Tutorium Physik I **I. Übungsblatt** **02.11.2005**
zu den Vorlesungen von Prof. Dr. Haussmann und Prof. Dr. Schrewe **WS05/06**

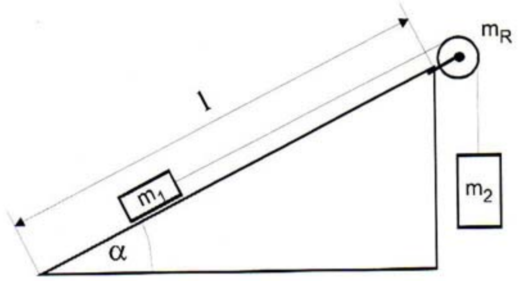
I1 Zwei Fahrzeuge fahren mit gleicher Geschwindigkeit $v = 108\, km\, h^{-1}$ an der Raststätte Seesen der A7 im zeitlichen Abstand von 30 s vorbei (Fahrzeug 1 fährt voraus, Fahrzeug 2 folgt hinterher). Fahrzeug 1 beginnt auf der Höhe der Raststätte, mit der Bremsbeschleunigung $-0,4\, m\, s^{-2}$ abzubremsen, während Fahrzeug 2 seine Geschwindigkeit beibehält.

a. Zeichnen Sie das Weg-Zeit Diagramm
b. In welcher Distanz zur Raststätte Seesen hat Fahrzeug 2 das Fahrzeug 1 eingeholt?

I2. Ein PKW mit einer Masse von $m = 1500\, kg$ wird auf einer 1000 m langen geraden Strecke getestet: Er wird von 0 – 100 km/h in 11,2 s beschleunigt, fährt anschließend mit konstanter Geschwindigkeit und wird auf den letzten 100 m bis zum Stillstand abgebremst.
a. Skizzieren Sie die *a*-*t*, *v*-*t* und *s*-*t*-Diagramme.
b. Bestimmen Sie die Beschleunigung a_0 und die Beschleunigungsstrecke s_a.
c. Wie lang ist der Streckenabschnitt, der mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird?
d. Wie groß sind die Bremsverzögerung a_b und die Bremszeit t_b?
e. Wie groß könnte der Betrag der Bremsverzögerung bei einer Haftreibungszahl $\mu_{H,\max} = 0,85$ maximal sein?

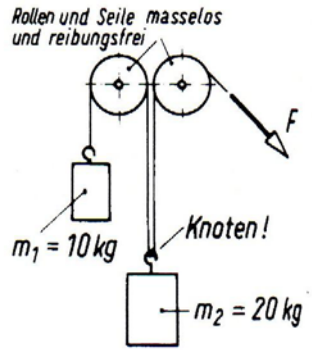
Betrachten Sie zum Vergleich eine Testfahrt auf kreisförmiger Strecke mit R = 160 m:
f. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung, wenn die Bahnbeschleunigung gleich der in Aufgabe **b** ermittelten Beschleunigung a_0 der geraden Teststrecke ist und die Bahngeschwindigkeit des Fahrzeugs $v_B = 50\, km\, h^{-1}$ beträgt.
g. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung a_{ges}, kurz bevor die konstante Bahngeschwindigkeit von $v_B = 100\, km\, h^{-1}$ erreicht wird? In welche Richtung zeigt der Beschleunigungsvektor?
h. Wie groß könnte die Bremsverzögerung bei der Kreisfahrt maximal sein, wenn die Haftreibungszahl unabhängig von der Richtung der wirkenden Kräfte $\mu_{H,\max} = 0,85$ beträgt?

II1 Eine Masse ($m_1 = 20\,kg$) wird von einem zweiten Körper (Masse $m_2 = 25\,kg$)auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 15°$ und der Länge $l = 5\,m$ hochgezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0{,}1$. Die Masse der Rolle und des Seils soll vernachlässigt werden ($m_R \cong 0$).



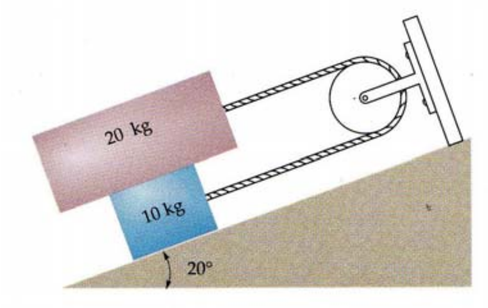
a. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Körper?
b. Wie lange benötigt m_1, um die Strecke l zu durchlaufen?
c. Wie groß ist die Seilkraft?

II2. Ein Körper m_2 mit einer Masse von 20 kg wird durch die Gewichtskraft der Masse $m_1 = 10\,kg$ an dem nach links und die Kraft F an dem nach rechts führenden Seilende angehoben. Das Seil und die Rollen seien masselos gedacht. Der Körper m_2 ist mit einem Knoten am Seil befestigt.



a. Mit welcher Kraft F muss an dem rechten Seilende gezogen werden, wenn sich der Körper m_2 mit einer Beschleunigung $a = \dfrac{g}{2}$ nach oben bewegen soll?

Tutorium Physik I **III. Übungsblatt** **16.11.2005**
zu den Vorlesungen von Prof. Dr. Haussmann und Prof. Dr. Schrewe **WS05/06**



III1. Die Massen $m_1 = 20\ kg$ und $m_2 = 10\ kg$ sind in der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine Umlenkrolle umgelenkt wird. Die Massen des Seils und der Rolle können vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene betrage $\theta = 20°$.

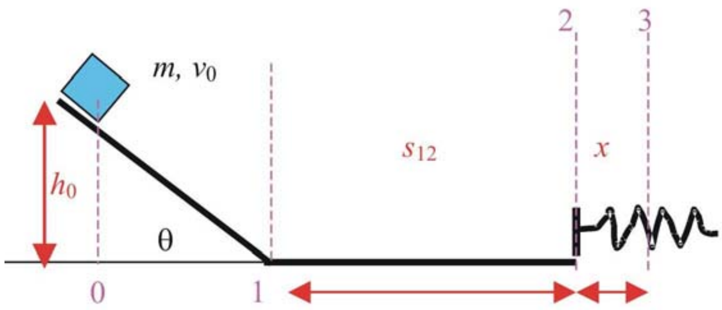
a. Die Haftreibung zwischen m_1 und m_2 und zwischen m_2 und der schiefen Ebene (SE) soll gleich sein. Welchen Wert darf die Haftreibungszahl $\mu_{H,\max}$ <u>nicht überschreiten</u>, damit die Massen gleiten können?

b. Beim Gleiten soll die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,05$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung a?

Wie groß sind die Seilkräfte

c. im Haftreibungsfall, mit dem Wert für $\mu_{H,\max}$ wie in **Teil a.** berechnet,

d. im Gleitfall?



III2. Die Masse $m = 1 kg$ rutscht mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 4\,m\,s^{-1}$ aus einer Höhe von $h_0 = 0,5\,m$ eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel $\theta = 30°$ hinab. Anschließend rutscht sie auf einer Strecke $s_{12} = 2m$ horizontal weiter und trifft am Ende auf eine Feder mit der Federkonstanten $D = 5000\ N\,m^{-1}$. Die Gleitreibungszahl beträgt auf dem gesamten Weg $\mu_G = 0,2$.

a. Berechnen Sie die Gesamtenergie E_{ges}, die kinetischen Energien E_{kin} und die Reibungsarbeiten W_R in den Punkten 1 und 2 der Bahn, sowie die an der Feder geleistete elastische Verformungsarbeit W_{E3} im Punkt 3.

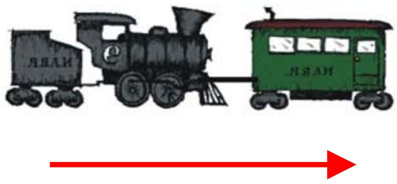
b. Wie groß ist der Federweg x?

c. Wie groß müsste die Anfangsgeschwindigkeit v_0' gewählt werden, damit die Masse nach dem Rückprall wieder genau die Anfangshöhe h_0 ohne Geschwindigkeit erreicht? (Vernachlässigen Sie zur Vereinfachung die Reibung entlang des Federweges x)

Tutorium Physik I **IV. Übungsblatt** **23.11.2005**
zu den Vorlesungen von Prof. Dr. Haussmann und Prof. Dr. Schrewe **WS05/06**

IV1. Ein Wagen der Masse $m = 1600\,kg$ soll innerhalb einer Zeit von $t = 2,5$ Minuten eine Rampe der Länge $s = 190\,m$ mit einer Steigung von 16% aus dem Stillstand hochgezogen werden. Die Bewegung sei gleichmäßig beschleunigt. Die Rollreibungszahl beträgt $\mu_R = 0,1$. Welche Leistung muss der Motor bei einem Wirkungsgrad von $\eta = 0,75$ aufbringen? (Hinweis: Steigung ist der Quotient aus der Höhenänderung und dem entsprechenden horizontalen Weg)

IV2. Eine Rangierlok der Masse 25 t, die einen (nicht angekuppelten) Waggon der Masse 8 t vor sich her schiebt, wird gleichmäßig beschleunigt. Sie soll in 5 s aus dem Stand heraus eine Endgeschwindigkeit von 6 m/s erreichen. Dabei ist ständig eine Reibungskraft von 10 kN vorhanden.



a. Wie groß ist die maximale und wie groß die mittlere Leistung, die die Lok aufbringen muss?

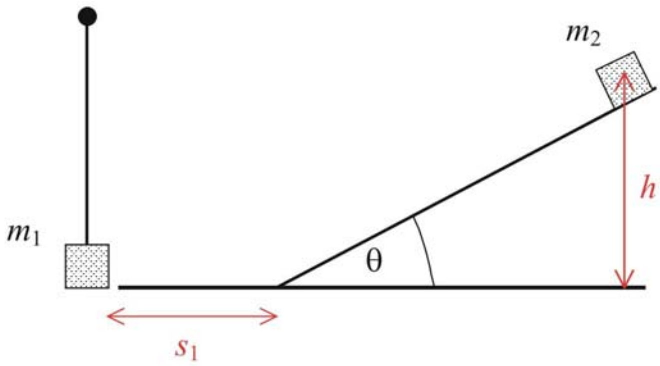
Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit bremst die Lok, der geschobene Waggon löst sich und rollt mit dieser Geschwindigkeit weiter. Nach einer reibungsfreien Fahrt stößt er auf drei stehende, aneinander gekuppelte gleiche Waggons mit jeweils 10 t Masse und kuppelt automatisch an diese an.

b. Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit rollen die vier Waggons weiter?

c. Wie groß ist der relative Energieumsatz in der Kupplung? (Hinweis: Gesucht ist der Energieverlust Q beim Stoß geteilt durch die kinetische Energie E_{kin}^0 des stoßenden Waggons.)

d. Welche Kraft muss die Kupplung aufbringen, wenn die Ankupplungszeit circa 0,8s beträgt?

V1. Ein Körper der Masse $m_2 = 1kg$ gleitet aus der Höhe $h = 2\,m$ eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta = 30°$ hinab. Anschließend rutscht er auf einem horizontalen Streckenabschnitt der Länge $s_1 = 1,5\,m$ und stößt am Ende auf einen Pendelkörper mit der Masse $m_1 = 2\,kg$. Die



Gleitreibungszahl auf der gesamten Strecke beträgt $\mu_G = 0,2$. Berechnen Sie, wie hoch das Pendel mit der Masse m_1 ausschwingt (Pendelstange kann vernachlässigt werden), für folgende Bedingungen:

a. Einen (vollkommen) **elastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1.

b. Einen **unelastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1, wobei als Zusatzbedingung angenommen werden soll, dass beim Stoß 40% der kinetischen Energie in Verformungs- bzw. Wärmeenergie umgewandelt wird.

c. Einen **vollkommen unelastischen Stoß**.

d. Wie groß ist der Energieverlust beim vollkommen unelastischen Stoß (**V1c**.) relativ zur kinetischen Energie des Körpers m_2 direkt vor dem Stoß?

