gilt:

$$F_{ges} = \sqrt{F_a^2 + F_Z^2} = m \cdot \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Es folgt: $$\mu_H \cdot m \cdot g < m \cdot \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$\mu_H \cdot g < \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{a_T^2 + \frac{v_T^4}{R^2}}$$

$$v_T > \sqrt[4]{R^2\left((\mu_H\,g)^2 - a_T^2\right)}$$

$$v_T > \sqrt[4]{50^2\ m^2\left(10^2 - 2{,}78^2\right)\frac{m^2}{s^4}} = 21{,}91\frac{m}{s} = 78.9\frac{km}{h}$$

1i. Berechnung der Zeit für zwei Runden:
Der Gesamtweg beträgt: $$s_{ges} = 2U = 2(\pi\,D) = 4\pi\,R = 4\pi\,50\,m = 628\,m$$

Während der gleichmäßigen Beschleunigung auf eine Endgeschwindigkeit $v_e = 50\dfrac{km}{h}$

wird der Weg s_a zurückgelegt: $$s_a = \frac{1}{2} \cdot a_T \cdot t_a^2 = \frac{v_e^e}{2\,a_T} = 34{,}7\ m$$

Die entsprechende Zeit ist: $$t_a = \frac{v_e}{a_T} = \frac{50\,km\,h^{-1}}{2{,}78\,m\,s^2} = \frac{13{,}89}{2{,}78}\,s = 5\,s$$

Der Weg mit gleichförmiger Bewegung ist also:
$$s_V = s_{ges} - s_a = (628{,}3 - 34{,}7)\,m = 593{,}6\,m$$

Zeit mit gleichförmiger Bewegung: $$t_V = \frac{s_V}{v} = \frac{593{,}6\,m\,s}{13{,}78\,m} = 43{,}1\,s$$

Gesamtzeit für zwei Runden: $$t_{ges} = t_a + t_V = (5 + 43{,}1)\,s = 48{,}1\,s$$

1j. Maximal benötigte Leistung: $$P = F \cdot v = m \cdot a_T \cdot v_T^{\max}$$

$$P = 1250\,kg\ 2{,}78\,\frac{m}{s^2}\,m \cdot 13{,}88\,\frac{m}{s} = 48{,}23\,kW$$

2a. Ausgangshöhe auf der 60° Ebene: $$H_0 = \sin 60° \cdot s_1 = 0{,}8660 \cdot 1\,m = 0{,}866\,m$$

Pot. Energie in der Ausgangshöhe: $$E_{pot}^0 = m\,g\,H_0 = 0{,}5\,kg\ 10\ m\,s^{-2}\ 0{,}866\,m = 4{,}33\,J$$

Energie am Ende der 60° Ebene: $$E_{pot}^0 = E_{kin}^1 + W_R^1$$

Reibungsarbeit auf der 60° Ebene: $$W_R^1 = \mu_G\,F_N\,s_1 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 60° \cdot s_1 = 0{,}625\,J$$

Energie am Ende der Horizontalen: $$E_{pot}^0 = E_{kin}^2 + W_R^1 + W_R^2$$

Reibungsarbeit auf der Horizontalen: $$W_R^2 = \mu_G\,F_N\,s_2 = \mu_G\,m\,g\,s_2 = 1{,}25\,J$$

Energie im Umkehrpunkt: $$E_{pot}^0 = E_{pot}^3 + W_R^1 + W_R^2 + W_R^3$$

Reibungsarbeit auf der 45° Ebene: $$W_R^3 = \mu_G\,F_N\,s_3 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 45° \cdot s_3$$

$$W_R^3 = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos 45° \cdot \frac{H_3}{\sin 45°} = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cot 45° \cdot H_3$$

Pot. Energie im Umkehrpunkt: $$E_{pot}^3 = m\,g\,H_3 = E_{pot}^0 - \left(W_R^1 + W_R^2\right) - W_R^3$$

$$E_{pot}^3 = (4{,}33 - 1{,}25 - 0{,}625)\,J - W_R^3 = 2{,}445\,J - W_R^3$$

$$m\,g\,H_3 = 2{,}445\,J - \mu_G\ m\,g \cot 45°\,H_3$$

$$H_3 = \frac{2{,}445\,J}{mg + \mu_G\ m\,g \cot 45°} = \frac{2{,}445\,J}{(5 + 1{,}25)\,N} = 0{,}3912\,m$$

2b. Reibungsarbeit auf der 45° Ebene: $$W_R^3 = \mu_G\,m\,g \cot 45°\,H_3 = 0{,}489\,J$$

Gesamte Reibungsenergie: $$W_R^{ges} = W_R^1 + W_R^2 + W_R^3$$

$$W_R^{ges} = (0{,}625 + 1{,}25 + 0{,}489)\,J = 2{,}364\,J$$

Relativer Energieverlust: $$\frac{W_R^3}{E_{pot}^0} = \frac{2{,}364\,J}{4{,}33\,J} = 54{,}6\,\%$$

3a. Zerlege die Gewichtskraft in Tangential- und Normalkomponente.

