Übungsaufgaben Physik I im WS 2003/04

Sie können zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2} verwenden

Aufgabenblatt zum 16.10.2003

1. Zwei PKW fahren nebeneinander mit gleicher Geschwindigkeit auf eine grüne Ampel zu. Bei einem Abstand von 75 m schaltet die Ampel auf gelb. Die Gelbphase dauert 3 s. Beide Fahrer reagieren 0,8 s nach der Ampelschaltung: Fahrer Nr. 1 bremst gleichmäßig mit –3,5 m s^{-2} bis zum Stop direkt vor der Ampel, Fahrer Nr. 2 beschleunigt mit +2,5 m s^{-2}.

a. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit der Fahrzeuge?
b. Kann Fahrzeug Nr. 1 noch während der Gelbphase stoppen?
c. Kann Fahrzeug Nr. 2 die Ampel noch während der Gelbphase passieren?
d. Berechnen Sie die Beschleunigung, die nötig wäre, damit Fahrzeug Nr. 2 genau beim Umschalten von gelb auf rot die Ampel passiert.

Lösungen:

1a. Gegeben: Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\,m$, Bremsverzögerung PKW(1): $a_1 = -3{,}5\,m\,s^{-2}$, Beschleunigung PKW(2): $a_2 = +2{,}5\,m\,s^{-2}$ Reaktionszeit = Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\,s$. Gesucht: Anfangsgeschwindigkeit: v_0

Es gilt für PKW(1): $$s_{ges} = s_v + s_{a1} = v_0\,t_v + \frac{v_0^2}{2|a_1|}$$

Lösung für v_0: $$v_0 = \pm\sqrt{2|a_1|\,s_{ges} + a_1^2\,t_v^2} - |a_1|\,t_v = +20{,}28\,\frac{m}{s} = 73{,}0\,\frac{km}{h}$$

1b. Bremszeit PKW(1): $$t_{a1} = \frac{v_0}{a_{a1}} = 5{,}79\ s \approx 5{,}8\ s$$

Gesamtzeit = Reaktionszeit + Bremszeit = 0,8 s + 5,8 s = 6,6 s.
Ergebnis: PKW(1) stoppt nicht während der Gelbphase (Verkehrstechnisch in Ordnung, weil PKW(1) vor der Ampel zum Stehen kommt).

1c. Zurückgelegter Weg s_g von Fahrzeug Nr.2 während der Gelbphase $t_g = 3\,s$ setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Weg mit gleichmäßiger Beschleunigung a_2 zusammen.

Lösung: $$s_g = s_v + s_{a2} = v_0\,t_g + \frac{1}{2}a_2\left(t_g - t_v\right)^2 = 66{,}9\,m$$

Die Ampel (Entfernung: 75 m) kann also während der Gelbphase nicht erreicht werden. PKW(2) passiert die Ampel bei Rotlicht.

1d. Gesamtstrecke $s_{ges} = 75\,m$, Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $t_v = 0{,}8\,s$, Gesamtzeit der Gelbphase: $t_g = 3\,s$, Beschleunigungszeit: $t_a = \left(t_g - t_v\right) = 2.2\,s$
Gesucht: Beschleunigung a_2', so dass die Ampel in 3 s erreicht werden kann.

Es gilt: $$s_{ges} = s_v + s_a = v_0\,t_g + \frac{1}{2}a_2'\left(t_g - t_v\right)^2$$

Lösung: $$a_2' = \frac{2\cdot\left(s_{ges} - v_0 t_g\right)}{\left(t_g - t_v\right)^2} = 5{,}85\,\frac{m}{s^2}.$$

(Bemerkung: Diese Beschleunigung ist sehr hoch. Mit 5,85 m/s^2 beschleunigt ein Fahrzeug "in 4,7 s von 0 auf 100 km/h". Fazit. Bremsen wäre besser.)

Aufgabenblatt zum 23. 10. 2003

2. Einer gut einsehbaren Kreuzung nähern sich auf der vorfahrtberechtigten Straße ein mit der konstanten Geschwindigkeit von 36 km/h fahrender Lkw und auf der senkrecht dazu verlaufenden anderen Straße ein Pkw, der zu diesem Zeitpunkt von der Kreuzung mit 150 m dreimal so weit entfernt ist wie der Lkw und eine Geschwindigkeit von 72 km/h besitzt. (Die Fahrzeuge sind punktförmig!)

a. Wann erreicht der Lkw die Kreuzung?

b. Um die Kreuzung noch vor dem Lkw passieren zu können, beschleunigt der Pkw- Fahrer gleichmäßig. Wie groß ist die Beschleunigung und welche Geschwindigkeit hat der Pkw auf der Kreuzung?

Lösungen:

2a Entfernung LKW: $$s_{LKW} = \frac{1}{3} s_{PKW} = \frac{150\,m}{3} = 50\,m$$

Zeit für LKW bis zum Erreichen der Kreuzung:

$$t_{LKW} = \frac{s_{LKW}}{v_{LKW}} = \frac{50\,m}{(36/3{,}6)\,m\,s^{-1}} = \frac{50}{10}\,s = 5\,s$$

2b. Beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit:

$$s_{PKW} = v^0_{PKW}\; t^2_{LKW} + \frac{1}{2} a_{PKW}\, t^2_{LKW}$$

Beschleunigung für PKW: $$a_{PKW} = \frac{2\left(s_{PKW} - v^0_{PKW} \cdot t_{LKW}\right)}{t^2_{LKW}} = 4\frac{m}{s^2}$$

Endgeschwindigkeit PKW: $$v^{End}_{PKW} = v^0_{PKW} + a_{PKW} \cdot t_{LKW}$$

$$v^{End}_{PKW} = 20\frac{m}{2} + 4\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 40\frac{m}{s} = 144\frac{km}{h}$$

3. Der Anhalteweg eines Pkw setzt sich aus dem Reaktionsweg (gleichförmige Bewegung vom Erkennen des Hindernisses bis zum Beginn des Bremsens) und dem tatsächlichen Bremsweg (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bis zum Stillstand zusammen. Die Reaktionszeit des Fahrers, betrage 0,5 s und die Bremsverzögerung sei -7m/s².

a. Prinzipskizze des *a*-*t*-, *v*-*t*- und *s*-*t*-Diagramms.

b. Wie groß darf die maximale Geschwindigkeit vor z. B. einer Schule höchstens sein, wenn der Anhalteweg 5m nicht überschreiten soll?

c. Wie groß ist die Bremszeit und wie groß sind der Reaktionsweg und der reine Bremsweg?

d. Wie lautet die mittlere Geschwindigkeit für den Anhalteweg?

Lösungen:

3a. siehe Vorlesung

3b. Anhalteweg: $$s_{ges} = v_{\max}\, t_R + \frac{v^2_{\max}}{2|a|}$$

Lösung für $v_{\max}$: $$v_{\max} = \sqrt{2|a|\,s_{ges} + a^2\, t_R^2} - |a|\,t_R = 5{,}569\frac{m}{s} = 20{,}04\frac{km}{h}$$

3c. Bremszeit: $$t_B = \frac{0 - v_{\max}}{a} = \frac{-5{,}569}{-7}\,s = 0{,}7956\,s$$

Reaktionsweg: $s_R = v_{\max} t_R = 5{,}569 \cdot 0{,}7956\, m = 2{,}785\, m$

Bremsweg $s_B = \frac{1}{2}|a| t_B^2 = 2{,}215\, s$

3d. Mittlere Geschwindigkeit = Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_m = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{5\, m}{(0{,}5 + 0{,}7956) s} = 3{,}859 \frac{m}{s}$$

Aufgabenblatt zum 6. 11. 2003

4. Auf einer kreisförmigen Pkw-Testbahn mit einem Radius von 30 m soll die Aussage des PKW-Herstellers "*und in Kurven in 4 s von Null auf 72 km/h*" überprüft und weitere Eigenschaften festgestellt werden. Die Bewegung sei gleichmäßig beschleunigt.

a. Welche Bahnbeschleunigung liegt demnach vor?

b. Wie groß sind die Gesamtbeschleunigung und die Radialbeschleunigung 0 s, 2 s und 4 s nach dem Start?

c. Welche Winkelbeschleunigung liegt vor und welche Winkelgeschwindigkeit hat das als Massenpunkt angenommene Fahrzeug 0 s, 2 s und 4 s nach dem Start?

d. Nach welcher Zeit sind zwei Runden gefahren, wenn das Testfahrzeug nach Erreichen der Maximal-geschwindigkeit gleichförmig weiterfährt?

Lösungen:

4a. Maximale Tagential(=Bahn-)geschwindigkeit:

$$v_T(t = 4\,s) = 72\, km\, h^{-1} = 20\, m\, s^{-1}.$$

Tangential(=Bahn-)beschleunigung: $a_T = \frac{\Delta v_T}{\Delta t} = \frac{(20-0)\, m\, s^{-1}}{(4-0)\, s} = 5\, m\, s^{-2}$

4b. **0 s nach dem Start:**

Tangentialbeschleunigung: $a_T(t = 0\,s) = 5\, m\, s^{-2}$

Normal(=Radial-)beschleunigung: $a_N(t = 0\, s) = \frac{v_T^2}{R} = 0\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges}(t = 0\,s) = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 5\, m\, s^{-2}$

2 s nach dem Start:

Tangentialbeschleunigung: $a_T(t = 2\,s) = 5\, m\, s^{-2}$

Normal(=Radial-)beschleunigung: $a_N(t = 2\, s) = \frac{v_T^2}{R} = \frac{(a_T\, t)^2}{R} = 3{,}33\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung:

$$a_{ges}(t = 2\,s) = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 6{,}01\, m\, s^{-2}$$

4 s nach dem Start:

Tangentialbeschleunigung: $a_T(t = 4\,s) = 5\, m\, s^{-2}$

Normal(=Radial-)beschleunigung: $a_N(t = 4\, s) = \frac{v_T^2}{R} = \frac{(a_T\, t)^2}{R} = 13{,}33\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung:

$$a_{ges}(t = 0\,s) = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 14.24\, m\, s^{-2}$$

4c. Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{a_T}{R} = \frac{5}{30}\, s^{-2} = 0{,}166\, s^{-2}$

Winkelgeschwindigkeit für $t = 0\, s$: $\omega(t = 0\, s) = \alpha \cdot t = 0\, s^{-1}$

Winkelgeschwindigkeit für $t = 2\, s$: $\omega(t = 2\, s) = \alpha \cdot t = 0{,}333\, s^{-1}$

Winkelgeschwindigkeit für $t = 4\, s$: $\omega(t = 4\, s) = \alpha \cdot t = 0{,}666\, s^{-1}$

4d. Zeit für zwei Runden:

Der Gesamtweg beträgt:

$$s_{ges} = 2 \cdot U = 2 \cdot \pi \cdot 2R = 4\pi \cdot R = 377\, m$$

In $t_a = 4\, s$ mit Beschleunigung wird Weg:

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_a^2 = 40\, m$$

zurückgelegt, und anschließend $s_v = 377\, m - 40\, m = 337 m$

mit gleichförmiger Geschwindigkeit: $v_T^{\max} = 20\, m\, s^{-1}$.

Die benötigte Zeit ist: $t_v = \frac{337\, m}{20\, m\, s^{-1}} = 16{,}85\, s$.

Die Gesamtzeit: $t_{ges} = 20{,}85\, s$

Aufgabenblatt zum 13. 11. 2003

5. Für einen PKW soll der Bremsvorgang auf einer geraden und auf einer kreisförmigen Strecke verglichen werden. Die Haftreibungszahl zwischen den PKW Reifen und trockenem Asphalt beträgt $\mu_{H,\max} = 1{,}0$. (Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass der Wert der Haftreibungszahl $\mu_{H,\max}$ unabhängig von der Kraftrichtung ist.)

a. Wie groß darf die Bremsverzögerung auf gerader Strecke sein, damit der PKW nicht rutscht?

b. Bestimmen Sie für eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 144\, km/h$ den kürzesten Bremsweg und die Bremszeit auf gerader Strecke.

c. Betrachten Sie zum Vergleich einen Bremsvorgang in einer Kurve (kreisförmige Strecke mit einem Kurvenradius von 200 m) mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 144\, km/h$). Wie groß kann die Bremsverzögerung in diesem Fall höchstens sein?

d. Bestimmen Sie den Bremsweg und die Bremszeit (für eine als konstant angenommene Bremsverzögerung) bei der Kreisfahrt

Lösungen:

5a. Bedingung: Die Kraft, die die Verzögerung a_B verursacht, $F_a = m \cdot |a_B|$, muss kleiner (genauer: kleiner gleich) als die Haftreibungskraft $F_H = \mu_{H,\max}\, F_N = \mu_{H,\max} mg$ sein.