V2. Auf waaggerechter Straße fährt ein PKW(1) (1000 kg) auf einen vor ihm mit 30 km h^{-1} fahrenden PKW(2) (1600 kg) auf. Die beiden Fahrzeuge verkeilen sich ineinander und rutschen anschließend noch 12,25 m weiter. (Gleitreibungszahl: $\mu_G = 0{,}8$)

a. Welche Rutschgeschwindigkeit haben die Fahrzeuge unmittelbar nach dem Unfall?

b. Wie groß ist die mittlere Verzögerung beim Rutschen?

c. Wie hoch ist die mittlere Leistung, die beim Rutschen abgegeben wird?

d. Welche Geschwindigkeit hatte PKW(1) vor dem Zusammenstoß?

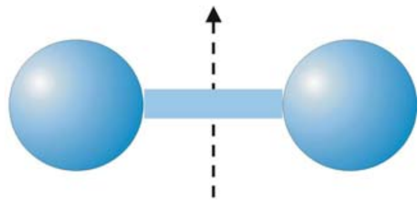
e. Wie groß war der Kraftstoß beim Aufprall?

f. Wie viel Prozent der kinetischen Anfangsenergie der beiden Fahrzeuge wird in Verformungs- bzw. Wärmeenergie umgewandelt?

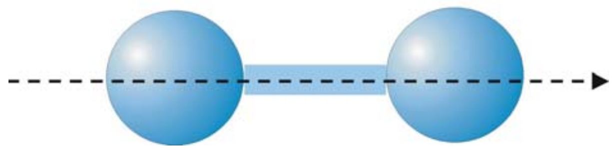
Tutorium Physik I **VI. Übungsblatt** **07.12.2005**
zu den Vorlesungen von Prof. Dr. Haussmann und Prof. Dr. Schrewe **WS05/06**

VI1. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für folgende Körper mit **homogener Dichte**. Die Körper sollen jeweils die Gesamtmasse m_{ges} besitzen. Die gestrichelte Linie zeigt die Drehachse. Das Ergebnis soll in der Form $J_{ges} = x \cdot m_{ges} \cdot R^2$ angegeben werden, wobei der Faktor x aus den Angaben zur Geometrie zu bestimmen ist..

a. **Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:**
Radius der Kugeln R,
Länge der Verbindungsstange $L = 2 \cdot R$,
Radius der Verbindungsstange $r = 0,2 \cdot R$.



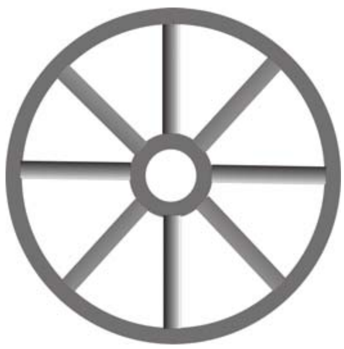
b. **Hantel parallel zur Symmetrieachse:**
Radius der Kugeln R,
Länge der Verbindungsstange $L = 2 \cdot R$,
Radius der Verbindungsstange $r = 0,2 \cdot R$.



c. **Speichenrad:**
Radkranz (<u>Äußerer Reifen</u>):
Außenradius: $R = R_{aa} = 16 \cdot r$,
Innenradius: $R_{ai} = R_{aa} - r$,

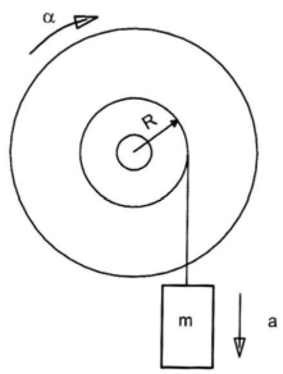
Radnabe (<u>Innerer Ring</u>):
Außenradius: $R_{ia} = R_{ii} + r$,
Innenradius: $R_{ii} = 2r$
Beide Ringe haben die <u>Höhe</u>: $h = 2r$

Radius der **Speichen**: $R_S = r$



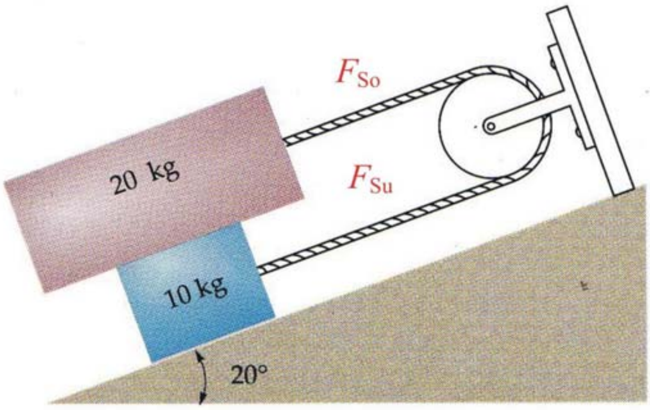
d. Versuchen Sie, für die gegebenen Beispiele einfache Abschätzung zu finden und vergleich Sie die Ergebnisse der Schätzung mit denen der exakten Rechnung.

V2. Ein Drehmomentenrad erfährt um seine horizontale Achse eine Winkelbeschleunigung, die durch die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 10\,kg$ erzeugt wird, der an einem um die Achse ($R = 8\,cm$) gewickelten Faden hängt. Lässt man den Körper (m) los, so bewegt er sich in $t = 5\,s$ um die Strecke $s = 2m$ nach unten. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Systems Rad/Achse,



a. indem Sie die am System wirkenden **Kräfte und Momente betrachten**,
b. indem Sie den **Energiesatz anwenden**.

VII1. Die Aufgabe wurde in ähnlicher Form schon im Aufgabenblatt III behandelt. Bitte vergleichen Sie:
Die Massen $m_1 = 20\ kg$ und $m_2 = 10\ kg$ sind in der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine Umlenkrolle (homogener Zylinder) mit der Masse $m_R = 5\,kg$ umgelenkt wird. Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene betrage $\theta = 20°$.

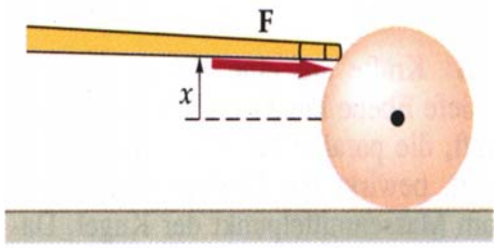


a. Beim Gleiten soll die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,05$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung *a*?

b. Berechnen Sie die Seilkräfte oben F_{So} und unten F_{Su} im Gleitreibungsfall?

c. Vergleichen Sie die Ergebnisse für die Beschleunigung und die Gleitreibungskräfte mit den denen der Aufgabe III1b und III1d. Erklären Sie die Unterschiede.

VII2. Eine Billardkugel (Durchmesser: 61,5 mm, Masse: 200g) soll mit einem Kraftstoß durch den Queue (Spielstock) gespielt werden. Der Abstand *x* bezeichnet den Abstand des Anspielpunktes von der Kugelmitte. Beim Anspiel mit $x = 0$ wird die Kugel "geschoben", d.h. sie wird zunächst rutschten ohne zu rollen. Trifft der Queue die Kugel am äußeren Rand mit $x = R$, so wird sie zunächst nur rotieren.



a. Wie groß muss *x* (*x* = Abstand des Anspielpunktes von der Kugelmitte) sein, damit die Kugel <u>rollt ohne zu gleiten</u>?

Die Geschwindigkeit der Kugel nach Stoß betrage 4 m s^{-1}.

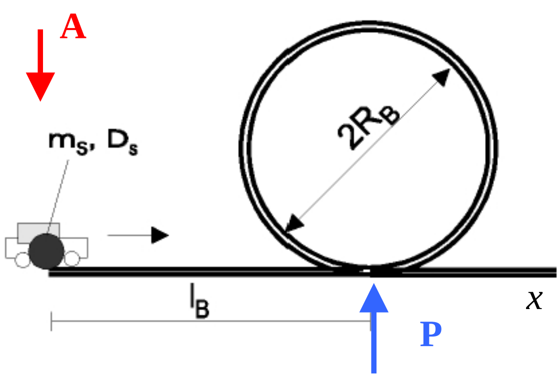
b. Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit und die Drehzahl?

c. Bestimmen Sie die kinetischen Energien (Gesamtenergie, Translations- und Rotationsenergie).

d. Wie groß ist der Kraftstoß, den der Queue ausübt?

e. Wie groß ist die mittlere Kraft, mit der die Kugel beschleunigt wird, wenn man annimmt, dass die Kontaktzeit 0,01 s beträgt?

VIII1. Ein Student möchte sein neues Weihnachtsgeschenk, ein Spielzeugauto und eine Loopingbahn testen. Das Auto hat eine Masse von $m_A = 200\,g$ mit Schwungradantrieb (Vollscheibe mit der Masse $m_S = 50\,g$, Durchmesser $D_S = 4\,cm$) und die Loopingbahn besteht aus einer horizontaler Anlaufstrecke der Länge $l_B = 50\,cm$ und einer Loopingschleife mit Radius $R_B = 20\,cm$.



Das Schwungrad dient nicht nur als Energiespeicher, sondern auch als Antriebsrad (d. h. die Umfangsgeschwindigkeit des Rades entspricht der Fahrgeschwindigkeit des Autos).

a. Das Auto soll durch die Loopingschleife fahren können. Bestimmen Sie die kleinste Geschwindigkeiten $v_{\min}$, die es im höchsten Punkt der Schleife haben kann, ohne herabzufallen. (Betrachten Sie näherungsweise das Auto als Massenpunkt, der sich reibungsfrei bewegt.)

b. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_P,die das Auto im Punk (**P**) (Einfahrt in die Loopingschleife) haben muss, um die im Aufgabenteil **a.** genannten Bedingungen zu erfüllen.

c. Skizzieren Sie die Funktion der Normalkraft, die auf das Auto entlang der Fahrtstrecke x wirkt ($x > l_B + \pi \cdot (2R_B)$).Betrachten Sie hierzu v bei (**P**), also v_{links} für $x = l_B - \varepsilon$ und v_{rechts} für $x = l_B + \varepsilon$, mit jeweils $\varepsilon \to 0$.

d. Mit welcher Anfangsdrehzahl muss sich das Schwungrad am Anfangspunkt (**A**) der Loopingbahn drehen?

VIII2. Zwei Schwungräder in Form von homogenen Vollzylindern mit den Massen $m_1 = 0{,}8\,kg$ und $m_2 = 1{,}5\,kg$ und dem Radius $R_1 = R_2 = 10\,cm$ haben eine Drehzahl von $n_1 = 900\,\min^{-1}$ und $n_2 = 600\,\min^{-1}$. Die beiden Schwungräder werden gekuppelt. Die Kupplungszeit dauert $\Delta T = 0{,}5\,s$.

a. Welche gemeinsame Drehfrequenz haben die Schwungräder nach dem Kuppeln?

b. Wie groß ist der Drehimpuls der beiden verkuppelten Schwungräder?