Die Tangentialkomponente $F_T = F_g \sin 60° = m\,g \sin 60°$

erzeugt die gesuchte Beschleunigung: $F_T = m\,a_T$

Beschleunigung beim Gleiten: $a_T = g \sin 60° = 8{,}66\,m\,s^{-2}$

3b. Die Kraft $F_T = F_g \sin 60° = m\,g \sin 60°$

erzeugt bei einer rollenden Kugel sowohl die Beschleunigung a_T für die Translation des Schwerpunktes als auch das Drehmoment M, das die Kugel rotieren lässt.

Drehmoment: $M = F_M \cdot r$

Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft teilt sich auf in die Kraft F_a, die den Schwerpunkte beschleunigt, und die Kraft F_M, die das Drehmoment erzeugt.

Es gilt: $F_T = F_a + F_M$

Grundgleichung Translation: $F_a = m\,a_T = F_T - F_M = F_T - \dfrac{M}{r}$

Rollbedingungen: $s = r\,\varphi$, $v = r\,\omega$ und $a = r\,\alpha$

Grundgleichung Rotation: $M = J\,\alpha = \dfrac{2}{5} m r^2 \dfrac{a_T}{r}$

Es folgt: $\dfrac{M}{r} = \dfrac{2}{5} m\,a_T$

Einsetzen: $F_a = m\,a_T = m\,g \sin 60° - \dfrac{2}{5} m\,a_T$

Es folgt durch Umstellung $m\,a_T + \dfrac{2}{5} m\,a_T = \dfrac{7}{5} m\,a_T = m\,g \sin 60°$

Lösung: $a_T = \dfrac{5}{7} g \sin 60° = 6{,}186\,m\,s^{-2}$

3c. Die Lösung für die Beschleunigungen in **3a.** und **3b.** sind unabhänig von der Masse. Folglich ändern sich die Beschleunigungen nicht, wenn die Masse statt 0,5 kg jetzt 1 kg beträgt.

4a. Es handelt sich um einen <u>vollkommen elastischen</u> Stoß.

Drehimpulserhaltungssatz: $m_B\,v_B\,R = J\,\omega + m_B\,u_B\,R$

Energieerhaltungssatz: $\dfrac{1}{2} m_B\,v_B^2 = \dfrac{1}{2} J\,\omega^2 + \dfrac{1}{2} m_B\,u_B^2$

Umstellung Drehimpulsgleichung: $v_B = \dfrac{J}{m_B\,R^2}(R\,\omega) + u_B$

Umstellung Energiegleichung: $m_B\,v_B^2 = \dfrac{J}{m_B\,R^2}(R\omega)^2 + u_B^2$

Zur Vereinfachung verwende man: $\hat{J} = \dfrac{J}{m_B R^2} = \dfrac{\frac{1}{2} m_S\,R^2}{m_B\,R^2} = \dfrac{0{,}5 \cdot 5800}{58} = 50$

$R\,\omega = u_R$ entspricht der Bahngeschwindigkeit am Rand der Drehscheibe.

Verwendet man die Bezeichnungen $\hat{J}$ und u_R, so folgt aus dem

Energieerhaltungssatz: $v_B^2 = \hat{J} \cdot u_R^2 + u_B^2$ (1)

aus dem Drehimpulserhaltungssatz: $v_B = \hat{J}\,u_R + u_B$ (2)

Aus Gl (2) erhält man: $u_R = \dfrac{1}{\hat{J}}(v_B - u_B)$

Dies eingesetzt in Gl (1) ergibt: $v_B^2 = \frac{1}{\widehat{J}} \cdot (v_B - u_B)^2 + u_B^2$

Es folgt:
$$\widehat{J}\, v_B^2 = v_B^2 - 2 v_B\, u_B + u_B^2 + \widehat{J}_B\, u_B^2$$
$$u_B^2 \cdot \left(1 + \widehat{J}\right) - 2\, v_B\, u_B = v_B^2 \cdot \left(\widehat{J} - 1\right)$$
$$u_B^2 - 2 \frac{1}{1+\widehat{J}} v_B\, u_B = v_B^2 \frac{\widehat{J} - 1}{1 + \widehat{J}}$$