Betrag der Bremsverzögerung: $|a_B| \le \mu_{H,\max}\, g = 1{,}0 \cdot 10\, \frac{m}{s^2} = 10\, \frac{m}{s^2}$

Maximale Bremsverzögerung: $a_B = -10\, \frac{m}{s^2}$

5b. Für die Bremsverzögerung gilt: $a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_B - 0}$

für die Bremszeit folgt: $t_B = \frac{0 - v_0}{a_B} = -\frac{v_0}{a_B} = -\frac{40\ m/s}{-10\ m/s^2} = +4{,}0\ s$

Bremsweg für $a_B = -10\,m/s^2$: $s_B = v_0 \cdot t_B + \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot t_B^2 = -\frac{v_0^2}{a_B} + \frac{1}{2} a_B \frac{v_0^2}{a_B^2}$

$$s_B = -\frac{v_0^2}{2a_B} = 80\ m$$

5c. Die Gesamtbeschleunigung $\vec{a}_{ges}$ ergibt sich durch Vektoraddition der Radialbeschleunigung $\vec{a}_R$ und der tangential wirkenden Bremsverzögerung $\vec{a}_B$. $\vec{a}_{ges} = \vec{a}_R + \vec{a}_B$

Für die Beträge gilt: $|\vec{a}_{ges}| = \sqrt{|\vec{a}_R|^2 + |\vec{a}_B|^2}$

und $|\vec{a}_B| = \sqrt{|\vec{a}_{ges}|^2 - |\vec{a}_R|^2}$

Maximale Radialbeschleunigung: $|a_R| = \frac{v_0^2}{R} = \frac{40^2\ m^2/s^2}{200\ m} = 8\ \frac{m}{s^2}$

Für die Gesamtbeschleunigung gilt: $F_R = \mu_{H,\max} \cdot m \cdot g \geq m \cdot |a_{ges}| = F_{Tr}$

und $|a_{ges}| \leq 10\ \frac{m}{s^2}$

Maximale Bremsverzögerung: $|\vec{a}_B| \leq \sqrt{|\vec{a}_{ges}|^2 - |\vec{a}_R|^2}$

$$|\vec{a}_B| \leq \sqrt{10^2 - 8^2}\ \frac{m}{s^2} = 6\frac{m}{s^2}$$

5d Bremsweg für $a_B = -6\ m/s^2$: $s_B = v_0 \cdot t_B + \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot t_B^2$

$$s_B = -\frac{v_0^2}{a_B} + \frac{1}{2} a_B \frac{v_0^2}{a_B^2} = -\frac{v_0^2}{2a_B} = 133{,}3\ m$$

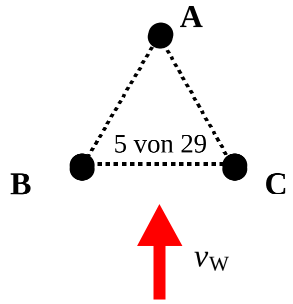
für die Bremszeit folgt: $t_B = \frac{0 - v_0}{a_B} = -\frac{v_0}{a_B} = -\frac{40\ m/s}{-6\ m/s^2} = 6{,}66\ s$

6. Ein Flugzeug fliegt einen Dreieckskurs entlang der Punkte A → B → C → A. Die Seiten des Dreiecks sind jeweils $s_0 = 100\,km$ lang, die Fluggeschwindigkeit beträgt $v_0 = 150\frac{km}{h}$.

a. Berechnen Sie zunächst die Flugzeit unter der Annahme, dass während des Fluges kein Seitenwind herrscht.

b. Berechnen Sie die Flugzeit unter der Annahme eines während des gesamten Fluges konstanten Seitenwindes v_W = 50 km h^{-1}, der senkrecht zur Verbindungslinie von B ↔ C wirkt.

c. Vergleichen Sie die unter **a.** und **b.** berechneten Flugzeiten. Welche prozentualen Änderungen ergeben sich für die Teilstrecken A→B, B→C und C→A, sowie für die Gesamtstrecke A → B → C → A?



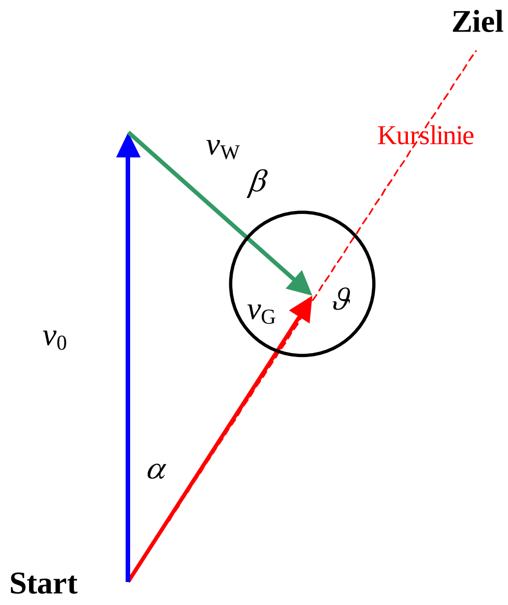
Lösungen:

6a. Gesamtstrecke: $s_{ges} = 3 \cdot 100\,km = 300\,km$

Geschwindigkeit während des Fluges: $v_0 = 150\,\frac{km}{h}$

Gesamte Flugzeit: $t_{ges} = \frac{s_{ges}}{v_0} = \frac{300\,km\,h}{150\,km} = 2\,h = 120\,\text{min}$

6b. Flug mit konstantem Seitenwind: (Allgemeine Lösung mit Hilfe des Cosinussatzes)



Das Flugzeug soll auf der Kurslinie vom Start zum Ziel gesteuert werden. Unter dem Winkel ϑ relativ zur Kurslinie herrscht Seitenwind (ϑ wird als Windwinkel bezeichnet: bei $\vartheta = 0°$ hat man Rückenwind, bei $\vartheta = 180°$ Gegenwind, bei $\vartheta = 90°$ Seitenwind von rechts, bei $\vartheta = 270°$ Seitenwind von links.) Die Kurslinie verbindet Start und Ziel. Bei Wind von der Seite, also wenn $\vartheta \neq 0°$ und $\vartheta \neq 180°$ ist, muss der Steuerkurs von der Kurslinie abweichen. Wenn Kurslinie, Windwinkel und Betrag der Windgeschwindigkeit gegeben sind, kann die (wahre) Grundgeschwindigkeit v_G berechnet werden und der Vorhaltewinkel α mit Hilfe des Cosinussatzes ermittelt werden. Für den Winkel β im Dreieck gilt: $\beta = 360° - \vartheta$

Bestimmung der Grundgeschwindigkeit:

Nach **Cosinussatz** gilt für Winkel β: $v_0^2 = v_W^2 + v_G^2 - 2 \cdot v_W \cdot v_G \cdot \cos\beta$

Durch Umstellung erhält man: $v_G^2 - 2 \cdot v_G \cdot (v_W \cdot \cos\beta) = v_0^2 - v_W^2$

Die Lösung für v_G lautet: $v_G = \sqrt{v_0^2 - v_W^2 \cdot (1 - \cos^2\beta)} + v_W \cdot \cos\beta$

Strecke A → B: $\vartheta = 210°$ und $ß = 150°$:

$$v_G = \left[\sqrt{150^2 - 50^2 \cdot (1 - \cos^2 150°)} + 50 \cdot \cos 150°\right] \frac{km}{h}$$

$$v_G = [147{,}90 + (-43{,}30)]\frac{km}{h} = 104{,}6\frac{km}{h}$$

Strecke B → C: $\vartheta = 90°$ und $ß = 270°$: (Man kann formal $\vartheta = 90°$ und $ß = 270°$ in die Lösungsformeln einsetzten oder zum besseren Verständnis der obigen Zeichnung auch den Umkehrkurs betrachten: $\vartheta = 270°$ und $ß = 90°$. Die Lösungen sind identisch, da $\cos 90° = \cos 270° = 0$).

$$v_G = \sqrt{v_0^2 - v_W^2\,(1 - \cos^2\beta)} + v_W\cos\beta = \sqrt{v_0^2 - v_W^2} = 141{,}4\frac{km}{h}$$

Strecke C → A: $\vartheta = 330°$ und $ß = 30°$:

$$v_G = \left[\sqrt{150^2 - 50^2\cdot(1 - \cos^2 30°)} + 60\cdot\cos 30°\right]\frac{km}{h}$$

$$v_G = [147{,}90 + 43{,}30]\frac{km}{h} = 191{,}2\frac{km}{h}$$

Flugzeit mit Seitenwind: $t_{ges} = t_{A\to B} + t_{B\to C} + t_{C\to A} = \frac{s_0}{v_{a\to B}} + \frac{s_0}{v_{B\to C}} + \frac{s_0}{v_{C\to A}}$

$$t_{ges} = \left(\frac{100\,km}{104{,}6\,km/h} + \frac{100\,km}{141{,}4\,km/h} + \frac{100\,km}{191{,}2\,km/h}\right)$$

$$t_{ges} = (0{,}9560\,h + 0{,}7072\,h + 0{,}5230\,h) = 2{,}1862\,h = 2\,h\,11{,}2\,\text{min}$$

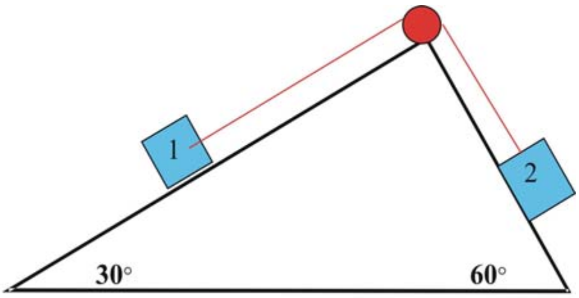
6c. Die Gesamtflugzeit mit Seitenwind ist 11,2 Minuten, entsprechend 9,3% länger. Ohne Wind wird für jede Seite des Dreiecks $t_0 = 40\,\text{min}$ benötigt.

A → B: Mit Wind: 57,36 Minuten, also 43,4% mehr
B → C: Mit Wind: 42,43 Minuten, also 6,1 % mehr
C → A: Mit Wind: 31,38 Minuten, also 21,55% weniger.

Aufgabenblatt für 20. 11. 2003

Verwenden Sie zur Vereinfachung g = 10 m s^{-2}.

7. Auf zwei unterschiedlich geneigten Dachflächen (siehe Skizze) liegen zwei Massen mit $m_1 = m_2 = 1$ kg, die mit einem Seil verbunden sind. Das Seil wird auf der Dachspitze mit einer Rolle umgelenkt. Die Massen von Seil und Rolle sollen vernachlässigt. werden.



a. Betrachten Sie ohne und mit <u>Berücksichtigung der Haftreibung</u> die Kräfte, die auf die beiden Massen m_1 und m_2 wirken. Wie groß muss die Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ mindestens sein, damit die Massen nicht ins Gleiten kommen?

b. Stellen Sie sich vor, man hätte links und rechts der Umlenkrolle Kraftmessgeräte im Seil. Welche Seilkräfte zeigen diese an, solange sich die Massen <u>nicht</u> bewegen?

c. Man nehme jetzt an, dass die in Aufgabe 7.a. berechnete Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ unterschritten werde (z. B. durch Regen, der auf das Dach fällt). Die beiden Massen beginnen zu gleiten. In welche Richtung? Die Gleitreibungszahl während des Rutschvorganges soll dann (einheitlich für m_1 und m_2) $\mu_G = 0{,}2$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung?

d. Berechnen Sie erneut die Kräfte im Seil. Welche Kräfte (einschließlich der Trägheitskräfte) wirken nach dem D'Alembertschen Prinzip jeweils auf die beiden Massen m_1 und m_2. Geben Sie Betrag und Richtung dieser Kräfte an.