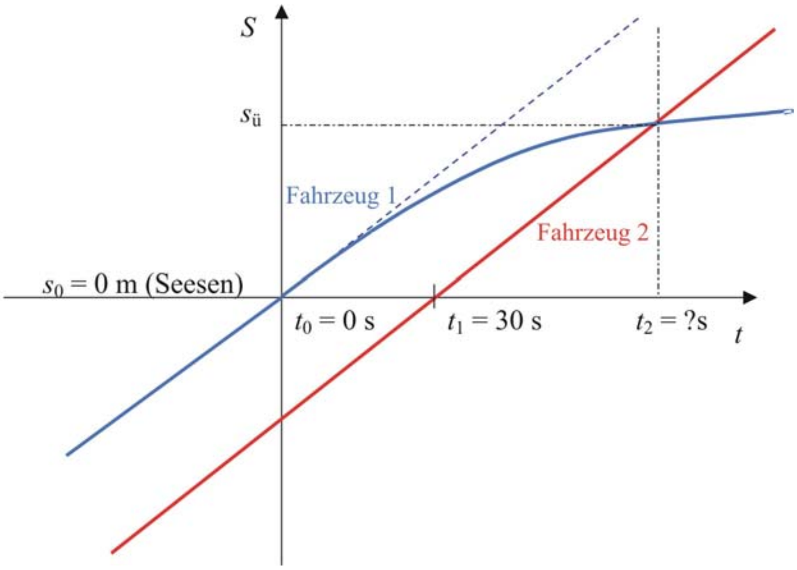
c. Berechnen Sie die Veränderung des Drehimpulses vor und nach dem Kupplungsvorgang für beide Schwungräder getrennt. Kommentieren Sie das Ergebnis.

d. Welches Drehmoment hat beim Kupplungsvorgang gewirkt?

e. Betrachten Sie die Energien: Welche Energien hatten die Schwungräder vor, welche Energie haben sie nach der Kupplung?. Gilt der Energieerhaltungssatz? Kommentieren Sie auch dies Ergebnis.

Lösungen:

I1a. Man definiere zum Beispiel, dass Fahrzeug Nr. 1 bei $t_0 = 0\,s$ den Punkt $s_1\left(t=0\right) = 0\,m$ (die Raststätte Seesen) passieren soll. Fahrzeug Nr. 2 ist zu diesem Zeitpunkt noch vor der Raststätte, also bei negativen Werten $s_2(t=0\,s) < 0\,m$. Nach $t_1 = 30\,s$ erreicht auch Fahrzeug Nr. 2 die Raststätte, also gilt $s_2(t=30\,s) = 0\,m$. Gesucht ist der Zeitpunkt t_2, an dem beide Fahrzeuge den gleichen Weg $s_ü$ hinter der Raststätte zurückgelegt haben.



I1b. Wegfunktion für Fahrzeug 1: $s_1\left(t\right) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0\,t + s_0$

mit: $a_0 = -0,4\,m\,s^{-2}$

und: $s_1\left(t = 0\,s\right) = 0$

Wegfunktion für Fahrzeug 2: $s_2\left(t\right) = v_0\,t + s_0$

mit: $s_2\left(t = 30\,s\right) = 0$

Es folgt für $t_1 = 30\,s$: $0 = v_0\,t_1 + s_0 \qquad s_0 = -v_0\,t_1$

Überholzeitpunkt t_2: $s_1\left(t_2\right) = \frac{1}{2}a_0 t_2^2 + v_0\,t_2 = v_0\,t_2 - v_0\,t_1 = s_2\left(t_2\right)$

$$\frac{1}{2}a_0 t_2^2 = -v_0\,t_1$$

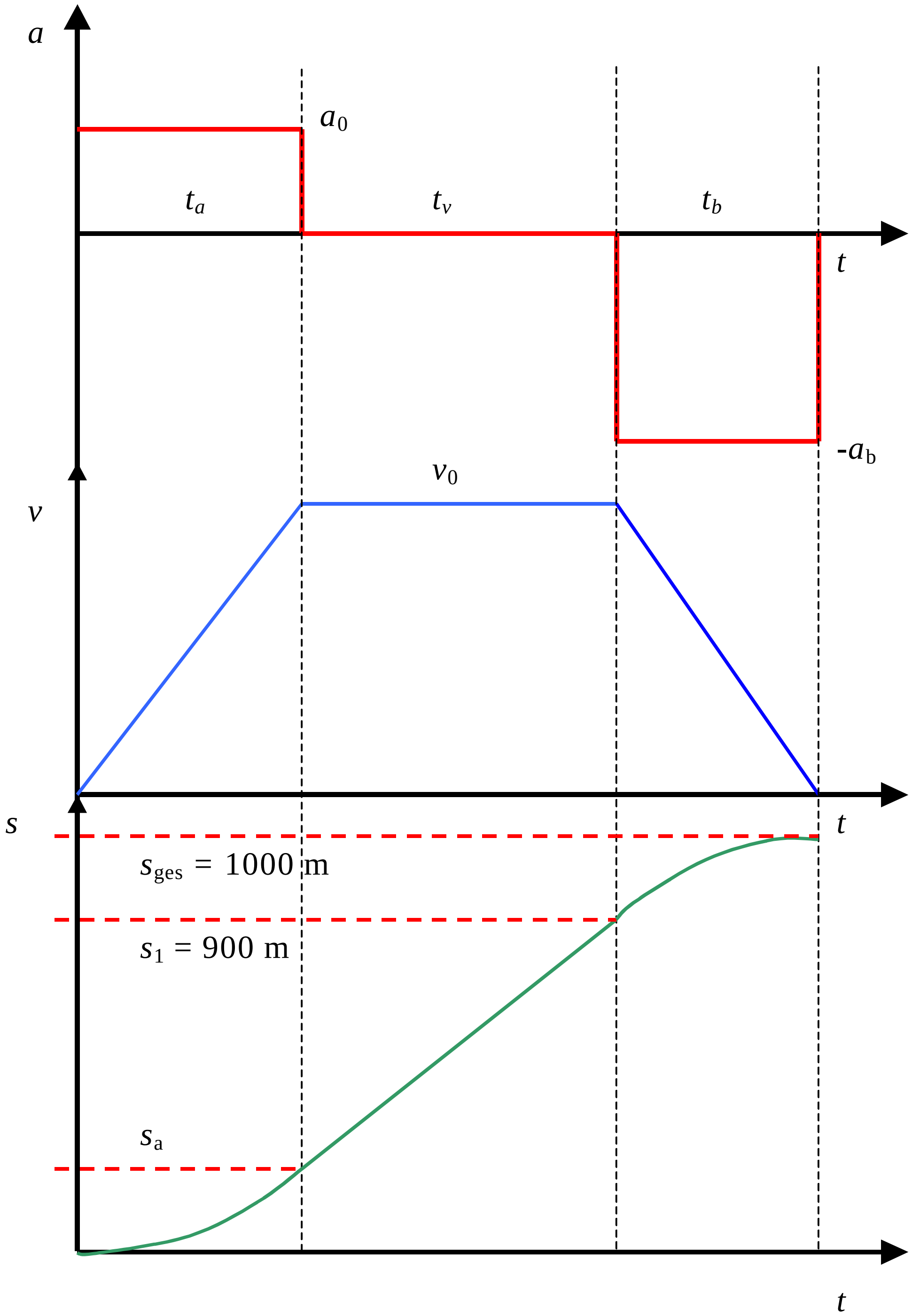
Lösung für t_2: $t_2 = \sqrt{-\frac{2\,v_0\,t_1}{a_0}} = \sqrt{-\frac{2\cdot 30\,m/s \cdot 30\,s}{-0,4\,m/s^2}} = 67\,s$

Lösung für $s_ü$: $s_ü = v_0\,t_2 - v_0\,t_1 = v_0\left(t_2 - t_1\right) = 1112\,m$

Probe: $s_ü = s_1\left(t_2\right) = \frac{1}{2}a_0 t_2^2 + v_0\,t_2$

$$s_ü = s_1\left(t_2\right) = -900\,m + 2012\,m = 1112\,m$$

I.2a.



I2b. Geschwindigkeit v_0: $v_0 = \dfrac{100\,km/h}{3{,}6(km/h)/(m/s)} = 27{,}77\dfrac{m}{s}$

Beschleunigung: $a_0 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_0}{t_a} = \dfrac{27{,}77}{11{,}2}\dfrac{m}{s^2} = 2{,}48\dfrac{m}{s^2}$

Beschleunigungsstrecke: $s_a = \dfrac{1}{2}a_0 t_a^2 = 155{,}55\ m$

I2c. Strecke mit v_0: $s_v = s_1 - s_a = 900\,m - 155{,}55\,m = 744{,}45\ m$

I2d. Bremsweg: $s_b = v_0\, t_b + \frac{1}{2} a_b t_b^2$

Bremsverzögerung: $a_b = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_b - 0} = -\frac{v_0}{t_b}$ es folgt: $t_b = -\frac{v_0}{a_b}$

Einsetzen ergibt: $s_b = -v_0 \frac{v_0}{a_b} + \frac{1}{2} a_b \frac{v_0^2}{a_b^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a_b}$

Bremsverzögerung: $a_b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{s_b} = -\frac{1}{2} \frac{27{,}77^2\ m^2\ s^{-2}}{100\, m} = -3{,}85 \frac{m}{s^2}$

Bremszeit: $t_b = -\frac{v_0}{a_b} = -\frac{27{,}77\, m\, s^{-1}}{-3{,}85\, m\, s^{-2}} = 7{,}2\, s$

I2e. Bed. für die Bremskraft: $F_b = m\, a_b^{\max} = \mu_{H,\max}\, m\, g = F_{H,\max}$

Max. Bremsverzögerung: $\left|a_b^{\max}\right| = \mu_{H,\max} \cdot g = 0{,}85 \cdot 10 \frac{m}{s^2} = 8{,}5 \frac{m}{s^2}$

I2f. Die Gesamtbeschleunigung a_{ges} bei der Kreisfahrt ergibt sich in folgender Form aus der Tangentialkomponente a_t (= a_B Bahnbeschleunigung) und der Normalkomponente a_n (= a_R Radialbeschleunigung):

$$a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Tangentialbeschleunigung: $a_t = a_B = 2{,}48\, m\, s^{-2}$

Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \frac{v_B^2}{r}$

mit Bahngeschwindigkeit: $v_B = v_0 = 13{,}88\, m\, s^{-1}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges}(t_E) = \sqrt{a_t^2 + \frac{v_B^4}{r^2}} = \sqrt{2{,}48^2 + \frac{13{,}88^4}{160^2}} \frac{m}{s^2} = 2{,}76 \frac{m}{s^2}$

I2g. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_t = a_B = 0$

Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \frac{v_B^2}{r}$

Bahngeschwindigkeit: $v_B = v_0 = 27{,}77\, m\, s^{-1}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges}(t_E) = \sqrt{a_t^2 + \frac{v_B^4}{r^2}} = \sqrt{0 + \frac{27{,}77^4}{160^2}} \frac{m}{s^2} = 4{,}82 \frac{m}{s^2}$

Der Beschleunigungsvektor zeigt radial auf den Mittelpunkt der Kreisbahn.