Zur Vereinfachung verwende man: $\alpha = \frac{1}{1+\widehat{J}} = \frac{1}{1+50} = \frac{1}{51}$

sowie: $\beta = \frac{\widehat{J} - 1}{1+\widehat{J}} = \frac{50-1}{1+50} = \frac{49}{51}$

Es folgt: $u_B^2 - 2\alpha\, v_B\, u_B = \beta\, v_B^2$

Lösungen der quadratischen Gl. $u_B = \left(\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \alpha\right) \cdot v_B$

$$\frac{u_B}{v_B} = \pm\sqrt{\frac{1}{51^2} + \frac{49}{51}} + \frac{1}{51} = \pm\sqrt{\frac{1}{51^2} + \frac{49 \cdot 51}{51^2}} + \frac{1}{51}$$

Die zur positiven Wurzel gehörende Lösung scheidet aus, da u_B und v_B entgegengesetzte Richtungen haben.

Lösung: $\frac{u_B}{v_B} = -\frac{\sqrt{2500}}{51} + \frac{1}{51} = \frac{1-50}{51} = -\frac{49}{51} = -0{,}961$

4b. Die Winkelgeschwindigkeit ω erhält man am einfachsten aus den Beziehungen für u_R und $\frac{u_B}{v_B}$ aus **4a**:
$$u_R = R\,\omega = \frac{1}{\widehat{J}}(v_B - u_B) = \frac{1}{50}\left(1 + \frac{49}{51}\right) \cdot v_B$$
$$u_R = \frac{100}{50 \cdot 51} \cdot v_B = \frac{2}{51} \cdot v_B = 0{,}0392 \cdot v_B = 1{,}569\, m\, s^{-1}$$

Es folgt: $\omega = 0{,}0392 \cdot \frac{v_B}{R} = \frac{2}{51} \cdot v_B = \frac{2}{51} \cdot \frac{40\, m\, s^{-1}}{0{,}5\, m} = 3{,}14\, s^{-1}$

4c. Es handelt sich um einen vollkommen unelastischen Stoß.

Drehimpulserhaltungssatz: $m_B\, v_B\, R = \left(J + m_B\, R^2\right)\omega$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2}\left(J + m_B\, R^2\right)\omega^2$

Aus Impulserhaltungssatz folgt: $\omega = \frac{m_B\, v_B\, R}{J + m_B\, R^2} = \frac{m_B\, v_B\, R}{m_B\, R^2 \cdot \left(\widehat{J} + 1\right)} = \frac{v_B}{R \cdot \left(\widehat{J} + 1\right)}$

$$\omega = \frac{v_B}{R \cdot \left(\widehat{J} + 1\right)} = \frac{1}{\widehat{J} + 1} \cdot \frac{v_B}{R} = \frac{1}{51} \cdot \frac{40\, m\, s^{-1}}{0{,}5\, m} = 1{,}57\, s^{-1}$$

4d. Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_B\, v_B^2 = \frac{1}{2}\left(J + m_B\, R^2\right)\omega^2 + Q$

$$Q = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 - \frac{1}{2}\left(J + m_B\, R^2\right)\omega^2$$

Einsetzen von $\omega = \frac{1}{\widehat{J} + 1} \cdot \frac{v_B}{R}$ und $J = \widehat{J} \cdot m_B R^2$

Liefert: $Q = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 - \frac{1}{2}\left(\widehat{J} \cdot m_B\, R^2 + m_B\, R^2\right) \frac{1}{\left(\widehat{J} + 1\right)^2} \frac{v_B^2}{R^2}$

$$Q = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\widehat{J} + 1} m_B\, v_B^2$$

$$Q = \frac{1}{2} m_B \, v_B^2 \left(1 - \frac{1}{\widehat{J} + 1} \right) = E_{kin}^0 \left(1 - \frac{1}{\widehat{J} + 1} \right)$$

$Q = E_{kin}^0 \, \frac{51-1}{51} = 0{,}980 \, E_{kin}^0$ also ist die Lösung 98%.

Kinetische Energie am Anfang: $E_{kin}^0 = \frac{1}{2} m_B \, v_B^2 = \frac{1}{2} 0{,}058 \, kg \, 40^2 \, \frac{m^2}{s^2} = 46{,}40 \, J$

Energieverlust: $Q = 0{,}980 \cdot 46{,}40 \, J = 45{,}47 \, J$