Lösungen:

7a. Die Gewichtskraft kann jeweils in die senkrechte Normalkomponente F_N und die den Hang abwärts weisende Tangentialkomponente F_T zerlegt werden.

Für Masse m_1 gilt:
$$F_{T1} = m \cdot g \cdot \sin 30° = 5{,}00\,N$$
$$F_{N1} = m \cdot g \cdot \cos 30° = 8{,}66\,N$$
Für die Masse m2 gilt:
$$F_{T2} = m \cdot g \cdot \sin 60° = 8{,}66\,N$$
$$F_{N2} = m \cdot g \cdot \cos 60° = 5{,}00\,N$$

Ohne Haftreibung gilt wirkt auf die Masse m_2 wirkt eine größere Kraft $F_{T2} = 8{,}66\,N$ abwärts als auf m_1, $F_{T1} = 5{,}00\,N$. Betrachtet man m_2, so wirkt $F_{T2} = 8{,}66\,N$ abwärts, während die durch m_1 erzeugte Seilkraft $F_S = F_{T1} = 5\,N$ an m_2 aufwärts gerichtet ist. Die Differenz ist, da entgegengesetzt gerichtete Kräfte betrachtet werden, ungleich Null. Berücksichtigt man die Haftreibung, so ist die Summe aller Kräfte, die auf m_2 wirken, gleich Null, da die Körper in Ruhe bleiben sollen. Haftreibungskraft und Seilkraft wirken an m_2 in die selbe Richtung. Es gilt für die Beträge der Kräfte: $F_{T2} - (F_S + F_{H2}) = 0$.
Die Seilkraft F_S ist die Summe von F_{T1} und der Haftreibungskraft der Masse m_1, da beide die selbe Richtung besitzen:
$$F_{T2} - ((F_{T1} + F_{H1}) + F_{H2}) = 0$$
oder:
$$F_{T2} - F_{T1} = F_{H1} + F_{H2} = \mu_{H,\max} \cdot (F_{N1} + F_{N2})$$
Die Massen bleiben in Ruhe wenn für die Haftreibungszahl folgende Relation gilt:
$$\mu_{H,\max} \geq \frac{F_{T2} - F_{T1}}{F_{N1} + F_{N2}} = \frac{8{,}66 - 5{,}00}{8{,}66 + 5{,}00} = 0{,}2679\,.$$

7b. Die Seilkräfte sind in jedem Punkt des Seils, also auch links und rechts der Umlenkrolle gleich groß. Sie betragen für $\mu_{H.\max}$

links der Umlenkrolle:
$$F_S = F_{T1} + F_{H,\max 1} = 5\,N + 0{,}27 \cdot 8{,}66\,N = 7{,}32\,N$$
rechts der Umlenkrolle:
$$F_S = F_{T2} - F_{H,\max 2} = 8{,}66\,N - 0{,}27 \cdot 5\,N = 7{,}32\,N$$

7c. Die Masse m_2 gleitet abwärts, die Masse m_1 aufwärts. Die Summe der Tangentialkräfte und Gleitreibungskräfte ist ungleich Null. Die Resultierende bewirkt nach dem zweiten Newtonschen Axiom (Aktionsprinzip) eine Beschleunigung:
$$F_{T2} - ((F_{T1} + F_{G1}) + F_{G2}) = m_{ges} \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a \geq 0$$
Beschleunigung:
$$a = \frac{1}{m_{ges}}(F_{T2} - F_{T1} - F_{G1} - F_{G2})$$
$$a = \frac{(8{,}66 - 5{,}00 - 1{,}00 - 1{,}732)\,N}{2\,kg} = 0{,}464\,m\,s^{-2}$$

7d. Das Seil überträgt die auf die Masse m_1 wirkenden Kräfte. Wie in 7.b. muss auch hier zunächst die Summe der Kraft F_{T1} und der Gleitreibungskraft $F_{G1} = \mu_G \cdot F_{N1}$ aufgebracht werden. Nach dem D'Alembertschen Prinzip wirkt aber zusätzlich noch die Trägheitskraft $m_1 \cdot a$ entgegengesetzt zur Beschleunigungsrichtung, also in die selbe Richtung wie F_{T1} und F_{G1}.

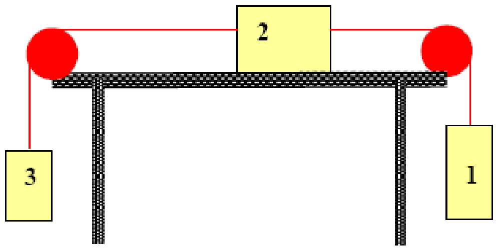
Die Seilkraft ist also: $F_S = F_{T1} + \mu_G \, F_{N1} + m_1 \cdot a$

$$F_S = 5{,}000\,N + 0{,}2 \cdot 8{,}660\,N + 0{,}464\,N = 7{,}196\,N$$

Nach dem D'Alembertschen Prinzip ist unter Einbeziehung der Trägheitskräfte die Summe aller Kräfte an beiden Massen gleich Null. Auf die Masse m_1 wirken also die Kräfte $F_{T1} = 5{,}000\,N$, die Reibungskraft $F_{G1} = \mu_G \cdot F_{N1} = 1{,}732\,N$ und die Trägheitskraft $m_1 \cdot a = 0{,}464\ N$ abwärts. Die Seilkraft $F_S = 7{,}196\,N$ wirkt an m_1 aufwärts.

An der Masse m_2 wirkt $F_{T2} = 8{,}660\,N$ abwärts. Die Gegenkräfte sind die Seilkraft $F_S = 7{,}196\,N$, die Gleitreibungskraft $F_{G2} = \mu_G \cdot F_{N2} = 1{,}000\,N$ und die Trägheitskraft $m_2 \cdot a = 0{,}464\,N$.

8. Drei Massen, $m_1 = 2$ kg $m_2 = 3$ kg und $m_3 = 1$ kg, sind mit (masselosen) Seilen verbunden. m_2 liegt auf einer horizontalen Unterlage, m_1 und m_3 hängen senkrecht an den Seilen herab. Die Seile werden mit masselosen Rollen mit Radius R = 0,1 m umgelenkt.



a. Welche Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ muss für m_2 unterschritten werden, damit sich die Massen bewegen?

b. Die Gleitreibungszahl μ_G für m_2 betrage 0,2. Wie groß ist die Beschleunigung der Massen?

c. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung der Rollen?

d. Welche Drehzahl haben die Umlenkrollen, wenn sich die Massen um die Strecke s = 1 m bewegt haben?

Lösungen:

8a. Die Gewichtskraft der Masse m_1 beträgt $F_{G1} = 20\,N$, die der Masse m_3 $F_{G3} = 10\,N$. Ohne Reibung von Masse m_2 würde sich das System nach rechts bewegen. Bewegt sich das System jedoch nicht, so gilt: Die Seilkraft erzeugt durch die Gewichtskraft von m_1 ($F_{G1} = 20\,N$), die nach rechts zieht, ist gleich der Summe der Haftreibungskraft von m_2 ($F_{R2} = \mu_{H,\max}\ F_{N2}$) und der Gewichtskraft von m_3 ($F_{G3} = 10\,N$), da diese beide Kräfte entgegengesetzt zu F_{G1} (nach links)gerichtet sich. Die Normalkraft von m_2 beträgt: $F_{N2} = m_2\ g = 30N$.

Lösung: $$\mu_{H,\max} \le \frac{F_{G1} - F_{G3}}{F_{N2}} = \frac{m_1 - m_3}{m_2} = \frac{1}{3}$$

b. Gegeben: Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}2$. Gesucht: Beschleunigung a.

Gewichtskraft von m_1: $F_{G1} = m_1\ g = 20N$

Gewichtskraft von m_3: $F_{G3} = -m_1\ g = 10N$

Reibungskraft von m_2: $F_{R2} = -\mu_G\ F_{N2} = 6\,N$

Trägheitskraft von m_1, m_2 und m_3: $F_{Tr} = -(m_1 + m_2 + m_3)a$

D'Alembertsches Prinzip: $(F_{G1} + F_{G3} + F_{R2}) + F_{Tr} = 0$

Nach Einsetzten folgt: $m_1 g - m_3 g - \mu_G m_2 g - m_1 a - m_2 a - m_3 a = 0$

Lösung: $a = \dfrac{(m_1 - m_3 - \mu_G\, m_2)\cdot g}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{0{,}4}{6} g = 0{,}666\, m\, s^{-2}$

c. Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0{,}666\ m}{0{,}1\ m\ s^2} = 6{,}66\ s^{-2}$

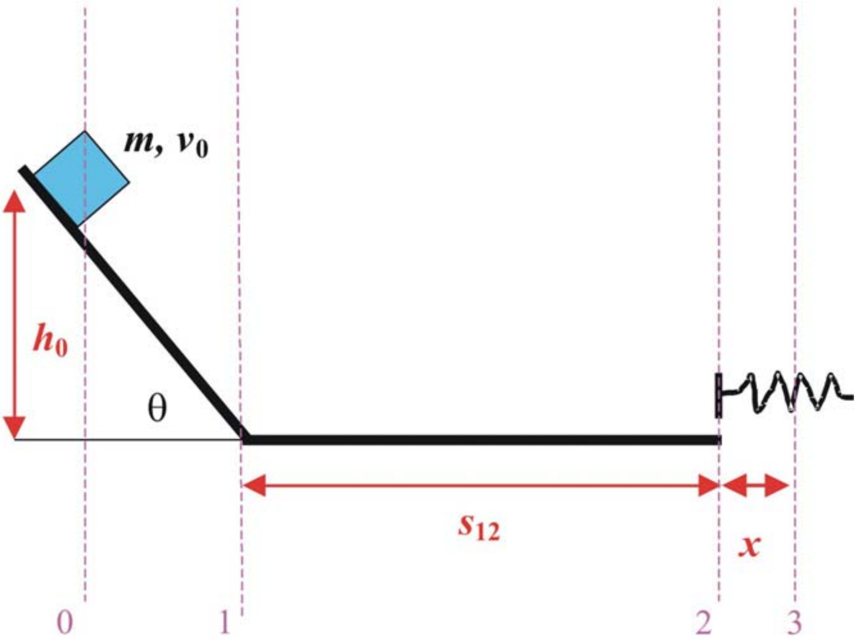
d. Nach $s_1 = 1\,m$ Fallweg hat m_1 die Geschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2\,a\,s_1} = 1{,}1547\ m\,s^{-1}$$

Drehzahl der Rolle: $n = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{v_1}{2\pi\ r} = 1{,}837\ s^{-1}$

Aufgabenblatt zum 27. 11. 2003

9. Die Masse m = 1 kg rutscht mit der Geschwindigkeit v_0 = 5 m/s aus einer Höhe von h_0 = 1 m eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel θ = 45° hinab. Am Ende der schiefen Ebene rutscht sie auf der Strecke s_{12} = 2 m horizontal weiter und trifft am Ende auf eine Feder mit der Federkonstanten D = 4500 N/m.



a. Berechnen Sie die Energien E_{ges}, E_{kin} und E_{pot} sowie die Reibungs- und Verformungsarbeit und die Geschwindigkeiten in den Punkten 0 bis 3 der Bahn <u>ohne Berücksichtigung der Gleitreibung</u>. Wie groß ist der Federweg x? Wie hoch kann die Masse nach dem Rückprall auf der schiefen Ebene wieder steigen?