I2h. Bed. für die Bremskraft: $F_B = m\, a_{ges}^{\max} = \mu_{H,\max}\, m\, g = F_{H,\max}$

Max. Beschleunigung: $a_{ges}^{\max} = \mu_{H,\max} \cdot g = 0{,}85 \cdot 10 \frac{m}{s^2} = 8{,}5 \frac{m}{s^2}$

Max. Bremsverzögerung: $a_t^{\max} = \sqrt{\left(a_{ges}^{\max}\right)^2 - \frac{v_B^4}{r^2}} = \sqrt{8{,}5^2 - \frac{27{,}77^4}{r^2}} \frac{m}{s^2} = 7{,}00 \frac{m}{s^2}$

II1a. D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0$

Es wirkt die Gewichtskraft F_{g2} nach unten und die Seilkraft F_{S2} nach oben.

$$\left(F_{g2} - F_{S2}\right) - m_2\, a = 0 \qquad (1)$$

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0$

Es wirken die Seilkraft F_{g1} nach oben, die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{t1} und die Gleitreibungskraft F_{G1} nach unten.

$$\left(F_{S1} - F_{t1} - F_{G1}\right) - m_1\, a = 0 \qquad (2)$$

Aus Gl. (2) folgt $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

da die Kräfte an den beiden Seilenden betragsmäßig gleich sind: $F_{S1} = F_{S2}$

folgt durch Einsetzen in Gl. (1): $\left(F_{g2} - \left(F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a\right)\right) - m_2\, a = 0$

Lösung: $a = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\left(F_{g2} - F_{t1} - F_{G1}\right)$

mit: $F_{g2} = m_2\, g$

$F_{t1} = m_1\, g \sin\alpha$

$F_{G1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha$

Lösung: $a = g \cdot \dfrac{m_2 - m_1\left(\sin\alpha + \mu_G \cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{25 - 20\left(0,2588 + 0,1 \cdot 0,9659\right)}{45}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,3976 = 3.98\, m\, s^{-2}$$

II1b. Gleichmäßig Beschleunigung: $s = \dfrac{1}{2} a\, t^2$

Für die Strecke l gilt: $t_l = \sqrt{\dfrac{2 \cdot l}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5\, m}{3,98\, m\, s^{-2}}} = 1,59\, s$

II1c. Seilkraft an m_2: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\, a = m_2\, g - m_2\, a$

$F_{S2} = 250,0\, N - 99,4\, N = 150,6\, N$

Seilkraft an m_1: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

$F_{S1} = m_1\, g \cdot \sin\alpha + \mu_G\, m_1\, g \cdot \cos\alpha + m_1\, a$

$F_{S1} = 51,8\, N + 19,3\, N + 79,5\, N = 150,6\, N$

II2a. D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0 = \left(F_{Sl} + F_{Sr} - F_{g2}\right) - m_2 a \quad (1)$

mit Seilkraft links F_{Sl}

und Seilkraft rechts $F_{Sr} = F$

und der Gewichtskraft: $F_{g2} = m_2\, g$

Die Seilkraft F_{Sl} wird mit Hilfe des Seils auf die Masse m_1 übertragen und wirkt der Gewichtskraft entgegen.

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\,a = 0 = \left(F_{g1} - F_{Sl}\right) - m_1 a$ (2)

mit der Gewichtskraft: $F_{g1} = m_1\,g$

Aus Gl. (1) folgt: $F = F_{Sr} = F_{g2} - F_{Sl} + m_2 a$

setze F_{sl} aus Gl. (2) ein: $F = F_{Sr} = F_{g2} - \left(F_{g1} - m_1 a\right) + m_2 a$

mit $a = \dfrac{g}{2}$ $\quad F = g \cdot \left[\left(m_2 - m_1\right) + \dfrac{\left(m_1 + m_2\right)}{2}\right]$

$$F = g \cdot \left(\frac{3}{2} m_2 - \frac{1}{2} m_1\right) = 10\frac{m}{s^2} \cdot \left(30 - 5\right) kg = 250\,N$$

III1a. Die Masse m_1 ist größer als die Masse m_2. Deshalb wird sich m_1 abwärts und m_2 aufwärts bewegen.

An m_1 wirken die Tangentialkomponente der Gewichtskraft abwärts währen die Haftreibungskraft und die Seilkraft aufwärts gerichtet sind.

Kräfte an m_1: abwärts: $F_{t1} = m_1 g \sin\theta = 68{,}404\,N$

aufwärts: $F_{H,\max 1} + F_{S1} = \mu_{H,\max} m_1\, g \cdot \cos 20° + F_{S1}$

$F_{H,\max 1} + F_{S1} = \mu_{H,\max} \cdot 187{,}938\,N + F_{S1}$

An m_2 wirken die Tangentialkomponente der Gewichtskraft und die Haftreibungskraft abwärts und die Seilkraft aufwärts.

Kräfte an m$_2$: abwärts: $F_{t2} + F_{H,\max 2} = m_2\, g \sin\theta + \mu_{H,\max}\left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta$

$F_{t2} + F_{H,\max 2} = 34{,}202\,N + \mu_{H,\max} \cdot 281{,}907\,N$

aufwärts: F_{S2}

Es gilt: $F_{S1} = F_{S2}$

Summe aller Kräfte muss im statischen Fall Null sein:

$$F_{t1} - F_{H,\max 1} - F_{H,\max 2} - F_{t2} = 0$$

Die Körper gleiten, wenn gilt: $F_{t1} > F_{H,\max 1} + F_{H,\max 2} + F_{t2}$

Gleitbedingung $F_{t1} - F_{t2} > F_{H,\max 1} + F_{H,\max 2}$

$$\left(m_1 - m_2\right) g \cdot \sin 20° > \mu_{H,\max}\left(2m_1 + m_2\right) g \cdot \cos 20°$$

Lösung für $\mu_{H,\max}$: $\quad \mu_{H,\max} < \dfrac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\theta}{\left(2m_1 + m_2\right)\cos\theta} = \dfrac{10}{50}\tan 20° = 0{,}073$

III1b. D'Alembertsche Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\,a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{t1} - F_{G1} - F_{S1}\right) - m_1\,a = 0$

D'Alembertsche Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\,a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{S2} - F_{t2} - F_{G2}\right) - m_2\, a = 0$

Es gilt: $F_{S1} = F_{S2} = F_{t2} + F_{G2} + m_2\, a$

Einsetzen: $\left(F_{t1} - F_{G1} - \left(F_{t2} + F_{G2} + m_2\, a\right)\right) - m_1\, a = 0$

$$F_{t1} - F_{t2} - F_{G1} - F_{G2} - m_1\, a - m_2\, a = 0$$

Lösung: $a = \dfrac{\left(F_{t1} - F_{t2}\right) - \left(F_{G1} + F_{G2}\right)}{m_1 + m_2}$

$$a = g \cdot \frac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\theta - \mu_G\left(m_1 + \left(m_1 + m_2\right)\right)\cos\theta}{m_1 + m_2}$$

$$a = g \cdot \frac{10\,kg \sin 20° - 0{,}05 \cdot 50\,kg \cos 20°}{30\,kg}$$

Lösung: $a = 0{,}357\,\dfrac{m}{s^2}$

III1c. Haftreibungsfall: $F_{S1} = F_{t1} - F_{H,\max 1} = m_1 g \sin\theta - \mu_{H,\max} m_1\, g \cos\theta$

$$F_{S1} = 68{,}404\,N - 13{,}681\,N = 54{,}723\,N$$

Probe für F_{S2}: $F_{S2} = F_{t2} + F_{H,\max 2}$

$$F_{S2} = m_2\, g \sin 20° + \mu_{H,\max}\left(m_1 + m_2\right) g \cos 20°$$

$$F_{S2} = 34{,}202\,N + 20{,}521\,N = 54{,}723\,N$$

III1d. Gleitfall: $F_{S1} = F_{t1} - F_{G1} - F_{Tr1}$

$$F_{S1} = 68{,}404\,N - 9{,}396\,N - 7{,}140\,N = 51{,}868\,N$$

Probe für F_{S2}: $F_{S2} = F_t^2 + F_{G2} + F_{Tr}^2$

$$F_{S2} = 34{,}202\,N + 14{,}095\,N + 3{,}570\,N = 51{,}867\,N$$

III2a. Gesamtenergie: $E_{ges} = m\, g\, h_0 + \dfrac{1}{2} m v_0^2 = 5\ J + 8\ J = 13\ J$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 0→1**:

$$W_{R01} = \mu_G\, F_N\, s_{01} = \frac{\mu_G\, m\, g \cos 30° h_0}{\sin 30°} = 1{,}732\ J$$

Kinetische Energie **Punkt 1**: $E_{kin1} = E_{ges} - W_{R01} = \left(13 - 1{,}732\right) J = 11{,}268\ J$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 1→2**:

$$W_{R12} = \mu_G\, F_N\, s_{12} = \mu_G\, m\, g\, s_{12} = 4\ J$$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 0→2**:

$$W_{R02} = W_{R01} + W_{R12} = 5{,}732\ J$$

Kinetische Energie **Punkt 2**: $E_{kin2} = E_{ges} - W_{R02} = \left(13 - 5{,}732\right) J = 7{,}268\ J$

Verformungsarbeit (Feder) im **Punkt 3**:

$$W_{E3} = E_{kin2} = 7{,}268\ J$$

III2b. Federweg:

Da gilt: $W_{E3} = \frac{1}{2} D\, x_3^2$

folgt: $x_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{E3}}{D}} = 0{,}0539\, m \cong 5{,}4\, cm$

III2.c. Die Summe aller Reibungsarbeiten entlang des gesamten Weges ist gleich der kinetische Anfangsenergie im **Punkt 0.**

Kinetische Anfangsenergie: $E_{kin0} = \frac{1}{2} m \left(v_0'\right)^2 = 2 \cdot \left(W_{R01} + W_{R12}\right) = 11{,}464\ J$

Anfangsgeschwindigkeit: $v_0' = \sqrt{\frac{4 \cdot \left(W_{R01} + W_{R12}\right)}{m}} = 4{,}79 \frac{m}{s}$

IV1. Berechnung von Hilfsgrößen:

Steigung: $\tan\theta = \frac{\Delta h}{\Delta x}$

Steigungswinkel: $\theta = \arctan \frac{\Delta h}{\Delta x} = \arctan 0{,}16 = 9{,}1°$

Weg bei gleichm. Beschleunigung: $s_a = \frac{1}{2} a\, t^2$

Beschleunigung: $a = \frac{2\, s}{t^2} = \frac{2 \cdot 190\, m}{(2{,}5 \cdot 60)^2\, s^2} = 0{,}01688 \frac{m}{s^2}$

Endgeschwindigkeit: $v_{\max} = a \cdot t = 0{,}0169 \frac{m}{s^2} \cdot 150\, s = 2{,}533 \frac{m}{s}$

mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v} = \frac{1}{2} v_{\max} = 1{,}267 \frac{m}{s}$

Berechnung der mittleren und maximalen Leistung mit Lösungsweg I:

gesuchte Kraft aufwärts: F_{ges}

Gewichtskraft: F_g

Tangentialkomponente von F_g: $F_t = F_g \sin\theta = m\, g \sin\theta$

Reibungskraft: $F_G = \mu_G\, F_N = \mu_G\, F_G \cos\theta = \mu_G\, m\, g \cos\theta$

D'Alembertsches Prinzip: $\left(\sum_i F_i\right) - m\, a = 0$

$$\left(F_{ges} - F_t - F_G\right) - m\, a = 0$$

Lösung: $F_{ges} = F_t + F_G + m\, a$

$$F_{ges} = m\, g \sin\theta + \mu_G\, mg \cos\theta + m\, a$$

$$F_{ges} = 2527{,}8\, N + 1579{,}9\, N + 27{,}0 N = 4134{,}8\, N$$

Mittlere Nutzleistung: $\overline{P}_{Nutz} = F_{ges} \cdot \overline{v} = 4135\, N \cdot 1{,}267 \frac{m}{s} = 5237\, W$

Maximale Nutzleistung: $P_{Nutz}^{\max} = F_{ges} v_{\max} = 4135 N \cdot 2{,}533\, N$

$$P_{Nutz}^{\max} = F_{ges} v_{\max} = 10475\,W$$

Mittlere Gesamtleistung: $\bar{P}_{ges} = \frac{1}{\eta} \cdot \bar{P}_{Nutz} = \frac{1}{0,75} \cdot 5237 = 6983\,W$

Maximale Gesamtleistung: $P_{ges}^{\max} = \frac{1}{\eta} \cdot P_{Nutz}^{\max} = \frac{1}{0,75} \cdot 10475 = 13966\,W$

Berechnung der mittleren Leistung mit Lösungsweg II:

Höhenänderung: $\Delta h = s \cdot \sin\theta = s \cdot \sin\left(\arctan 0{,}16\right) = 30.0\,m$

Hubarbeit: $W_H = m\,g\,h = 1600\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m = 480{,}29\,kJ$

Reibungsarbeit: $W_G = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos\theta \cdot s$

$$W_G = 0{,}1 \cdot 1600\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}98744 \cdot 190\,m$$

$$W_G = 300{,}18\,kJ$$

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 1600\,kg \cdot \left(2{,}54\frac{m}{s}\right)^2 = 5{,}14\,kJ$

(nimmt man an, dass der Wagen am Ende der Rampe die Geschwindigkeit $v = 0$ hat, entfällt der Energieanteil E_{kin})

Gesamtenergie: $E_{ges} = W_H + W_G + E_{kin} = 785{,}61\,kJ$

Mittlere Nutzleistung: $P = \frac{E_{ges}}{\Delta t} = \frac{785\,kJ}{150\,s} = 5237\,W$

Mittlere Gesamtleistung: $\bar{P}_{ges} = \frac{1}{\eta} \cdot \bar{P}_{Nutz} = \frac{1}{0,75} \cdot 5237 = 6983\,W$

IV2a. Masse der Lok: $m_L = 25\,t = 25000\,kg$

Masse des Waggons: $m_W = 8\,t = 8000\,kg$

Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\,m\,s^{-1} - 0}{5\,s - 0} = 1{,}2\,m\,s^{-2}$

Beschleunigungskraft: $F_a = m_{ges}\,a = \left(m_L + m_W\right) a$

$$F_a = 33000\,kg \cdot 1{,}2\frac{m}{s^2} = 39{,}6\,kN$$

Reibungskraft: $F_R = 10\,kN$

Gesamtkraft: $F_{ges} = F_a + F_R = 49{,}6\,kN$

Maximale Leistung: $P_{\max} = F_{ges}\,v_{\max} = 49{,}6\,kN \cdot 6\frac{m}{s} = 297{,}6\,kW$

Mittlere Leistung: $P_{mittel} = F_{ges}\,v_{mittel} = 49{,}6\,kN \cdot 3\frac{m}{s} = 148{,}8\,kW$

IV2b. Waggon Nr. 1 vor dem Stoß: $v_1 = 6\,m\,s^{-1}$

Waggon Nr. 2,3,4 vor dem Stoß: $v_i = 0,\ f\ddot{u}r\ i = 2,3,4$

Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) u$

Geschwindigkeit nach dem Stoß: $u = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} v_1$

$$u = \frac{8}{8+10+10+10} v_1 = \frac{8}{38} v_1$$

$$u = 1,263\, m\, s^{-1}$$

IV2c. Energieerhaltungssatz: $\dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(\dfrac{1}{2} m_i u^2 \right) + Q$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) u^2 + Q$$

Energieumsatz in der Kupplung: $Q = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 - \dfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) u^2$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) m_1^2 v_1^2}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right)^2} = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i} \right) E_{kin}^1$$

$$Q = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i} \right) E_{kin}^1 = 0,789 \cdot 144\, kJ = 113,6\, kJ$$

Relativer Energieumsatz: $\dfrac{Q}{E_{kin}} = 1 - \dfrac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = 1 - \dfrac{8}{38} = 78,9\%$

IV2d. Kraft = Impulsänderung: $F = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{p_{End} - p_{Anf}}{\Delta t}$

Für Waggon Nr. 1: $F_1 = \dfrac{m_1 u - m_1 v_1}{\Delta t} = \dfrac{m_1 (u - v_1)}{\Delta t}$

$$F_1 = \frac{8000(1,263 - 6)}{0,8} N = -47,37\, kN$$

Für Waggon Nr.2,3,4: $F_{234} = \dfrac{(m_2 + m_3 + m_4) u - 0}{\Delta t} = \dfrac{(m_2 + m_3 + m_4) u}{\Delta t}$

$$F_{234} = \frac{30000 \cdot 1,263}{0,8} = +47,36\, kN$$

Auch in diesem Fall gilt also: Actio = Reactio.

V1. Berechnung von Hilfsgrößen:

Anfangsenergie Masse m_2: $E_{pot,2} = m_2\, g\, h = 20\, J$

Weg auf schiefer Ebene: $s_0 = \dfrac{h}{\sin\theta} = 4\, m$

Reibungsarbeit auf s_0: $W_{R0} = \mu_G\, m\, g \cos\theta\, s_0 = 6,928\, J$

Reibungsarbeit s_1: $W_{R0} = \mu_G \, m \, g \, s_1 = 3{,}000 \, J$

Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = 9{,}928 \, J$

Kinetische Energie des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$E_{kin,2} = E_{pot,2} - W_{R,ges} = 10.072 \, J$$

Geschwindigkeit des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin,K}}{m_2}} = 4{,}488 \, m \, s^{-1}$$

V1a. Elastischer Stoß mit $v_1 = 0$:

Impulserhaltungssatz: $m_2 \, v_2 = m_1 \, u_1 + m_2 \, u_2$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2 \, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, u_2^2$

Geschwindigkeit u_1: $u_1 = \frac{2 \, m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{3} v_2 = 2{,}992 \, m \, s^{-1}$

Geschwindigkeit u_2: $u_2 = \frac{2 \, m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = -\frac{1}{3} v_2$

$$u_2 = -1{,}496 \, m \, s^{-1}$$

Energieerhaltungssatz: $m_1 \, g \, h_{elastisch} = \frac{1}{2} m_1 \, u_1^2$

$$h_{elastisch} = \frac{u_1^2}{2 \, g} = 0{,}448 \, m$$

V1b1. Unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $\frac{Q}{E_{kin,2}} = \chi$; allgemeine Lösung für u_1

Impulserhaltungssatz: $m_2 \, v_2 = m_1 \, u_1 + m_2 \, u_2$

$$m_2 \, u_2 = m_2 \, v_2 - m_1 \, u_1$$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2 \, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, u_2^2 + Q$

$$\frac{1}{2} m_2 \, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, u_2^2 + \chi \cdot \frac{1}{2} m_2 \, v_2^2$$

$$m_2 \, v_2^2 = m_1 \, u_1^2 + m_2 \, u_2^2 + \chi \cdot m_2 \, v_2^2$$

$$(1-\chi) m_2^2 \, v_2^2 = m_1 \, m_2 \, u_1^2 + m_2^2 \, u_2^2$$

$$(1-\chi) m_2^2 \, v_2^2 = m_1 \, m_2 \, u_1^2 + (m_2 \, v_2 - m_1 \, u_1)^2$$

$$(1-\chi) m_2^2 \, v_2^2 = m_1 \, m_2 \, u_1^2 + m_2^2 \, v_2^2 - 2 m_2 \, v_2 \, m_1 \, u_1 + m_1^2 \, u_1^2$$

$$(m_1 \, m_2 + m_1^2) u_1^2 - 2 \, m_2 \, v_2 \, m_1 \, u_1 = -\chi \cdot m_2^2 \, v_2^2$$

$$u_1^2 - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \, v_2 = -\chi \cdot \frac{m_2^2}{m_1 \, m_2 + m_1^2} v_2^2$$

Setze zur Vereinfachung: $\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

$$u_1^2 - 2 \, \lambda \, u_1 \, v_2 + \lambda^2 v_2^2 = \left(\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1} \lambda \right) v_2^2$$

$$u_1 - \lambda v_2 = \pm v_2 \cdot \sqrt{\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1}\lambda} \cdot$$

Allgemeine Lösung: $$u_1 = \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1}\lambda} \right) \cdot v_2$$

Diskussion: Für $\chi \to 0$ entspricht die Lösung derjenigen für den elastischen Stoß:

Setze $\chi = 0$ $$u_1 = \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2$$

Für die positive Wurzel ist: $$u_1 = \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2 = 2\lambda \cdot v_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} v_2$$

diese Lösung stimmt mit Aufg. **V1a.** überein.

(Negative Wurzel: $u_1 = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2 = 0 \cdot v_2 = 0$, muss ausgeschlossen werden)

Lösung für Aufg. V1b: Setze $\chi = 0,4$, $m_2 = m = 1kg$ und $m_1 = 2m = 2kg$:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3}$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{5}\frac{1}{2}\frac{1}{3}} \right) \cdot v_2$$

Wie oben gezeigt, muss die positive Wurzel verwendet werden:

$$u_1 = \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{5-3}{45}} \right) \cdot v_2 = (0,333 + 0,211) \cdot v_2$$

$$u_1 = 0,544 \cdot v_2 = 2,442\, m\, s^{-1}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_2} u_1 = v_2 \left(1 - \frac{2}{1} \cdot 0,544 \right) = -0,088 v_2$$

$$u_2 = -0,088\, 4.488\, m\, s^{-1} = -0,396\, m\, s^{-1}$$

V1b2. Unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $\frac{Q}{E_{kin,2}} = \chi$; allgemeine Lösung für u_2

Impulserhaltungssatz: $$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$m_1 u_1 = m_2 v_2 - m_2 u_2$$

Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + Q$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \chi \cdot \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \chi \cdot m_2 v_2^2$$

$$m_1 m_2 v_2^2 = m_1^2 u_1^2 + m_1 m_2 u_2^2 + \chi \cdot m_1 m_2 v_2^2$$

$$(1-\chi) m_1 m_2 v_2^2 = (m_2 v_2 - m_2 u_2)^2 + m_1 m_2 u_2^2$$

$$(1-\chi) m_1 v_2^2 = m_2 v_2^2 - 2 v_2 m_2 u_2 + m_2 u_2^2 + m_1 u_2^2$$

$$(m_1 + m_2) u_2^2 - 2 v_2 m_2 u_2 = \left((1-\chi) \cdot m_1 - m_2 \right) v_2^2$$

Setze zur Vereinfachung: $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

$$\left(u_2 - \lambda v_2 \right)^2 = \left((1-\chi)\frac{m_1}{m_2}\lambda - \lambda + \lambda^2 \right) v_2^2$$

Allgemeine Lösung: $u_2 = \left(\lambda \pm \sqrt{(1-\chi)\dfrac{m_1}{m_2}\lambda - \lambda + \lambda^2} \right) \cdot v_2$

Diskussion: Für $\chi \to 0$ entspricht die Lösung derjenigen für den elastischen Stoß:

Setze $\chi = 0$ $u_2 = \left(\lambda \pm \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}\lambda - \lambda + \lambda^2} \right) \cdot v_2$

mit $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m}{3m} = \dfrac{1}{3}$ $u_2 = \left(\dfrac{1}{3} \pm \sqrt{2\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}} \right) \cdot v_2 = \left(\dfrac{1}{3} \pm \sqrt{\dfrac{4}{9}} \right) \cdot v_2 = \left(\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{2}{3} \right) \cdot v_2$

Für die negative Wurzel ist: $u_2 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} \right) \cdot v_2 = -\dfrac{1}{3} \cdot v_2$,

diese Lösung stimmt mit Aufg. **V1a.** überein.

(Positive Wurzel: $u_2 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \right) \cdot v_2 = \dfrac{2}{3} \cdot v_2 = v_2$,

muss ausgeschlossen werden)

Lösung für Aufg. V1b: Setze $\chi = 0,4$, $m_2 = m = 1kg$ und $m_1 = 2m = 2\,kg$:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \left(\lambda \pm \sqrt{(1-0,4)\frac{m_1}{m_2}\lambda - \lambda + \lambda^2} \right) \cdot v_2$$

$$u_2 = \left(\lambda \pm \sqrt{\frac{0,6 \cdot 2}{1}\lambda - \lambda + \lambda^2} \right) \cdot v_2$$

$$u_2 = \left(\lambda \pm \sqrt{0,2 \cdot \lambda + \lambda^2} \right) \cdot v_2$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{0,2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} \right) \cdot v_2 = \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{0,067 + 0,111} \right) \cdot v_2$$

Wie oben gezeigt, muss die negative Wurzel verwendet werden:

$$u_2 = \left(\frac{1}{3} - \sqrt{0,178} \right) \cdot v_2 = \left(0,333 - 0,422 \right) \cdot v_2$$

Lösung für u_2 $u_2 = -0,089 \cdot v_2 = -0,399\,m\,s^{-1}$

stimmt bis auf Rundungsfehler mit der oben gefundenen Lösung überein.