Berechnen Sie die Energien E_{ges}, E_{kin} und E_{pot} sowie die Reibungs- und Verformungsarbeit und die Geschwindigkeiten in den Punkten 0 bis 3 der Bahn <u>mit Berücksichtigung der Gleitreibung</u> (μ_G = 0,4). Wie groß ist der Federweg x? Wie hoch kann die Masse nach dem Rückprall auf der schiefen Ebene steigen?

b. Wie groß muss v_0 gewählt werden, damit die Masse nach dem Rückprall wieder in die Ausgangshöhe h_0 steigen kann?
(Gleitreibungszahl wie vor, vernachlässigen Sie aber zur Vereinfachung die Reibung auf dem Federweg x)

Verwenden Sie g = 10 m/s²

Lösungen:

9a. Gleitreibungsarbeit auf der Strecke 0 → 1: $W_{R01} = \mu_G (m\, g \cos\theta) \frac{h_0}{\sin\theta} = 4\, J$

Gleitreibungsarbeit auf der Strecke 1 → 2:. $W_{R12} = \mu_G (m\, g) s_{12} = 8\, J$

	Bezugs-punkt	E_{ges} J	E_{kin} J	E_{pot} J	W_{R01} J	W_{R12} J	W_E J	v m/s
ohne Reibung	0	22,5	12,5	10	-	-	-	5
	1	22,5	22,5	0	0	-	-	6,71
	2	22,5	22,5	0	0	0	-	6,71
	3	22,5	0	0	0	0	22,5	0
mit Reibung	0	22,5	12,5	10	-	-	-	5
	1	22,5	18,5	0	4	-	-	6,08
	2	22,5	10,5	0	4	8	-	4,58
	3	22.5	0	0	4	8	10,5	0

Federweg ohne Reibung: $x = \sqrt{\frac{2 \cdot W_E}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22{,}5\, N\, m}{4500\, N/m}} = 0{,}100\, m$

Federweg mit Reibung: $x = \sqrt{\frac{2 \cdot W_E}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10{,}5\, N\, m}{4500\, N/m}} = 0{,}068\, m$

Rückweg ohne Reibung: Gesamte Energie $E_{ges} = 22{,}5\, J$ kann in potentielle Energie umgesetzt werden: $E_{pot} = E_{ges}$

und für die Höhe gilt: $h_{rück} = \frac{E_{ges}}{m \cdot g} = 2{,}25\, m$

Rückweg mit Reibung: Nach dem Hinweg **0 → 1 → 2 → 3** sind in der Feder 10,5 J gespeichert. Beim Rückweg verliert die Masse auf dem Weg von 2 → 1wieder $W_{R21} = W_{R12}$ = 8 J Reibungsarbeit. Am Bezugspunkt **1** bleiben also $E_{kin} = 2{,}5\, J$ als kinetische Energie, die dann in Reibungsarbeit auf der schiefen Ebene sowie potentielle Energie umgesetzt werden:

$$E_{kin} = 2{,}5\, J = \mu_G \cdot (m \cdot g \cdot \cos\theta) \cdot \frac{h_{Rück}}{\sin\theta} + m \cdot g \cdot h_{Rück}$$

und für die Höhe gilt: $h_{Rück} = \frac{2{,}5\, J}{m \cdot g \cdot (\mu_G \cdot \cot\theta + 1)} = 0{,}178\, m$

9b. Die kinetische Energie am Bezugspunkt **0** muss gleich der Summe aller auf dem Hin- und Rückweg benötigten Reibungsarbeiten sein. Die Summer der Reibungsarbeiten ist nach Aufgabe **8.a.** $W_{R\,ges} = 4\, J + 8\, J + 8\, J + 4\, J = 24\, J$.

Es gilt: $$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{R\,ges}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 24\,kg\,m^2}{1kg\;s^2}} = 6{,}9\frac{m}{s}$$

10. Ein LKW mit der Masse $m_{LKW} = 25\,t$ erreicht eine lange Strecke mit einem 10%igem Gefälle.

a. Welche mechanische Leistung müssten die Bremsen in Wärme umwandeln, damit der LKW die Geschwindigkeit 50 km/h halten kann.

b. Bei langer Bergabfahrt soll die Bremsleistung den Wert von 300 kW nicht übersteigen. Wie sollte der Fahrer des LKW sich deshalb verhalten.

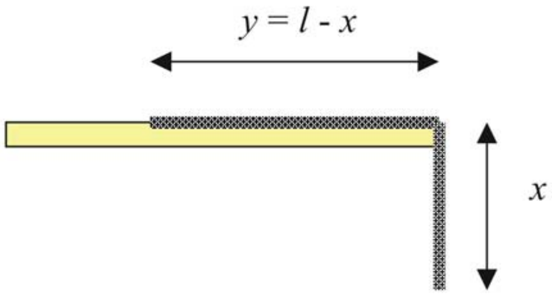
Lösungen:

10a. Gefälle mit 10% entspricht: $\frac{G}{A} = 0{,}1 = \tan\alpha$ mit $\alpha = 5{,}7°$

Leistung: $P = F \cdot v = mg\,\sin\alpha \cdot v = 345kW$

10b. Maximale Geschwindigkeit: $v_{\max} = \frac{P_{\max}}{F} = \frac{P_{\max}}{m\,g\sin\alpha} = 43\frac{km}{h}$

11.- Eine Kette der Masse $m_{ges} = 1kg$ und Gesamtlänge $l = 1\,m$ (mit homogener Massenverteilung entlang der Länge *l*) liegt auf einer Tischplatte. Ein Stück der Kette mit der Länge *x* hängt über die Tischkante hinab. Die Länge der Kette auf dem Tisch ist $y = l - x$. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_{H,\max} = 0{,}5$, die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}4$.



a. Wie lang muss das überhängende Stück x_0 sein, damit die Kette ins Rutschen kommen kann?

b. Rutscht die Kette mit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung? Wie lautet die Gleichung für die Beschleunigung? Zeichnen Sie die Funktion *a*(x).

c. Welche Geschwindigkeit hat die Kette, wenn sie gerade in voller Länge von der Tischkante geglitten ist?

Lösungen:

11a. Masse des überhängenden Stücks: $m(x) = \frac{x}{l} m_{ges}$

Gewichtskraft für dieses Stück: $F_G(x) = m(x)g$

Reibungskraft: $F_R(x) = -\mu_{H,\max}\,F_N(x)$

$$F_R(x) = -\mu_{H,\max}\left(m_{ges} - m(x)\right)g$$

Bedingung für Bewegung: $F_G(x_0) \geq -F_R(x_0)$

$$\frac{x_0}{l} m_{ges}\, g \geq \mu_{H,\max}\left(m_{ges} - \frac{x_0}{l} m_{ges}\right) g$$

$$\frac{x_0}{l} \geq \mu_{H,\max}\left(1 - \frac{x_0}{l}\right)$$

$$x_0 \geq \mu_{H,\max}\, l - x_0 \mu_{H,\max}$$

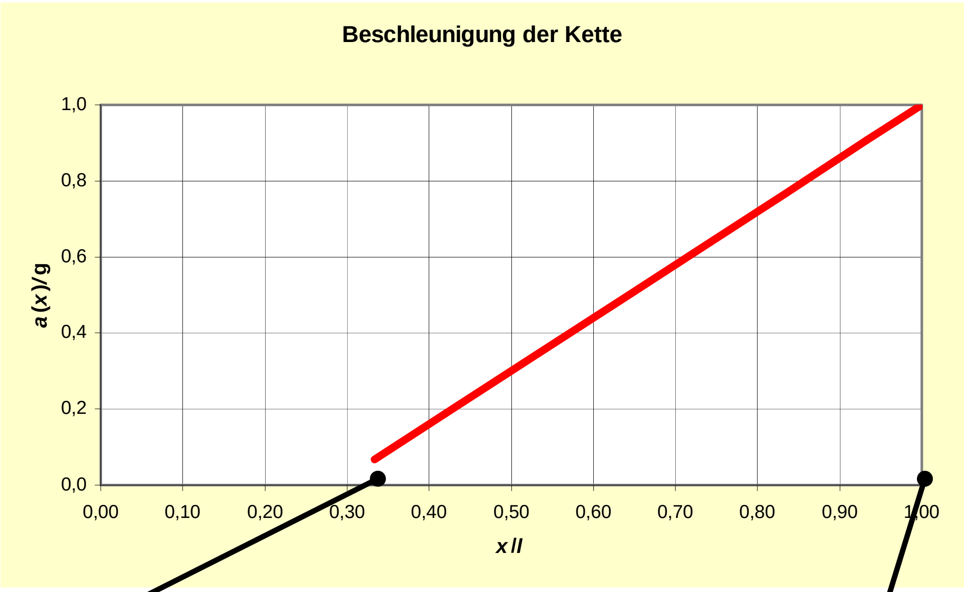
Lösung für x_0: $x_0 \geq \dfrac{\mu_{H,\max}}{1+\mu_{H,\max}} \cdot l = \dfrac{0{,}5}{1{,}5} \cdot 1\ m = \dfrac{1}{3} m$

11b. Gewichtskraft und Reibungskraft sind entgegengesetzt gerichtet. Nach dem D'Alembertschen Prinzip gilt: $\left(F_G(x) + F_R(x)\right) - m\, a(x) = 0$

$$a(x) = \frac{F_G(x) + F_R(x)}{m_{ges}} = \left(\frac{x}{l} - \mu_G\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) g$$

$$a(x) = \frac{x - \mu_G\, l + \mu_G\, x}{l} g$$

Für $\dfrac{x}{l} \geq \dfrac{1}{3}$ gilt: $a(x) = \left(\dfrac{x}{l}(1+\mu_G) - \mu_G\right) g = \left(1{,}4\dfrac{x}{l} - 0{,}4\right) g$



Die Beschleunigung ist also nicht konstant.

Wenn *x*/*l* = 0,333 ist *a*/*g*= 0,066

wenn *x*/*l* = 1 ist *a*/*g* = 1.

11c. Setze z. B. die potentielle Energie dann, wenn die Kette vollständig vom Tisch geglitten ist und $\dfrac{x}{l} = 1$, gleich Null. Folge: Beim Beginn des Rutschvorgangs, dann wenn $\dfrac{x}{l} = \dfrac{1}{3}$ ist, befindet Teil (1) der Kette mit $\dfrac{2}{3} m_{ges}$ auf dem Tisch und besitzt potenzielle Energie. Wenn die Kette vom Tisch gerutscht ist (nach Definition soll E_{pot} dann Null sein), hat sich der Schwerpunkt von Teil (1) um $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot l$ nach unten bewegt. Die potenzielle Energie des Teils (1) im Anfangszustand ist also:

$$E_{pot}^{1} = \left(\frac{2}{3} m_{ges}\right) g \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot l\right)$$

Es folgt: $$E_{pot}^{1} = \frac{2}{9} m_{ges}\, g\, l = \frac{20}{9}\ J$$

Der andere Teil(2), der $\frac{1}{3} m_{ges}$ besitzt, hängt in der Anfangsposition bereits herab. In der Endposition ist der auf dem Tisch liegende Teil (der $\frac{2}{3} l$ lang ist) vollständig vom Tisch geglitten und der Scherpunkt von Teil (2) befindet sich deshalb auch $\frac{2}{3} l$ tiefer.

Es folgt: $$E_{pot}^{2} = \left(\frac{1}{3} m_{ges}\right) g \left(\frac{2}{3}\, l\right) = \frac{2}{9} m_{ges}\ g\ l = \frac{20}{9}\ J$$

Die gesamte potentielle Energie ist: $$E_{ges} = E_{pot} = E_{pot}^{1} + E_{pot}^{2} = \frac{4}{9} m_{ges}\ g\, l = \frac{40}{9}\ J$$

Die potentielle Energie wird in kinetische Energie und in Reibungsarbeit verwandelt.