Lösung für u_1: $u_1 = \dfrac{m_2}{m_1} v_2 - \dfrac{m_2}{m_1} u_2$

$$u_1 = \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} u_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-0,089) \right) \cdot v_2 = 0,545 \cdot v_2$$

$$u_1 = 0,545 \cdot v_2 = 0,545 \cdot 4,488\,m\,s^{-1} = 2,444\,m\,s^{-1}$$

stimmt bis auf Rundungsfehler mit der oben gefundenen Lösung überein.

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{unelastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u^2_{unelastisch,1}$

$$h_{unelastisch} = \frac{u_1^2}{2\,g} = 0,298\,m$$

V1c. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Impulserhaltungssatz: $m_2\, v_2 = \left(m_1 + m_2\right) u$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2 + Q_{vu}$

Lösung für u: $u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1}{3} v_2 = 1,496\, m\, s^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{vollk.unelastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u^2_{vollk.unelastisch,1}$

$$h_{vollk.unelastisch} = \frac{u^2}{2\,g} = 0,112\,m$$

V1d. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Energieverlust: $Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2$

$$Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\frac{1}{9} v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_2 - \frac{m_1 + m_2}{9}\right) v_2^2$$

Setze: $m_1 = 2\,m$ und $m_2 = m$ $\quad Q_{vu} = \frac{1}{2}\left(m - \frac{3m}{9}\right) v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m\right) v_2^2 = \frac{2}{3} E_{kin,2}$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q_{vu}}{E_{kin,2}} = \frac{2}{3} = 66\%$

V2a. Die beiden verkeilten Fahrzeuge besitzen

kinetische Energie von: $E_{kin} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2$,

die als Reibungsarbeit verbraucht wird.

$$W_R = \mu_G \left(m_1 + m_2\right) g\, s_{rutschen}\,.$$

Es gilt: $E_{kin} = W_R$

Es folgt für u: $u = \sqrt{2\,\mu_G\, g\, s_{rutschen}} = 14 \frac{m}{s} = 50,4 \frac{m}{s}$

V2b. Mittlere Verzögerung: $a_R = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - u}{t_R} = -\frac{u}{t_R}$,

es folgt: $t_R = -\frac{u}{a_R}$

und: $s_R = u\,t_R + \frac{1}{2} a_R\, t_R^2 = -\frac{u^2}{a_R} + \frac{1}{2} a_R \frac{u^2}{a_R^2} = -\frac{1}{2}\frac{u^2}{a_R}$

mittlere Verzögerung: $a_R = -\frac{1}{2}\frac{u^2}{s_R} = -8\frac{m}{s^2}$

V2c. Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{s_R}{t_R} = -\frac{s_R\, a_R}{u} = 7\frac{m}{s}$

Mittlere Leistung: $\bar{P} = F_R\, \bar{v} = (m_1 + m_2)\, a_R\, \bar{v} = -145{,}6\ kW$

V2d. Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u$

Für v_1 folgt: $v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\, u - m_2 v_2}{m_1} = 23\frac{m}{s} = 83\frac{km}{h}$

V2e. Kraftstoß

von PKW(1) auf PKW(2): $\int F\,dt = \Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 (u - v_1) = -9066\ Ns$

von PKW(1) auf PKW(2) $\int F\,dt = \Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 (u - v_2) = +9066\ Ns$

V2f. Energieerhaltungssatz: $E_{ges}^0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 + Q$

Vor dem Zusammenstoß:

Kinetische Energie PKW(1): $E_{kin}^1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 266\ kJ$

Kinetische Energie PKW(2): $E_{kin}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 55{,}55\ kJ$

Nach dem Zusammenstoß:

Kin. Energie PKW(1+2): $E_{kin}^{1+2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 = 254{,}8\ kJ$

Verf.- u. Wärmeenergie: $Q = E_{kin}^1 + E_{kin}^2 - E_{kin}^{1+2} = 66{,}75\ kJ$

Relativer Anteil: $\frac{Q}{E_{ges}} = \frac{Q}{E_{kin}^1 + E_{kin}^2} = 20{,}8\%$

VI1a. Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:
Berechnung der Volumina:

Kugelvolumen: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1{,}333 \cdot \pi R^3$

Volumen der Stange: $V_S = (\pi r^2) \cdot L = 0{,}040 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^3 = 0{,}080 \cdot \pi R^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = \left(2 \cdot \frac{4}{3} + 0{,}08\right)\pi R^3 = 2{,}747\ \pi R^3$

Da eine homogene Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ angenommen wird, sind die Massen der Teilkörper proportional zu deren Volumina.

Masse der Stange: $\frac{m_S}{m_{ges}} = \frac{V_S}{V_{ges}} = \frac{0{,}08}{2{,}747} = 0{,}029126 = 2{,}9\%$

Masse der Kugel: $\frac{m_K}{m_{ges}} = \frac{V_K}{V_{ges}} = \frac{1{,}333}{2{,}746} = 0{,}48532 = 48{,}5\%$

Massenträgheitsmoment Kugel: $J_K = m_K\left(2R\right)^2 + \frac{2}{5}m_k\,R^2 = 4,4\,m_K R^2$

$J_K = 4,4\cdot 0,48532\cdot m_{ges}R^2 = 2{,}1354\cdot m_{ges}R^2$

Massenträgheitsmoment Stange: $J_S = \frac{1}{12}m_S\,L^2 = \frac{1}{12}m_S\,4R^2 = \frac{1}{3}m_S\,R^2$

$J_S = \frac{1}{3}\cdot 0,029126\cdot m_{ges}\,R^2 = 0,0097\cdot m_{ges}\,R^2$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{ges} = 2\cdot J_K + J_S = \left(2\cdot 2{,}1354 + 0,0097\right)\cdot m_{ges}\,R^2$

Lösung: Faktor *x*: $x = \frac{J_{ges}}{m_{ges}R^2} = 2\cdot 2{,}1354 + 0,0097 = 4,28$

VI1b. Hantel parallel zur Symmetrieachse:

Die Volumina und Massenverhältnisse der Teilkörper können aus **VI1a** übernommen werden.

Massenträgheitsmoment Kugel: $J_K = \frac{2}{5}m_k\,R^2 = 0,4\cdot m_k\,R^2$

$J_K = 0,4\cdot 0,48532\cdot m_{ges}\,R^2 = 0{,}19413\cdot m_{ges}\,R^2$

Massenträgheitsmoment Stange: $J_S = \frac{1}{2}m_s r^2 = 0,5\,m_s\,r^2 = 0,5\,m_s\,0,04\,R^2$

$J_S = 0,02\;m_s\,R^2 = 0,02\cdot 0,029126\cdot m_{ges}\,R^2$

$J_S = 0,00058252\cdot m_{ges}\,R^2$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{ges} = 2\cdot J_K + J_S$

$J_{ges} = \left(2\cdot 0{,}19413 + 0,000583\right)m_{ges}\,R^2$

Lösung: Faktor *x*: $x = \frac{J_{ges}}{m_{ges}R^2} = 2\cdot 0{,}19413 + 0,000583 = 0,389$

Fazit: Die Massenträgheitsmomente der Hantel unterscheiden sich je nach Orientierung von Dreh- und Symmetrieachse um den Faktor 11,0!

VI1c. Speichenrad:

Berechnung der Volumina:

Volumen des Radkranzes: $V_a = \pi\,h\left(R_{aa}^2 - R_{ai}^2\right) = 2\left(256 - 225\right)\pi\,r^3 = 62\,\pi\,r^3$

Volumen der Radnabe: $V_i = \pi\,h\left(R_{ia}^2 - R_{ii}^2\right) = 2\left(9 - 4\right)\pi\,r^3 = 10\,\pi\,r^3$

Volumen einer Speiche: $V_S = \pi\,r^2 l_S = \left(15 - 3\right)\pi\,r^3 = 12\,\pi\,r^3$

Volumen aller Speichen: $V_{S,ges} = 8\cdot V_S = 96\,\pi\,r^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = \left(10 + 62 + 96\right)\pi\,r^3 = 168\;\pi\,r^3$

Mit $R = R_{aa} = 16\,r$ folgt: $V_{ges} = \frac{168}{16^3}\pi\,R^3 = \frac{168}{4096}\pi\,R^3 = 0,041015\,\pi\,R^3$

Da eine homogene Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ angenommen wird, sind die Massen der Teilkörper proportional zu den Volumina.

Masse des Radkranzes: $\frac{m_a}{m_{ges}} = \frac{V_a}{V_{ges}} = \frac{62}{168} = 0,369048 = 36,9\%$

Masse der Radnabe: $\frac{m_i}{m_{ges}} = \frac{V_i}{V_{ges}} = \frac{10}{168} = 0,059524 = 6,0\%$

Masse einer Speiche: $\frac{m_S}{m_{ges}} = \frac{V_S}{V_{ges}} = \frac{12}{168} = 0,071429 = 7,1\%$

Masse aller Speichen: $\frac{m_K}{m_{ges}} = \frac{V_K}{V_{ges}} = \frac{96}{168} = 0,571429 = 57,1\%$

Massenträgheitsmoment Kranz: $J_a = \frac{1}{2} m_a \left(R_{aa}^2 + R_{ai}^2\right) = \frac{1}{2}\left(256+225\right) m_a\, r^2$

$$J_a = \frac{1}{2} 481 m_a\, r^2 = \frac{1}{2} 481 \cdot 0,369048 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_a = 88,756 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment Nabe: $J_i = \frac{1}{2} m_i \left(R_{ia}^2 + R_{ii}^2\right) = \frac{1}{2}\left(9+4\right) m_i\, r^2$

$$J_i = \frac{1}{2} 13 \cdot m_i\, r^2 = \frac{1}{2} 13 \cdot 0,059524 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_i = 0,38691 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Zur Berechnung des Massenträgheitsmoments der Speichen kann der Steinersche Satz verwendet werden: $J_{ges} = m\, h^2 + J_S$,

wobei h gleich dem Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt, und J_S dem Massenträgheitsmoment für Drehungen um eine Achse durch den Schwerpunkt entspricht.

Abstand Drehachse – Schwerpunkt: $h = 9\, r$

Massenträgheitsmoment J_S: $J_S = \frac{1}{12} m_S\, L^2 = \frac{1}{12} m_S\, 12^2 r^2 = 12\, m_S\, r^2$

Massenträgheitsmoment J_{ges}: $J_{S,ges} = m_S\, h^2 + J_S = m_S\, 81 r^2 + 12\, m_S\, r^2$

$$J_{S,ges} = 93 m_S\, r^2 = 93 \cdot 0,071429 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{S,ges} = 6,6429 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment aller acht Speichen:

$$J_{8S,ges} = 8 \cdot 6,6429 \cdot m_{ges}\, r^2 = 53,1432 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{Rad,ges} = J_i + J_{8S,ges} + J_a$

$$J_{Rad,ges} = \left(0,38691 + 53,1432 + 88,756\right) \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{Rad,ges} = 142,286 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{Rad,ges} = \frac{142,286}{16^2} \cdot m_{ges}\, r^2 = 0,5558 \cdot m_{ges}\, R^2$$

Lösung: Faktor *x*: $x = \frac{J_{Rad,ges}}{m_{ges}\, R^2} = 0,5558$

VI1d. Dreht man die Hantel senkrecht zur Symmetrieachse, könnte man als sehr einfache Abschätzung zum Beispiel die beiden Kugeln als Massenpunkte im Abstand h betrachten und die Verbindungsstange ignorieren

Abstand Drehachse – Schwerpunkt: $h = 2\, R$

Massenträgheitsmoment für einen Massenpunkte mit Masse m_{ges} im Abstand h von der Drehachse: $J'_{ges} \cong 4\,m_{ges} R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges}\,R^2} = 4$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 4{,}28$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -6{,}5\%$

Dreht man die Hantel parallel zur Symmetrieachse, könnte man als einfache Abschätzung zum Beispiel nur die Massenträgheitsmomente der beiden Kugeln mit jeweils der Hälfte der Gesamtmasse addieren.

Massenträgheitsmoment einer Kugel: $J_K = \dfrac{2}{5} m_K\, R^2 = \dfrac{2}{5}\dfrac{m_{ges}}{2} R^2 = \dfrac{1}{5} m_{ges} R^2$

Massenträgheitsmoment von zwei Kugeln : $J'_K \cong \dfrac{2}{5} m_{ges} R^2 = 0{,}4 \cdot m_{ges} R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges}\,R^2} = 0{,}4$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 0{,}389$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -2{,}8\%$

Das Massenträgheitsmoment des Speichenrad könnte man durch das einer homogene Scheibe mit Masse m_{ges} und Radius R abschätzen.

Homogene Scheibe: $J'_S = \dfrac{1}{2} m_{ges}\, R^2 = 0{,}5\, m_{ges}\, R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges}\,R^2} = 0{,}5$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 0{,}5558$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -10{,}0\%$

Fazit: Es lohnt also fast immer zunächst eine einfache Abschätzung des Massenträgheitsmoments zu verwenden, bevor die aufwendige Berechnung des korrekten Wertes durchgeführt wird.

VI2a Betrachtung der Kräfte und Momente:

Der Körper mit der Masse *m* fällt gleichmäßig beschleunigt.

Gleichm. beschleunigte Bewegung: $s = \dfrac{1}{2} a\, t^2$

$$a = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{4m}{25\,s^2} = 0{,}16\,m\,s^{-2}$$

Es wirken auf m die Gewichtskraft F_g und die Seilkraft F_S :

D'Alembertsches Prinzip für m: $\left(\sum_i F_i\right) - m\,a = 0 = \left(F_g - F_S\right) - ma$

Die Seilkraft F_S erzeugt ein Drehmoment am System Rad/Achse:

$$M = F_S \cdot R$$

Das Drehmoment erzeugt eine Winkelbeschleunigung::

$$M = J \cdot \alpha$$

Für Beschleunigung und Winkelbeschleunigung gilt der Zusammenhang:

$$a = R \cdot \alpha$$

Es folgt: $F_S \cdot R = J\,\frac{a}{R}$

$$F_S = J\,\frac{a}{R^2}$$

Es folgt: $\left(F_g - F_S\right) - ma = m\left(\,g - a\right) - \frac{J\,a}{R^2} = 0$

$$J = m\,R^2\,\frac{g-a}{a}$$

$$J = 10 \cdot \left(0{,}08\right)^2 \frac{10 - 0{,}16}{0{,}16}\,kg\,m^2 = 3{,}936\,kg\,m^2$$

VI2a Betrachtung mit Hilfe des Energiesatzes:

Der Körper mit der Masse *m* fällt gleichmäßig beschleunigt.

Gleichm. beschleunigte Bew. $v = a\,t = 0{,}16\,m\,s^{-2} \cdot 5\,s = 0{,}8\,m\,s^{-1}$

Energie des fallenden Körpers: $E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$

Energie des drehenden Rades: $E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2$

Für die Geschwindigkeit des fallenden Körpers und der Winkelgeschwindigkeit des drehenden Rades gilt der Zusammenhang:

$$v = R\,\omega$$

Energieerhaltungssatz: $m\,g\,h = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2$

Es gilt: $h = s$

$$m\,g\,s = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{J}{R^2}\,v^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)v^2$$

$$\frac{2\,g\,s}{a^2 t^2} = 1 + \frac{J}{m\,R^2}$$

$$\frac{g\,t^2}{2s} = 1 + \frac{J}{m\,R^2}$$

$$J = \left(\frac{g\,t^2}{2\,s} - 1\right) m\,R^2 = 3{,}936\,kg\,m^2$$

(**Bem.:** Mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$ erhält man als Ergebnis $J = 3{,}86\,m\,s^{-2}$.)

VII1a. Betrachte die Drehmomente an der Umlenkrolle:

Die Seilkraft F_{Su} erzeugt ein Drehmoment nach "rechts", die Seilkraft F_{So} ein Drehmoment nach "links". Die tatsächliche Winkelbeschleunigung α der Rolle ist proportional zur Differenz der beiden Drehmomente.

Es gilt: $M_{links} - M_{rechts} = F_{So}\,R - F_{Su}\,R = \left(F_{So} - F_{Su}\right)R = J\,\alpha$

mit: $J = \dfrac{1}{2} m_R\, R^2$

Wenn die Rolle starr ist, und das Seil nicht rutscht, gilt:

$$a = R\,\alpha$$

D'Alembertsche Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\,a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{t1} - F_{G1} - F_{So}\right) - m_1\,a = 0$

Es folgt: $F_{So} = F_{t1} - F_{G1} - m_1\,a$

D'Alembertsche Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\,a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{Su} - F_{t2} - F_{G2}\right) - m_2\,a = 0$

Es folgt: $F_{Su} = F_{t2} + F_{G2} + m_2\,a$

Einsetzen: $\left(F_{So} - F_{Su}\right) = \left(\left(F_{t1} - F_{G1} - m_1\,a\right) - \left(F_{t2} + F_{G2} + m_2\,a\right)\right)$

$$F_{t1} - F_{G1} - m_1\,a - F_{t2} - F_{G2} - m_2\,a = \frac{J\,\alpha}{R} = \frac{J\,a}{R^2}$$

$$F_{t1} - F_{G1} - F_{t2} - F_{G2} = a\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right)$$

$$F_{t1} - F_{G1} - \left(F_{t2} + F_{G2}\right) = a\left(m_1 + m_2 + \frac{\frac{1}{2} m_R\,R^2}{R^2}\right)$$

Lösung: $a = \dfrac{\left(F_{t1} - F_{G1}\right) - \left(F_{t2} + F_{G2}\right)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_R} = \dfrac{\left(F_{t1} - F_{t2}\right) - \left(F_{G1} + F_{G2}\right)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_R}$

$$a = g \cdot \frac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\theta - \mu_G\left(m_1 + \left(m_1 + m_2\right)\right)\cos\theta}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_R}$$

$$a = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{10\,kg\,\sin 20° - 0{,}05 \cdot 50\,kg\,\cos 20°}{32{,}5\,kg}$$

Lösung: $a = 0{,}032953 \cdot g = 0{,}330\,\dfrac{m}{s^2}$

VII1b. Seilkraft "oben": $F_{So} = F_{t1} - F_{G1} - m_1\,a$

$$F_{So} = F_{t1} - F_{G1} - m_1\,a = g\left(m_1 \sin\theta - \mu_G m_1 \cos\theta\right) - m_1\,a$$

$$F_{So} = m_1\,g\left(\sin\theta - \mu_G\,\cos\theta - \frac{a}{g}\right)$$

$$F_{So} = 10\frac{m}{s^2}\cdot 20kg\left(\sin 20° - 0{,}05\cos 20° - 0{,}032953\right)$$

$$F_{So} = 10\frac{m}{s^2}\cdot 20\,kg\cdot 0{,}262083 = 52{,}4\,N$$

Seilkraft "unten":

$$F_{Su} = F_{t2} + F_{G2} + m_2\,a$$

$$F_{Su} = m_2\,g\sin\theta + \mu_G\left(m_1 + m_2\right)g\cos\theta + m_2\,a$$

$$F_{Su} = g\left(m_2\sin\theta + \mu_G\left(m_1+m_2\right)\cos\theta + m_2\frac{a}{g}\right)$$

$$F_{Su} = g\left(10kg\cdot\sin 20° + 0{,}05\cdot 30kg\cdot\cos 20° + 10\,kg\cdot\frac{a}{g}\right)$$

$$F_{Su} = g\left(3{,}420\,kg + 1{,}410\,kg + 0{,}330\,kg\right) = 51{,}6\,N$$

Probe: Welche Kraft wird zur Erzeugung des Drehmoments an der Umlenkrolle benötigt?

Für die Drehmomente gilt: $M_{links} - M_{rechts} = F_{So}\,R - F_{Su}\,R = \left(F_{So} - F_{Su}\right)R = J\,\alpha$

Es folgt: $\Delta F_R = F_{So} - F_{Su} = \frac{J\,\alpha}{R} = \frac{\left(\frac{1}{2}m_R\,R^2\right)\cdot a}{R^2} = \frac{1}{2}m_R\,a$

$$\Delta F_R = 0{,}5\cdot 5\,kg\cdot 0{,}330\frac{m}{s^2} = 0{,}825\,N$$

Probe: $F_{So} = F_{Su} + \Delta F_R = 51{,}6\,N + 0{,}8\,N = 52{,}4\,N$

VII2a. Ein Körper rollt dann, wenn zwischen den kinematischen Größen der Translation (Weg für Schwerpunkt s, Geschwindigkeit v, Beschleunigung a) und den kinematischen Größen der Rotation (Drehwinkel um den Schwerpunkt φ, Winkelgeschwindigkeit ω, Winkelbeschleunigung α) die folgenden Beziehungen (Rollbedingungen gelten) gelten:

Rollbedingungen: $s = R\varphi$, $v = R\omega$ und $a = R\alpha$

Wenn der Queue mit der Kraft F im Anspielpunkt x gestoßen wird, erzeugt er

die Beschleunigung: $a = \frac{F}{m}$

und die Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{M}{J}$

mit Drehmoment M: $M = F\,x$

und Trägheitsmoment Kugel J: $J = \frac{2}{5}mR^2$

„Rollen ohne zu gleiten“ bedeutet, dass für die Beschleunigung des Schwerpunktes a und die Winkelbeschleunigung α die Rollbedingung erfüllt ist.

$$a = R\alpha$$

Einsetzen in die Rollbedingung: $\frac{F}{m} = a = R\,\alpha = \frac{R\cdot F\,x}{\frac{2}{5}m\,R^2}$

Lösung: $x = \frac{2}{5}R$

VII2b. Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{4\,m\,s^{-1}}{(0,0615m/2)} = 130,1\,s^{-1}$

Drehzahl: $n = \frac{\omega}{2\cdot\pi} = \frac{130,1}{6,28}s^{-1} = 20,7\,s^{-1}$

VII2c. Translationsenergie: $E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,2\,kg\cdot\left(4\frac{m}{2}\right)^2 = 1,6\,J$

Rotationsenergie: $E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{2}{5}E_{kin}^{trans} = 0,64\,J$

Gesamtenergie: $E_{ges} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{trans} = 2,24\,J$

VII2d. Kraftstoß $\int F\cdot dt = \langle F\rangle\cdot\Delta t = \Delta p$ ist gleich Impulsänderung

Impulsänderung: $\Delta p = p_1 - p_0 = p_1 = m\cdot v = 0,2\,kg\cdot 4\frac{m}{s} = 0,8\,N\,s$

VII2e. Kraftstoß = mittlere Kraft mal Kontaktzeit = $\langle F\rangle\cdot\Delta t$

mittlere Kraft: $\langle F\rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1\,N\,s}{0,01\,s} = 80\,N$

VIII1a. Die Zentrifugalkraft im höchsten Punkt muss kleiner als die Gewichtskraft sein.

Zentrifugalkraft: $F_{Zf} = m\frac{v^2}{R_B}$

Gewichtskraft: $F_g = m\,g$

Es muss gelten: $F_{Zf} = m\frac{v^2}{R_B} \geq m\,g = F_g$

Es folgt: $v \geq \sqrt{R_B\,g}$

Minimalgeschwindigkeit: $v_{\min} = \sqrt{R_B\,g} = \sqrt{0,2\cdot 10}\frac{m}{s} = 1,414\frac{m}{s}$

VIII1b. Setze die potentielle Energie im tiefsten Punkt der Bahn gleich Null. Im Punkt (**P**) besitzt das Auto dann nur kinetische Energie, im höchsten Punkt der Bahn kinetische und potentielle Energie.