Kinetische Energie: $$E_{kin} = \frac{1}{2} m_{ges}\, v^2$$

Reibungsarbeit: $$W_R = \int_0^{0{,}666\, l} F_R(y)\, dy = \int_0^{0{,}666\, l} \mu_G\ m(y)\ g\ dy$$

$$W_R = \mu_G\ g \int_0^{0{,}666\, l} m(y) dy = \frac{\mu_G\ g\ m_{ges}}{l} \int_0^{0{,}666\, l} y\ dy$$

$$W_R = \frac{\mu_G\ g\ m_{ges}}{l} \left. \frac{1}{2} y^2 \right|_0^{0{,}666\, l} = \frac{\mu_G\ g\ m_{ges}}{l} \frac{1}{2} \frac{4}{9} l^2$$

Lösung: $$W_R = \frac{2}{9}\ \mu_G\ g\ m_{ges} l = \frac{2}{9}\cdot 0{,}4\cdot 10\cdot 1\cdot 1\ J = \frac{8}{9}\ J$$

Kinetische Energie: $$E_{kin} = E_{ges} - W_R = \frac{40}{9} J - \frac{8}{9} J = \frac{32}{9} J$$

Lösung für v: $$v = \sqrt{\frac{2\cdot\left(E_{ges} - W_R\right)}{m_{ges}}} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(\frac{32}{9} J\right)}{1 kg}} = 2{,}666 \frac{m}{s}$$

Alternativer Lösungsansatz:
Man berechne die Beschleunigungsarbeit. Diese entspricht der Fläche unter der roten Linie im oben gezeigten a/x Diagramm:

Beschleunigunsarbeit: $$W_a = \int_A^E F_a\ dx = \int_A^E m\, a(x) dx$$

Am Anfangspunkt (A) gilt: $$x(A) = \frac{1}{3} l$$

Es folgt für a(A): $a(A) = \left(1{,}4\frac{x(A)}{l} - 0{,}4\right)g = \left(\frac{1{,}4}{3} - \frac{1{,}2}{3}\right)g = \frac{2}{30}g$

Am Endpunkt (E) gilt: $x(E) = 1l$

Es folgt für a(E): $a(E) = \left(1{,}4\frac{x(E)}{l} - 0{,}4\right)g = (1{,}4 - 0{,}4)g = g$

Trapezfläche unter der Kurve * m: $W_a = m \cdot \left[\frac{\frac{2}{30}g + 1g}{2} \cdot \frac{2}{3}l\right] = \frac{32}{90}m\,\mathrm{lg} = \frac{32}{9}J$

Die Beschleunigungsarbeit Wa wird in kinetische Energie umgewandelt:

Es folgt (wie oben): $E_{kin} = \frac{32}{9}J$ und $v = 2{,}666\frac{m}{s}$

Aufgabenblatt zum 4. 12. 2003

12. Ein Schmied bearbeitet ein Werkstück (Masse: $m_W = 2\ kg$) mit einem Hammer (Masse: $m_H = 6\ kg$) auf einem Amboss (Masse: $m_A = 192\ kg$). Betrachten Sie den Schlag als vollkommen unelastisch. Die Wechselwirkung des Amboss mit der Unterlage muss nicht berücksichtigt werden.

a. Welcher Anteil der kinetischen Energie des Hammers dient der Verformung des Werkstückes?

Lösung:

12a. Bei einem „vollkommen unelastischer Schlag" besitzen der Hammer (H), das Werkstück (W) und der Amboss (A) nach dem Schlag die gleiche Geschwindigkeit. Der Schlag mit dem Hammer überträgt Impuls auf das Werkstück und den Amboss. (Die Bewegung des Amboss muss dann durch die Unterlage bedämpft werden.)

Lösung:

Impulserhaltungssatz: $m_H v_H = (m_H + m_A + m_W) \cdot u$

Energieerhaltungssatz: $E^0_{kin} = \frac{1}{2}m_H v_H^2 = \frac{1}{2}(m_H + m_A + m_W) \cdot u^2 + Q$

Es folgt: $\frac{Q}{E^0_{kin}} = 1 - \frac{m_H}{m_H + m_A + m_W} = 97\ \%$

13. Auf einer waaggerechten Straße fährt ein PKW(P) (m_P = 1000 kg) mit v_P = 90 km/h auf einen vor ihm fahrendes LKW (L) (m_L = 9 000 kg) auf. Die beiden Fahrzeuge verkeilen sich ineinander und rutschen anschließend noch mit der Gleitreibungszahl: $\mu_G = 0{,}8$ eine Strecke von 6,25 m.

a. Welche Rutschgeschwindigkeit haben die Fahrzeuge unmittelbar nach dem Unfall?

b. Wie groß ist die mittlere Verzögerung während des Rutschvorgangs?

c. Wie groß ist die maximale und die mittlere Bremsleistung?

d. Welche Geschwindigkeit hatte der LKW vor dem Zusammenstoß?

e. Wie groß war der Kraftstoß beim Aufprall?

f. Wie viel Prozent der anfänglichen Energie der beiden Fahrzeuge verbleibt als kinetische Energie, wie viel Prozent wird in Verformungs-/Wärmeenergie, wie viel als Reibungsarbeit beim Rutschen verbraucht?

Lösungen:

13a. Die kinetische Energie E_{kin}^{L+P}, die die beiden verkeilten Fahrzeuge nach dem Zusammenstoß haben, wird in Reibungsarbeit W_R verwandelt:

$$E_{kin}^{P+L} = \frac{1}{2}\cdot(m_P + m_L)\cdot u_{P+L}^2 = \mu_G (m_P + m_L) g\, s_R = W_R$$

Geschwindigkeit u_{P+L}: $u_{P+L} = \sqrt{2\,\mu_G\, g\, s_R} = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$

13b. (Durchschnitts-)Verzögerung: $a_R = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - u_{P+L}}{t_R} = -\frac{u_{P+L}}{t_R}$

es folgt: $t_R = -\frac{u_{P+L}}{a_R}$

und: $s_R = u_{P+L}\, t_R + \frac{1}{2} a_R\, t_R^2 = -\frac{u_{P+L}^2}{a_R} + \frac{1}{2}\frac{u_{P+L}^2}{a_R} = -\frac{1}{2}\frac{u_{P+L}^2}{a_R}$

Verzögerung beim Rutschen: $a_R = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u_{P+L}^2}{s_R} = -8\frac{m}{s^2}$

13c. Kraft für die Verzögerung: $F_a = (m_P + m_L) a_R = 80\,kN$

Maximale Geschwindigkeit: $u_R^{\max} = u_{P+L} = 10\frac{m}{s}$

Maximalleistung: $L_{\max} = F_a \cdot u_R^{\max} = 800\,kW$

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\overline{u}_R = \frac{s_R}{t_R} = \frac{s_R \cdot a_R}{v_{P+L}} = 5\frac{m}{s}$

Durchschnittsleistung: $\overline{L} = F_a \cdot \overline{u}_R = 400\,kW$

13d. Impulserhaltungssatz: $p_P + p_L = m_p v_P + m_L v_L = (m_P + m_L) u_{P+L} = p_{P+L}$

Geschwindigkeit des LKW: $v_L = \frac{1}{m_L}(p_{L+P} - p_P) = \frac{(m_P + m_L)u_{P+L} - m_P\, v_P}{m_L}$

$$v_L = \frac{(m_P + m_L)u_{P+L} - m_P\, v_P}{m_L} = 8{,}33\frac{m}{s} = 30\frac{km}{h}$$

13e. Kraftstoß für PKW: $\int \vec{F}\, d\vec{t} = \Delta\vec{p}_P$

$$\Delta\vec{p}_P = (m_P v_P - m_p u_{L+P}) = 25\,kNs - 10\,kN\,s = 15\,kNs$$

Kraftstoß für LKW: $\int \vec{F}\, d\vec{t} = \Delta\vec{p}_L$

$$\Delta\vec{p}_L = -(m_L\, v_L - m_L u_{L+P}) = -(75\,kNs - 90\,kNs) = 15\,kN\,s$$

13f. Energieerhaltungssatz: $E_{kin}^{P} + E_{kin}^{L} = E_{kin}^{P+L} + Q$

Kinetische Energie des PKW: $E_{kin}^{P} = \frac{1}{2} m_P\, v_P^2 = 312{,}5\,kJ$

Kinetische Energie des LKW: $E_{kin}^{L} = \frac{1}{2} m_L\, v_L^2 = 312{,}5\,kJ$

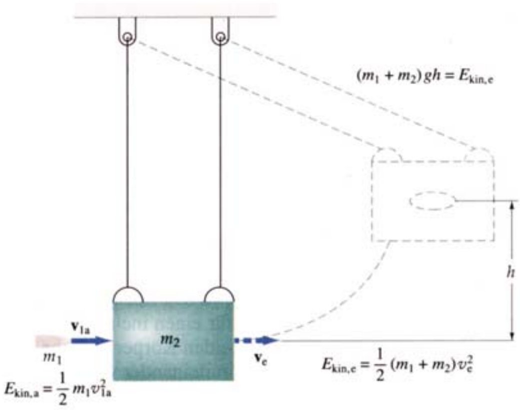
Kin. Energie LKW+PKW: $E_{kin}^{P+L} = \frac{1}{2} m_{P+L}\, u_{P+L}^2 = 500\,kJ$

Verformungs-/Wärmeenergie: $Q = E_{kin}^{P} + E_{kin}^{L} - E_{kin}^{P+L} = 625\,kJ - 500\,kJ = 125\,kJ$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{kin}^{P} + E_{kin}^{L}} = \frac{125\,kJ}{625\,kJ} = 20\%$,

Reibungsenergie: $\frac{W_R}{E_{kin}^{P} + E_{kin}^{L}} = \frac{500\,kJ}{625\,kJ} = 80\%$

14. Ein ballistisches Pendel der Masse m_2 = 10 kg hänge an einem Seil der Länge l. Durch eine Geschosskugel der Masse m_1 = 10 g hebt sich der Schwerpunkt um h = 5 cm. Berechnen Sie die Geschossgeschwindigkeit v_1.



Lösung:

14. Beim Einschuss der Kugel gilt der Impulserhaltungssatz:

$$p_1 + p_2 = p_e$$

wobei p_e der gemeinsame Impuls von Geschoss und Pendel ist.

Da $p_2 = 0$, gilt: $m_1\, v_1 = (m_1 + m_2) v_e$

Es folgt: $v_e = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$

Beim Einschuss der Kugel in die Pendelmasse gilt der Impuls- jedoch nicht der Energieerhaltungssatz (für die mechanischen Energien), da ein Teil der Energie in Wärme und Verformungsarbeit verwandelt wird. Nach dem Einschuss besitzt das Pendel eine von Null verschiedenen Geschwindigkeit und eine kinetische Energie E_{kin}^{1+2}. Diese Energie wird beim Aufsteigen des Pendels in potentielle Energie verwandelt. Es gilt der Energieerhaltungssatz (warum?):

$$E_{kin}^{1+2} = E_{pot}^{1+2}$$

Es gilt: $E_{pot}^{1+2} = (m_1 + m_2) g\, h$

Es gilt: $E_{kin}^{1+2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_e^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2$

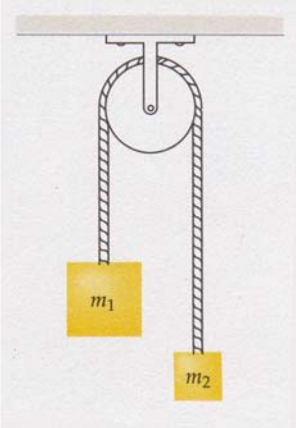
Lösung: $v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2\, g\, h} = 1001 \frac{m}{s}$

Aufgabenblatt zum 11. 12. 2003

15. Zwei Massen $m_1 = 2$ kg und $m_2 = 1$ kg sind mit einem Seil verbunden, das über eine Umlenkrolle (homogener Zylinder) mit der Masse $m_R = 1$ kg geführt ist (siehe Zeichnung).

a. Mit welcher Beschleunigung a bewegen sich die Massen?

b. Berechnen Sie die Seilkräfte links (F_{S1}) und rechts (F_{S2}) von de Rolle.



Lösungen:

15a. Da $m_1 > m_2$ ist, bewegen sich die beiden Massen nach links.