Energieerhaltungssatz: $E_{ges} = E_{kin}(P) = \frac{1}{2}m\,v_P^2 = m\,g\,(2R_B) + \frac{1}{2}m\,v_{\min}^2$

$m\,v_P^2 = 2\cdot m\,g\,(2R_B) + m\,v_{\min}^2$

Es folgt: $v_P = \sqrt{4\,g\,R_B + v_{\min}^2} = \sqrt{4\cdot 10\cdot 0,2 + 2}\,\frac{m}{s}$

$v_P = \sqrt{10}\frac{m}{s} = 3,162\frac{m}{s}$

VIII1c. Für alle Wegpunkte "links" vom Punkt (**P**), also für $x < l_B$ gilt:

Normalkraft = Gewichtskraft: $F_n = F_g = m\,g$ für $x \leq l_B$

Im Punkt $P+\varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$, also "rechts" von (**P**), ist die Normalkraft jedoch die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft.

$$F_n = F_g + F_{Zf} = m\,g + m\frac{v^2}{R_B} \quad \text{für } l_B \le x \le l_B + 2\pi R_B$$

Die Funktion Normalkraft ist also unstetig im Punkt (P).

Den Verlauf der Normalkraftfunktion innerhalb der Loopingschleife kann aus dem Energieerhaltungssatz abgeleitet werden.

$$E_{ges} = E_{kin}(l_B) = E_{kin}(x > l_B) + E_{pot}(x > l_B)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} m v_P^2 = m\,g h(x) + \frac{1}{2} m \left(v(x)\right)^2$$

$$\left(v(x)\right)^2 = v_P^2 - 2\,g\,h(x) = v_P^2 - 2\,g\,R_B\left(1 - \cos\frac{s}{R_B}\right)$$

mit $s =$ Kreisbogenlänge: $s = x - l_B$

Zentrifugalkraft: $F_{Zf}(x) = \dfrac{m v_P^2}{R_B} - 2\,m\,g\left(1 - \cos\dfrac{x - l_B}{R_B}\right)$

Normalkomponente von F_g: $F_{ng} = m\,g\cos\dfrac{x - l_B}{R_B}$

Die Geschwindigkeit im Punkt (**P**) war $v_P = \sqrt{4\,g\,R_B + v_{\min}^2}$ (siehe **VIIIb.**)

Es folgt mit Lösung **VIIIa.**: $v_P^2 = 4\,g\,R_B + v_{\min}^2 = 4g\,R_B + g\,R_B = 5\,g\,R_B$

Die Funktion der Normalkraft $F_n(x)$ kann in Einheiten der Gewichtskraft ausgedrückt werden:

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \frac{F_{ng}(x)}{m\,g} + \frac{F_{Zf}(x)}{m\,g}$$

Einsetzen:

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \frac{m\,g\cos\dfrac{x - l_B}{R_B}}{m\,g} + \frac{\dfrac{m v_P^2}{R_B} - 2\,m\,g\left(1 - \cos\dfrac{x - l_B}{R_B}\right)}{mg}$$

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \cos\frac{x - l_B}{R_B} + 5 - 2\left(1 - \cos\frac{x - l_B}{R_B}\right)$$

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = 3 + \cos\frac{x - l_B}{R_B} + 2\cdot\cos\frac{x - l_B}{R_B}$$

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = 3\left(1 + \cos\frac{x - l_B}{R_B}\right)$$

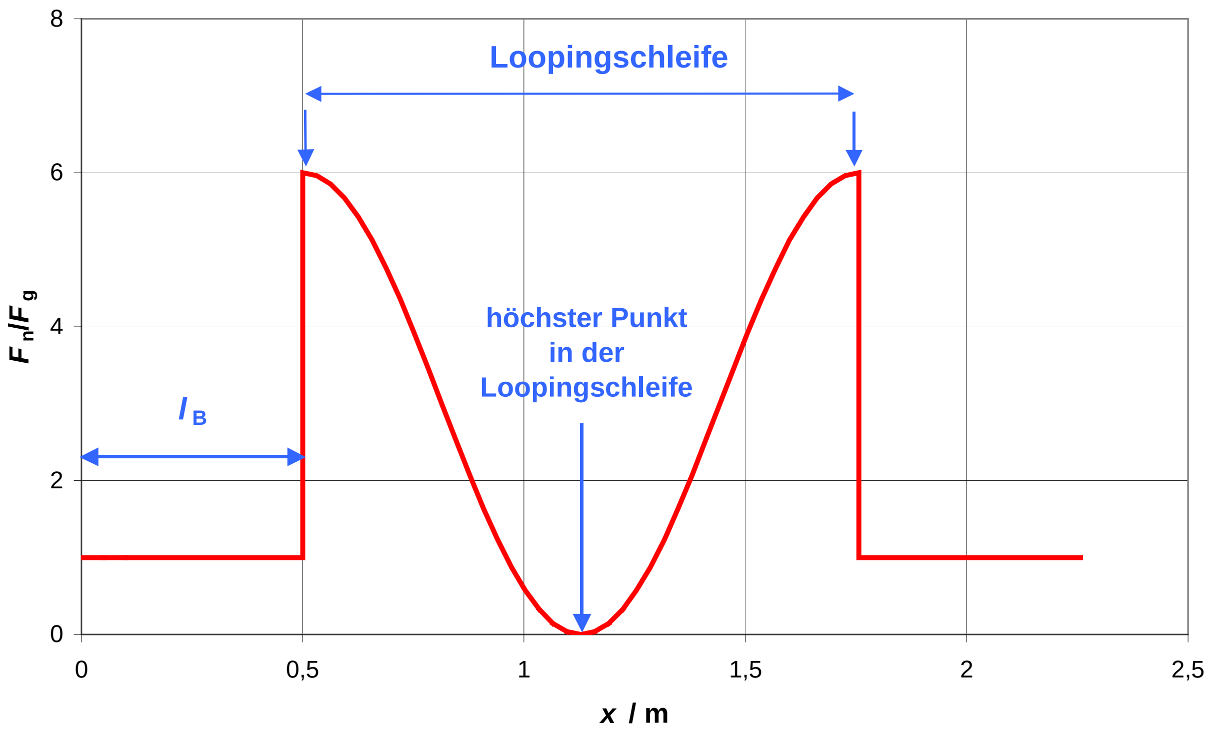
Lösung:

Für $0 < x < l_B$: $\dfrac{F_n(x)}{F_g} = 1$

für $l_B < x < l_B + 2\,\pi\,R_B$: $\dfrac{F_n(x)}{F_g} = 3\left(1 + \cos\dfrac{x - l_B}{R_B}\right)$

für $x > l_B + 2\pi R_B$:

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = 1$$



VIII1d. Kinetische Energie im Anfangspunkt (**A**) gleich kinetischer Energie im Punkt (**P**).

$$E_{kin}(A) = E_{kin}(P)$$

Aus **VIIIb.** folgt für die Fahrgeschwindigkeit des Autos:

$$v_A = v_P = \sqrt{10}\,\frac{m}{s} = 3{,}162\,\frac{m}{s}$$

Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades:

$$v_U = \pi \cdot D_S \cdot n_S$$

wobei n_S die Anfangsdrehzahl des Schwungrades bezeichnet.

Es soll gelten: $v_U = v_A$

Lösung: $$n_S = \frac{v_A}{\pi D_S} = \frac{\sqrt{10}}{\pi \cdot 0{,}04}\,s^{-1} = 25{,}2\,s^{-1}$$

VIII2a. Die beiden Schwungräder haben Drehimpuls.

Die Radien sind gleich: $R = R_1 = R_2$

Schwungrad (1): $L_1 = J_1\,\omega_1 = J_1\,2\pi\,n_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2\,2\pi\,n_1$

$$L_1 = m_1\,R^2 \pi\,n_1$$

Schwungrad (2): $L_2 = m_2\,R^2 \pi\,n_2$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L' = L_1 + L_2$$

Es gilt: $L' = (J_1 + J_2)\,\omega_{gem} = (J_1 + J_2)\,2\pi\,n_{gem}$

$$n_{gem} = \frac{L'}{2\pi\left(J_1 + J_2\right)} = \frac{L'}{\pi\left(m_1 + m_2\right)R^2}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1\,n_1 + m_2\,n_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(0,8\cdot 900 + 1,5\cdot 600\right)\min^{-1}}{0,8 + 1,5}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1\,n_1 + m_2\,n_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(0,8\cdot 900 + 1,5\cdot 600\right)\min^{-1}}{0,8 + 1,5}$$

$$n_{gem} = 704\min^{-1}$$

VIII2b. Drehimpuls des Schwungrades (1): $L_1 = m_1\,R^2\pi\,n_1 = 0,8\,kg\cdot 0,01\,m^2\cdot\pi\cdot\frac{900}{60\,s}$

$$L_1 = 0,377\frac{kg\,m^2}{s}$$

Schwungrad (2): $L_2 = m_2\,R^2\pi\,n_2 = 1,5\,kg\cdot 0,01\,m^2\cdot\pi\cdot\frac{600}{60\,s}$

$$L_2 = 0,471\frac{kg\,m^2}{s}$$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L' = L_1 + L_2 = \left(0,377 + 0,471\right)\frac{kg\,m^2}{s}$$

$$L' = 0,848\frac{kg\,m^2}{s}$$

Probe: $L' = L_1 + L_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)2\pi\,n_{gem}$

$$L' = \frac{1}{2}\left(0,8 + 1,5\right)kg\cdot 0,01\,m^2\cdot 2\pi\cdot\frac{704}{60\,s}$$

$$L' = 0,848\frac{kg\,m^2}{s}$$

VIII2c. Änderung des Drehimpulses (1): $\Delta L_1 = 2\pi\,J_1\left(n_{gem} - n_1\right)$

$$\Delta L_1 = 2\pi\,J_1\left(n_{gem} - n_1\right) = \pi\cdot m_1\,R^2\left(-\frac{196}{60\,s}\right)$$

$$\Delta L_1 = \pi\cdot m_1\,R^2\left(-\frac{196}{60\,s}\right) = -0,082\frac{kg\,m^2}{s}$$

Änderung des Drehimpulses (2): $\Delta L_2 = 2\pi\,J_2\left(n_{gem} - n_2\right)$

$$\Delta L_2 = 2\pi\,J_2\left(n_{gem} - n_2\right) = \pi\cdot m_2\,R^2\left(+\frac{104}{60\,s}\right)$$

$$\Delta L_2 = \pi\cdot m_2\,R^2\left(+\frac{104}{60\,s}\right) = +0,082\frac{kg\,m^2}{s}$$

Die Verringerung der Drehimpulses (1) ist gleich der Vergrößerung des Drehimpulses (2).

VIII2d. Drehmoment: $M = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0,082\,kg\,m^2}{0,5\,s^2} = 0,164\,Nm$

VIII2e. Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = \frac{1}{2} J_1\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 R^2\right) 4\pi^2\,n_1^2$

Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = m_1 R^2 \pi^2\,n_1^2 = 17,765\,J$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,2}^{rot} = \frac{1}{2} J_2\,\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_2 R^2\right) 4\pi^2\,n_2^2$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,1}^{rot} = m_2 R^2 \pi^2\,n_2^2 = 14,804\,J$

Rotationsenergie nach der Kupplung: $E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2\right)\omega_{gem}^2$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) R^2\right) 4\pi^2\,n_{gem}^2$$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \left(m_1 + m_2\right) R^2 \pi^2\,n_{gem}^2 = 31,251\,J$$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges} = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} = E_{kin,1+2}^{rot} + Q$

Energieverlust: $Q = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} - E_{kin,1+2}^{rot}$

$$Q = \left(17,765 + 14,804 - 31,251\right) J = 1,318\,J$$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{ges}} = \frac{1,318}{32,569} = 0,040 \mathrel{\hat{=}} 4\%$

Die Rotationsenergien vor und nach dem Kupplungsvorgang sind <u>nicht gleich</u>. Der Energieverlust beträgt 4%.