D'Alembertsches Prinzip (für m_1): $\left(F_G^1 - F_S^1\right) - m_1\, a = 0$

Seilkraft an m_1: $F_S^1 = F_R + F_S^2$

Kraft zur Erzeugung von M_R: $F_R = \frac{M_R}{r} = \frac{J\,\alpha}{r} = \frac{\left(\frac{1}{2} m_R\, r^2\right)\cdot\left(\frac{a}{r}\right)}{r} = \frac{1}{2} m_R a$

Seilkraft an m_2: $F_S^2 = F_G^2 + m_2\, a = m_2\, g + m_2\, a$

Es folgt: $m_1\, g - \frac{1}{2} m_R\, a - m_2\, g - m_2\, a - m_1\, a = 0$

Lösung: $a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2} \cdot g = \frac{1}{3{,}5} \cdot g = \frac{2}{7} g$

$$a = \frac{2}{7} g = 0{,}2857\, g = 2{,}857 \frac{m}{s^2}$$

15b. Seilkraft links der Rolle: $F_S^1 = \frac{1}{2} m_R a + m_2\, g + m_2 a$

$$F_S^1 = \frac{10}{7} N + 10\, N + \frac{20}{7} N = \frac{100}{7} N = 14{,}28\, N$$

Seilkraft rechts der Rolle: $F_S^2 = m_2\, g + m_2 a$

$$F_S^2 = 10\, N + \frac{20}{7} N = \frac{90}{7} N = 12{,}85\, N$$

Kontrolle:

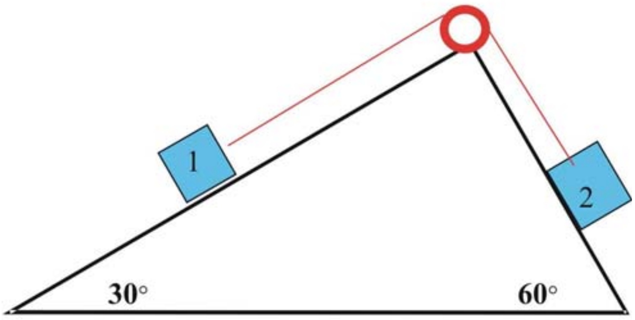
Gewichtskraft von m_1: $F_G^1 = m_2\, g = 20\, N$

Seilkraft an m_1: $F_S^1 = -\frac{100}{7} N = -14{,}28\, N$

Trägheitskraft von m_1: $F_{Tr}^1 = -m_1\, a = -\frac{40}{7} N = -5{,}71\, N$

Folgerung: Die Summe aller Kräfte ist Null.

16. Auf zwei unterschiedlich geneigten Dachflächen (siehe Skizze) liegen zwei Massen mit $m_1 = m_2 = 1$ kg, die mit einem Seil verbunden sind. Das Seil wird auf der Dachspitze mit einer Rolle umgelenkt. Die Massen des Seils soll vernachlässigt. werden, nicht jedoch die Masse der Umlenkrolle, die als **Hohlzylinder** mit $m_R = 1$ kg betrachtet werden kann.



a. Betrachten Sie ohne und mit Berücksichtigung der Haftreibung die Kräfte, die auf die beiden Massen m_1 und m_2 wirken. Wie groß muss die Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ mindestens sein, damit die Massen nicht ins Gleiten kommen?

b. Stellen Sie sich vor, man hätte links und rechts der Umlenkrolle Kraftmessgeräte im Seil. Welche Seilkräfte zeigen diese an, solange sich die Massen nicht bewegen?

c. Man nehme jetzt an, dass die in Aufgabe 7.a. berechnete Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ unterschritten werde (z. B. durch Regen, der auf das Dach fällt). Die beiden Massen beginnen zu gleiten. In welche Richtung? Die Gleitreibungszahl während des Rutschvorganges soll dann (einheitlich für m_1 und m_2) $\mu_G = 0{,}2$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung?

d. Berechnen Sie erneut die Kräfte im Seil. Welche Kräfte (einschließlich der Trägheitskräfte) wirken nach dem D'Alembertschen Prinzip jeweils auf die beiden Massen m_1 und m_2. Geben Sie Betrag und Richtung dieser Kräfte an.

Bitte verwenden Sie für Aufgabe 16 und 17 die Lösungen der Aufgaben 7 und 8. Die Auggaben sind bis auf die Tatsache, dass in Aufg. 7 u. 8 die Masse der Rollen vernachlässigt wurde, in Aufg 16 und 17 diese aber berücksichtigt werden sollen, identisch. Aufgabenteile, deren Lösungen vollständig identisch mit früheren sind, müssen natürlich nicht noch einmal bearbeitet zu werden. Es reicht aus, wenn Sie bemerken, dass die früheren Lösungen gelten.

Lösungen:

16a. Alle Bedingungen im Haftreibungsfall sind unabhängig von der Masse der Umlenkrolle. Deshalb ergeben sich gleiche Lösungen wie in Aufg. 7a.

Die Gewichtskraft kann jeweils in die senkrechte Normalkomponente F_N und die den Hang abwärts weisende Tangentialkomponente F_T zerlegt werden.

Für Masse m_1 gilt: $F_{T1} = m \cdot g \cdot \sin 30° = 5{,}00\,N$

$F_{N1} = m \cdot g \cdot \cos 30° = 8{,}66\,N$

Für die Masse m2 gilt: $F_{T2} = m \cdot g \cdot \sin 60° = 8{,}66\,N$

$F_{N2} = m \cdot g \cdot \cos 60° = 5{,}00\,N$

Ohne Haftreibung gilt wirkt auf die Masse m_2 wirkt eine größere Kraft $F_{T2} = 8{,}66\,N$ abwärts als auf m_1, $F_{T1} = 5{,}00\,N$. Betrachtet man m_2, so wirkt $F_{T2} = 8{,}66\,N$ abwärts,

während die durch m_1 erzeugte Seilkraft $F_S = F_{T1} = 5\,N$ an m_2 aufwärts gerichtet ist. Die Differenz ist, da entgegengesetzt gerichtete Kräfte betrachtet werden, ungleich Null. Berücksichtigt man die Haftreibung, so ist die Summe aller Kräfte, die auf m_2 wirken, gleich Null, da die Körper in Ruhe bleiben sollen. Haftreibungskraft und Seilkraft wirken an m_2 in die selbe Richtung. Es gilt für die Beträge der Kräfte: $F_{T2} - (F_S + F_{H2}) = 0$.
Die Seilkraft F_S ist die Summe von F_{T1} und der Haftreibungskraft der Masse m_1, da beide die selbe Richtung besitzen:

$$F_{T2} - ((F_{T1} + F_{H1}) + F_{H2}) = 0$$

oder:

$$F_{T2} - F_{T1} = F_{H1} + F_{H2} = \mu_{H,\max} \cdot (F_{N1} + F_{N2})$$

Die Massen bleiben in Ruhe wenn für die Haftreibungszahl folgende Relation gilt:

$$\mu_{H,\max} \geq \frac{F_{T2} - F_{T1}}{F_{N1} + F_{N2}} = \frac{8{,}66 - 5{,}00}{8{,}66 + 5{,}00} = 0{,}2679\,.$$

16b. Auch die Seilkräfte hängen im Haftreibungsfall nicht von der Masse der Umlenkrolle ab. Deshalb ergeben sich die gleichen Lösung wie in Aufg. 7b.
Die Seilkräfte sind in jedem Punkt des Seils, also auch links und rechts der Umlenkrolle gleich groß. Sie betragen für $\mu_{H.\max}$

links der Umlenkrolle: $F_S = F_{T1} + F_{H,\max 1} = 5\,N + 0{,}27 \cdot 8{,}66\,N = 7{,}32\,N$

rechts der Umlenkrolle: $F_S = F_{T2} - F_{H,\max 2} = 8{,}66\,N - 0{,}27 \cdot 5\,N = 7{,}32\,N$

16c. Wenn die Massen beschleunigt werden, muss auf die Umlenkrolle eine Winkelbeschleunigung α_R wirken, die durch ein Drehmoment M_R verursacht wird. Für das Drehmoment ist die Kraftkomponente F_R erforderlich:

$$F_R = \frac{M_R}{r}$$

wobei r der Radius der Umlenkrolle ist.

Es gilt: $M_R = J\,\alpha_R = J\,\frac{a}{r}$

Trägheitsmoment der Rolle: $J = m_R\, r^2$

Es folgt: $F_R = \frac{M_R}{r} = \frac{m_R\, r^2\, a}{r^2} = m_R\, a$

Die Masse m_2 gleitet abwärts, die Masse m_1 aufwärts. Neben den Tangentialkräften, Gleitreibungskräfte und Trägheitskräften für die Beschleunigung von m_1 und m_2 muss F_R, die Kraft zur Erzeugung des Drehmomentes an der Rolle, berücksichtigt werden. Das D'Alembertsche Prinzip liefert:

$$F_{T2} - ((F_{T1} + F_{G1}) + F_{G2}) - F_R - (m_1 + m_2)a$$

$$F_{T2} - ((F_{T1} + F_{G1}) + F_{G2}) - (m_1 + m_2 + m_R)a$$

Beschleunigung: $a = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_R}(F_{T2} - F_{T1} - F_{G1} - F_{G2})$

$$a = \frac{(8{,}66 - 5{,}00 - 1{,}00 - 1{,}732)N}{3\,kg} = 0{,}309\,m\,s^{-2}$$

16d. Das Seil überträgt die auf die Masse m_1 wirkenden Kräfte. Wie in 7.b. muss auch hier zunächst die Summe der Kraft F_{T1} und der Gleitreibungskraft $F_{G1} = \mu_G \cdot F_{N1}$ aufgebracht werden. Nach dem D'Alembertschen Prinzip wirkt aber zusätzlich noch die Trägheitskraft $m_1 \cdot a$ entgegengesetzt zur Beschleunigungsrichtung, also in die selbe Richtung wie F_{T1} und F_{G1}.

Die Seilkraft ist also: $F_S^1 = F_{T1} + \mu_G F_{N1} + m_1 \cdot a$

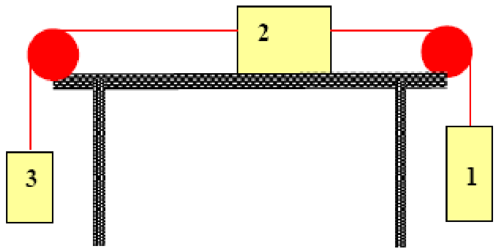
Die Gleichung für die Seilkraft F_S^1 an der Masse m_1 ist identisch mit der in Aufg. 7, allerdings ist die Beschleunigung *a* verschieden..

$$F_S^1 = 5{,}000\,N + 0{,}2 \cdot 8{,}660\,N + 0{,}309\,N = 7{,}041\,N$$

Nach dem D'Alembertschen Prinzip ist unter Einbeziehung der Trägheitskräfte die Summe aller Kräfte an beiden Massen gleich Null. Auf die Masse m_1 wirken also die Kräfte $F_{T1} = 5{,}000\,N$, die Reibungskraft $F_{G1} = \mu_G \cdot F_{N1} = 1{,}732\,N$ und die Trägheitskraft $m_1 \cdot a = 0{,}309\ N$ abwärts, während die Seilkraft $F_S^1 = 7{,}041\,N$ aufwärts wirkt.

An der Masse m_2 wirkt $F_{T2} = 8{,}660\,N$ abwärts. Die Gegenkräfte sind die Gleitreibungskraft der Masse m_2, $F_{G2} = \mu_G \cdot F_{N2} = 1{,}000\,N$, die Trägheitskraft von m_2, $F_{Tr}^2 = m_2\, a = 0{,}309\,N$ und die Seilkraft F_S^2, die sich aus der durch m_1 erzeugte Seilkraft $F_S^1 = 7{,}041\,N$ und der Kraft $F_R = m_R\, a = 0{,}309\,N$, die das Drehmoment für die Winkelbeschleunigung der Umlenkrolle erzeugt, zusammensetzt: $F_S^2 = F_S^1 + F_R = 7{,}350\,N$. Die Summe dieser Kräfte ist wieder Null.

17. Drei Massen, m_1 = 2 kg m_2 = 3 kg und m_3 = 1 kg, sind mit (masselosen) Seilen verbunden. m_2 liegt auf einer horizontalen Unterlage, m_1 und m_3 hängen senkrecht an den Seilen herab. Die Seile werden mit Rollen (**homogene Vollzylinder**) der Masse m_R = 1 kg mit Radius R = 0,1 m umgelenkt.



a. Welche Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ muss für m_2 unterschritten werden, damit sich die Massen bewegen?

b. Die Gleitreibungszahl μ_G für m_2 betrage 0,2. Wie groß ist die Beschleunigung der Massen?

c. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung der Rollen?

d. Welche Drehzahl haben die Umlenkrollen, wenn sich die Massen um die Strecke s = 1 m bewegt haben?

Lösungen:

17a. Alle Bedingungen im Haftreibungsfall sind unabhängig von der Masse der Umlenkrollen. Deshalb ergeben sich gleiche Lösungen wie in Aufg. 8a.

Die Gewichtskraft der Masse m_1 beträgt $F_{G1} = 20\,N$, die der Masse m_3 $F_{G3} = 10\,N$. Ohne Reibung von Masse m_2 würde sich das System nach rechts bewegen. Bewegt sich das System jedoch nicht, so gilt: Die Seilkraft erzeugt durch die Gewichtskraft von m_1 ($F_{G1} = 20\,N$), die nach rechts zieht, ist gleich der Summe der Haftreibungskraft von m_2 ($F_{R2} = \mu_{H,\max}\ F_{N2}$) und der Gewichtskraft von m_3 ($F_{G3} = 10\,N$), da diese beide Kräfte entgegengesetzt zu F_{G1} (nach links)gerichtet sich. Die Normalkraft von m_2 beträgt: $F_{N2} = m_2\, g = 30\,N$.

Lösung: $\mu_{H,\max} \le \dfrac{F_{G1} - F_{G3}}{F_{N2}} = \dfrac{m_1 - m_3}{m_2} = \dfrac{1}{3}$

17b. Gegeben: Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}2$. Gesucht: Beschleunigung *a*.

Gewichtskraft von m_1: $F_{G1} = m_1\, g = 20 N$

Gewichtskraft von m_3: $F_{G3} = -m_1\, g = 10 N$

Reibungskraft von m_2: $F_{R2} = -\mu_G\, F_{N2} = 6\, N$

Trägheitskraft von m_1, m_2 und m_3: $F_{Tr} = -(m_1 + m_2 + m_3)a$

Kraft zur Erzeugung von M_R: $F_R = -\dfrac{M_R}{r} = -\dfrac{J\,\alpha}{r} = -\dfrac{\left(\frac{1}{2} m_R\, r^2\right)\cdot\left(\frac{a}{r}\right)}{r}$

$$F_R = -\frac{1}{2} m_R\, a$$

D'Alembertsches Prinzip: $(F_{G1} + F_{G3} + F_{R2}) + (2F_R + F_{Tr}) = 0$

Nach Einsetzten folgt: $(m_1 - m_3 - \mu_G m_2)g - (m_R - m_1 - m_2 - m_3)a = 0$

Lösung: $a = \dfrac{(m_1 - m_3 - \mu_G\, m_2)\cdot g}{m_R + m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{4}{7} m\, s^{-2} = 0{,}571 m\, s^{-2}$

17c. Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0{,}571\, m}{0{,}1\, m\, s^2} = 5{,}71\, s^{-2}$

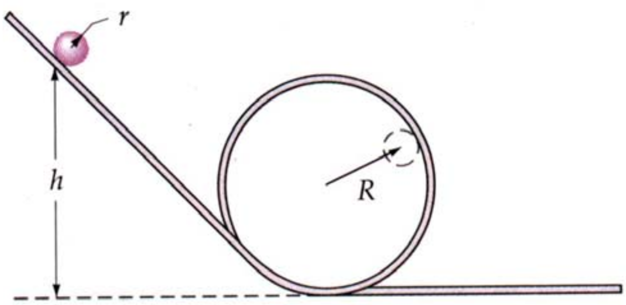
17d. Nach $s_1 = 1\, m$ Fallweg hat m_1 die Geschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2\, a\, s_1} = 1{,}0686\, m\, s^{-1}$$

Drehzahl der Rolle: $n = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{v_1}{2\pi\, r} = 1{,}701\, s^{-1}$

Aufgabenblatt zum 18. 12. 2003

18. Eine Kugel mit Radius *r* = 6 cm und der Masse *m* = 1 kg soll (ohne zu gleiten) durch eine Loopingbahn mit Radius *R* = 30 cm rollen (Bitte beachten Sie die Zeichnung: Die Schwerpunkt der Kugel bewegt sich auf dem Kreis mit Radius *R*, der Radius der Loopingbahn selbst ist *R* + *r*). Die Anfangshöhe *h* ist der Abstand zwischen dem tiefsten Punkt der Loopingbahn und dem unteren Rand der Kugel in der Ausgangshöhe.



a. Wie groß muss die Höhe *h* sein, damit der Ball die Loopingbahn am höchsten Punkt nicht verlässt?

b. Welche Geschwindigkeit hat die Kugel in diesem Punkt? Wie groß sind die verschiedenen mechanischen Energien?

c. Welche Geschwindigkeit und welche Energien besitzt die Kugel am tiefsten Punkt der Bahn?

d. Betrachten Sie statt der rollenden Kugel eine reibungsfrei gleitende Masse $m = 1$ kg. Wie groß muss jetzt die Anfangshöhe h sein?

Lösungen:

18a. Bedingung für die Kräfte im höchsten Punkt der Loopingbahn:

Zentrifugalkraft ist größer gleich der Gewichtskraft

$$F_{Zf} = m\frac{v^2}{R} \geq F_G = m\,g$$

Für Geschwindigkeit folgt: $v^2 = R\,g$

Energieerhaltungssatz: $E_{pot}(h) = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} + E_{pot}(2R)$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}J\,\omega^2 + m\,g\,(2R)$$

. Rollen ohne Gleiten: $v = r\cdot\omega$

Es folgt: $\omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = \frac{R\,g}{r^2}$

mit Trägheitsmoment: $J = \frac{2}{5}m\,R^2$

erhält man: $m\,g\,h = \frac{1}{2}m(R\,g) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m\,r^2\right)\frac{g\,R}{r^2} + mg(2R)$

Kürze m und g: $h = \frac{1}{2}R + \frac{2}{10}R + 2\,R = \frac{27}{10}R = 1{,}35\ m$

18b. Geschwindigkeit: $v = \sqrt{R\,g} = \sqrt{5}\frac{m}{s} = 2{,}24\frac{m}{s}$

Kin. Energie Translation: $E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,R\,g = 2{,}5\,J$

Kin. Energie Rotation: $E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m\,r^2\right)\frac{R\,g}{r^2} = \frac{1}{5}m\,R\,g = \frac{2}{5}E_{kin}^{tran} = 1\,J$

Potentielle Energie: $E_{pot}(2R) = m\,g\,2\,R = 10\ J$

Kontrolle:

Energieerhaltungssatz: $E_{pot}(h) = m\,g\,h = 13{,}5\,J = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} + E_{pot}(2R)$

18c. Am tiefsten Punkt der Bahn ist die Summe der kinetischen Energien $E_{kin,t}^{trans}$ und $E_{kin,t}^{rot}$ gleich der potentiellen Anfangsenergie $E_{pot}(h)$:

$$E_{kin,t}^{trans} + E_{kin,t}^{rot} = E_{pot}(h) = m\,g\,h = 13{,}5\,J$$

$$E_{pot}(h) = \frac{1}{2}m\,v_t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m\,r^2\right)\frac{v_t^2}{r^2} = \frac{7}{10}m\,v_t^2$$

$$v_t = \sqrt{\frac{10}{7\cdot m}\cdot E_{pot}(h)} = \sqrt{\frac{135}{7}}\frac{m}{s} = 4{,}39\frac{m}{s}$$

18d. Gleitende Masse: Die Bedingung für die Minimalgeschwindigkeit ist identisch zu der in Aufgabe 18a. Die potentielle Energie des Anfangszustands $E_{pot}(h_1)$ wird in kinetische Energie der Translation E_{kin}^{trans} und potentielle Energie $E_{pot}(2R)$umgewandelt.

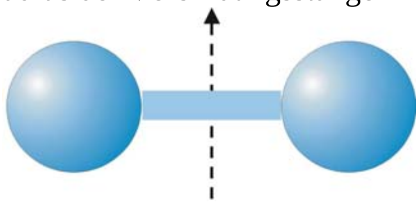
Der Energiesatz lautet: $$E_{pot}(h1) = E_{kin}^{trans} + E_{pot}(2R)$$

$$m\,g\,h_1 = \frac{1}{2} m v^2 + m\,g\,2R$$

Lösung für h: $$h_1 = \frac{v^2}{2g} + 2R = \frac{R\,g}{2g} + 2R = \frac{5}{2} R = 1{,}25\,m$$

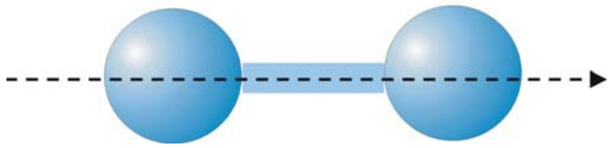
19. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für folgende Körper mit homogener Dichte.

a. **Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:** Radius der Kugeln = R, Länge der Verbindungsstange = L = 2 R, Radius der Verbindungsstange = r = 0,2 R.



Lösung: $J = 4{,}281 m_{ges}\, R^2$

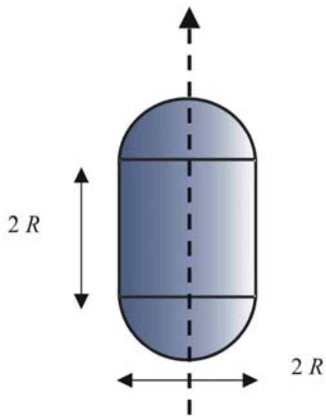
b. **Hantel parallel zur Symmetrieachse:** Radius der Kugeln = R, Länge der Verbindungsstange = l = 2 R, Radius der Verbindungsstange = r = 0,2 R.



Lösung: $J = 0{,}3889\ m_{ges}\, R^2$

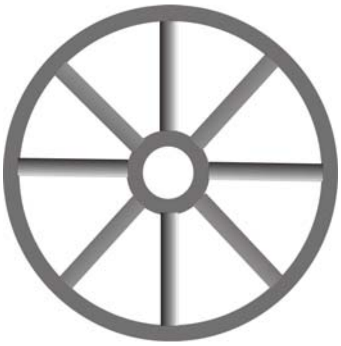
c. **Behälter:** Berechnen Sie J für den leeren Behälter mit Masse m_0. (siehe Zeichnung 3d.)
Lösung: $J = 0{,}833 m_0\, R^2$

d. **Behälter:** Berechnen Sie J für den gefüllten Behälter. Masse des gefüllten Behälters (Füllung plus Behälter): m_{ges} = 6 m_0.
Lösung: $J_{ges} = 0{,}5222 m_{ges}\, R^2$



e. **Speichenrad:** Äußerer Ring: Außenradius: R_{aa} =16 r, Innenradius: $R_{ai} = R_{aa} - r$,
Innerer Ring: Außenradius: R_{ia}, Innenradius: $R_{ii} = R_{ia} - r$ =2 r
Beide Ringe haben die Höhe: h = 2 r
Speichen: Radius: $R_S = r$

Lösung: $J_{ges} = 0{,}5558 m_{ges}\, R^2$



Lösungen:

19a. Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:

Da homogene Dichte ρ angenommen wird, ist die Masse der Teilkörper proportional zum Volumen.

Kugelvolumen: $$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Volumen der Stange: $$V_S = \left(\pi r^2\right) l = 0{,}08\,\pi R^3$$

Gesamtvolumen: $$V_{ges} = \left(\frac{8}{3} + 0{,}08\right)\pi R^3 = 2{,}746\ \pi R^3$$

Masse der Stange: $$m_S = \frac{V_S}{V_K} m_K = \frac{0{,}08 \cdot 3}{4} m_K = 0{,}0600\, m_K$$

$$m_S = \frac{0{,}08}{2{,}746} m_{ges} = 0{,}0291\ m_{ges}$$

Masse der Kugel: $$m_K = \frac{4}{3 \cdot 2{,}746} m_{ges} = 0{,}4854\, m_{ges}$$

Massenträgheitsmoment: $$J = 2 \cdot \left(m_K \left(2R\right)^2 + \frac{2}{5} m_k R^2 \right) + 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{m_S}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$J = \left(8 + \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{0{,}06}{2}\right) m_K R^2 = 8{,}82\, m_K R^2$$

alternativ: $$J = 8{,}82\, m_K R^2 = 36{,}95\, \rho R^5$$

alternativ: $$J = 8{,}82 \cdot 0{,}4854 \cdot m_{ges} R^2 = 4{,}281 m_{ges} R^2$$

19b. Hantel parallel zur Symmetrieachse:

Da homogene Dichte ρ angenommen wird, ist die Masse der Teilkörper proportional zum Volumen. Siehe dazu Aufg. 19a.

Massenträgheitsmoment: $$J = 2 \cdot \left(\frac{2}{5} m_k R^2\right) + \frac{1}{2} m_S r^2$$

$$J = \frac{4}{5} m_K R^2 + \frac{1}{2} 0{,}06\, m_K \cdot 0{,}04\, R^2$$

$$J = \left(\frac{4}{5} + 0{,}0012\right) m_K R^2 = 0{,}8012\, m_K R^2$$

$$J = 0{,}8012\, m_K R^2 = 3{,}356\, \rho R^5$$

alternativ: $$J = 0{,}8012 \cdot 0{,}4854 \cdot m_{ges} R^2 = 0{,}3889\ m_{ges} R^2$$

19c. Leerer Behälter der Masse m_0:

Beim leeren Behälter (mit konstanter Wanddicke) verteilt sich die Masse m_0 auf die Behälteroberfläche. Der Behälter kann als „dünnwandige Hohlkugel mit Radius R“ plus einem „Hohlzylinder mit Radius R und Höhe $2R$“ betrachtet werden. Die Gesamtmasse verteilt sich proportional zu den Oberflächen von Kugel und Zylinder.

Hohlkugeloberfläche: $O_K = 4\pi R^2$

Hohlzylinderoberfläche: $O_Z = 2\pi R h = 4\pi R^2$

Hohlkugelmasse: $m_{HK} = \frac{1}{2} m_0$

Hohlzylindermasse: $m_{HZ} = \frac{1}{2} m_0$

Massenträgheitsmoment: $J = \frac{2}{3} m_{HK} R^2 + m_{HZ} R^2$

$$J = \frac{2}{6} m_0 R^2 + \frac{1}{2} m_0 R^2 = \frac{5}{6} m_0 R^2 = 0{,}833\, m_0 R^2$$

19d. Gefüllter Behälter der Masse m_1:
Da $m_{ges} = m_0 + m_F = 6 m_0$ hat die Behälterfüllung die Masse $m_F = 5 m_0$. Die Behälterfüllung kann als „homogene Kugel mit Radius R“ plus einem „homogenen Vollzylinder mit Radius R und Höhe $2R$“ betrachtet werden. Die Gesamtmasse m_F verteilt sich proportional zu den Volumina von Kugel und Zylinder.

Kugelvolumen: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Zylindervolumen: $V_Z = \pi R^2 h = 2\pi R^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = V_K + V_Z = \frac{10}{3}\pi R^3$

Kugelmasse: $m_K = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 10} m_{ges} = \frac{4}{10} 5 m_0 = 2 m_0$

Zylindermasse: $m_Z = \frac{2\cdot 3}{10} m_{ges} = \frac{6}{10} 5 m_0 = 3 m_0$

Massenträgheitsmoment: $J_{ges} = J_{Behälter} + J_{Füllung}$

$$J_{Behälter} = \frac{5}{6} m_0 R^2$$

alternativ: $J_{Behälter} = \frac{5}{36} m_{ges} R^2$

$$J_{Füllung} = \frac{2}{5} m_K R^2 + \frac{1}{2} m_Z R^2$$

$$J_{Füllung} = \frac{2}{5}\cdot 2 m_0 R^2 + \frac{1}{2}\cdot 3 m_0 R^2 = \frac{23}{10} m_0 R^2 = 2{,}3\, m_0 R^2$$

alternativ: $J_{Füllung} = \frac{23}{10} m_0 R^2 = \frac{23}{60} m_{ges} R^2 = 0{,}3833\, m_{ges} R^2$

$$J_{ges} = \frac{5}{6} m_0 R^2 + \frac{23}{10} m_0 R^2 = \frac{47}{15} m_0 R^2 = 3{,}13\, m_0 R^2$$

$$J_{ges} = \frac{47}{90} m_{ges} R^2 = 0{,}5222\, m_{ges} R^2$$

19e. Speichenrad: Da die Dichte konstant sein soll, verhalten sich die Massen der Komponenten zueinander wie deren Volumina.
Volumen des äußeren Ringes: $V_a = \pi\left(R_{aa}^2 - R_{ai}^2\right)\cdot h = \pi\left(256 r^2 - 225 r^2\right)\cdot 2r = 62\pi r^3$

Volumen des inneren Ringes: $V_i = \pi\left(R_{ia}^2 - R_{ii}^2\right)\cdot h = \pi\left(9r^2 - 4r^2\right)\cdot 2r = 10\pi r^3$

Volumen einer Speiche: $V_S = \pi r^2 \cdot l_S = \pi r^2 \cdot 12r = 12\pi r^3$

Volumen aller Speichen: $V_S = 8\left[\pi r^2 \cdot l_S\right] = 8\left[\pi r^2 \cdot 12r\right] = 8\left[12\pi r^3\right] = 96\pi r^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = 168\pi r^3$

Massenträgheitsmoment: $J_{ges} = J_a + 8\cdot J_S + J_i$

Äußerer Ring: $J_a = \frac{1}{2}m_a\left(R_{aa}^2 + \left(R_{aa}^2 - r\right)^2\right) = \frac{1}{2}m_a\left(256 + 225\right)r^2$

$$J_a = \frac{481}{2}m_a r^2 = 240{,}5\, m_a r^2$$

Masse des äußeren Rings: $m_a = \frac{62}{168}m_{ges}$

Massenträgheitsmoment: $J_a = 240{,}5\frac{62}{168}m_{ges} r^2 = 88{,}7560\, m_{ges} r^2$

Innerer Ring: $J_i = \frac{1}{2}m_i\left(R_{ia}^2 + \left(R_{ia}^2 - r\right)^2\right) = \frac{1}{2}m_i\left(9 + 4\right)r^2$

$$J_i = \frac{13}{2}m_i r^2 = 6{,}5\, m_i r^2$$

Masse des inneren Rings: $m_i = \frac{10}{168}m_{ges}$

Massenträgheitsmoment: $J_i = 6{,}5\frac{10}{168}m_{ges} r^2 = 0{,}3869\, m_{ges} r^2$

Speiche: $J_S = \frac{1}{12}m_S l^2 + m_S h^2 = \left(\frac{1}{12}12^2 + \left(6+3\right)^2\right)m_S r^2$

$$J_S = \left(12 + 81\right)m_S r^2 = 93\, m_S r^2$$

Masse einer Speiche: $m_S = \frac{12}{168}m_{ges}$

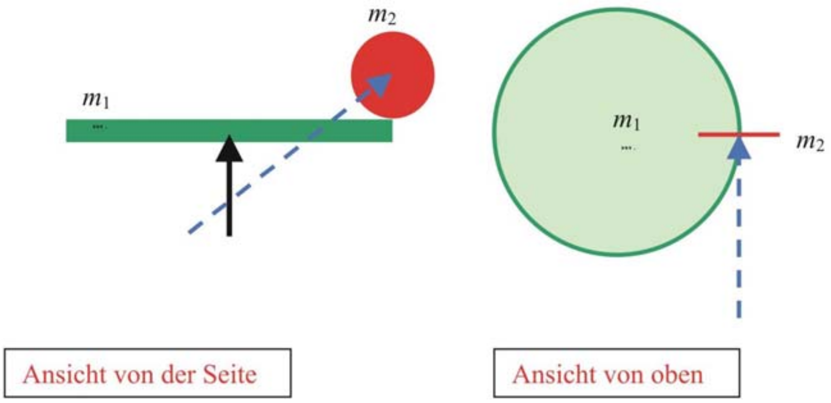
Massenträgheitsmoment: $J_S = 93\frac{12}{168}m_{ges} r^2 = 6{,}6429\, m_{ges} r^2$

$$8\cdot J_S = 8\cdot 93\frac{12}{168}m_{ges} r^2 = 53{,}1429\, m_{ges} r^2$$

$$J_{ges} = 142{,}2858\, m_{ges} r^2 = 0{,}5558\, m_{ges} R^2$$

Fazit: Hätte man statt genauer Rechnung die Formel für eine homogene Scheibe verwenden, hätte man $J_{ges} \cong 0{,}5\, m_{ges} R^2$ erhalten. Die Abweichung beträgt nur ca. 10%. Es macht also durchaus Sinn, Massenträgheitsmomente komplizierter Körper mit Hilfe einfacher Annahmen abzuschätzen.

20. Am Rand einer drehbaren Scheibe (grün) mit dem Radius r = 1 m und der Masse m_1 = 10 kg ist eine Zielscheibe (rot) befestigt. Die Masse m_2 (und damit das Trägheitsmoment) der kleinen Scheibe soll vernachlässigt werden.
Ein Ball mit der Masse m_B = 0,1 kg wird tangential (entlang der gestrichelten blauen Linie) gegen die Zielscheibe geworfen. Durch den Aufprall wird die Scheibe in eine Drehung versetzt. Die Messung ergibt, dass sich die Scheibe danach mit vier Umdrehungen in 25 s dreht.



a. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Balles vor dem Aufprall.
b. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Balles nach dem Aufprall.
c. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Scheibe, wenn statt eines elastischen Balles ein Stück Knetgummi mit gleicher Masse ($m_K = m_B$) und gleicher Geschwindigkeit ($v_K = v_B$) verwendet wird? Die Knetgummimasse soll nach dem Aufprall an der Zielscheibe kleben bleiben.
d. Welcher Anteil der ursprünglichen kinetischen Energie wird in Verformungsarbeit des Knetgummis umgesetzt?

Lösungen:

20a. Trägheitsmoment der Scheibe $J_S = \frac{1}{2} m_1 r^2 = 5\, kg\, m^2$

Drehzahl: $n = \frac{4}{25} s^{-1} = 0{,}16\, s^{-1}$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi n = 1{,}005\, s^{-1}$

Beim Wurf mit dem <u>elastischen Ball</u> bleibt sowohl der Drehimpuls als auch die Energie erhalten.

Drehimpuls Ball vorher: $L_B = m_B v_B r$

Drehimpuls Scheibe nachher: $L'_S = J_S \omega$

Drehimpuls Ball nachher: $L'_B = m_B u_B r$

Drehimpulserhaltungssatz: $L_B = L'_S + L'_B$

(1) $m_B v_B r = J_S \omega + m_B u_B r$

Energie Ball vorher: $E_{kin}^{trans}(B) = \frac{1}{2} m_B v_B^2$

Energie Scheibe nachher: $E_{kin}^{rot}(S') = \frac{1}{2} J \omega^2$

Energie Ball nachher: $E_{kin}^{trans}(B') = \frac{1}{2} m_B u_B^2$

Energieerhaltungssatz: $E_{kin}^{trans}(B) = E_{kin}^{rot}(S') + E_{kin}^{trans}(B')$

(2) $\frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$

Aus (1) und (2) folgt: $v_B = \dfrac{\omega \cdot \left(J_S + m_B\, r^2\right)}{2\, m_B\, r} = \dfrac{1{,}005\, s^{-1}(5 + 0{,}1) kg\, m^2}{2 \cdot 0{,}1 kg\, m} = 25{,}63 \dfrac{m}{s}$

20b. Aus (1) folgt: $u_B = \dfrac{m_B v_B r_1 - J_S\, \omega}{m_B\, r_1}$

$$u_B = \frac{(0{,}1 \cdot 25{,}63 - 5 \cdot 1{,}005) kg\, m^2 s^{-1}}{0{,}1 kg\, m} = -24{,}62 \frac{m}{s}$$

20c. Drehimpulserhaltungssatz: $m_K\, v_K\, r_1 = L_{S+K} = \left(J_S + m_K\, r_1^2\right)\omega_K$

Lösung: $\omega_K = \dfrac{m_K\, v_K\, r_1}{J_{ges} + m_K\, r_1^2} = \dfrac{0{,}1 \cdot 25{,}63 kg\, m^2\, s^{-1}}{(5 + 0{,}1) kg\, m^2} = 0{,}5025 s^{-1}$

20d. Energieerhaltungssatz: $E_{kin}^K = \dfrac{1}{2} m_K\, v_K^2 = \dfrac{1}{2}\left(J_{ges} + m_K\, r_1^2\right)\omega_K^2 + Q$

$$E_{kin}^K = \frac{1}{2} m_K\, v_K^2 = 32{,}8448\ J$$

$$\frac{1}{2}\left(J_{ges} + m_K\, r_1^2\right)\omega_K^2 = 2{,}5756\, J$$

Lösung: $\dfrac{Q}{E_{kin}^K} = \dfrac{32{,}8448 - 2{,}5756}{32{,}8448} = 92{,}15\%$