Tutorium Physik I **I. Übungsblatt** **23.03.2007**
zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe **SS07**

I 1. Der Sprintweltrekord über die 50 m Strecke liegt bei 5,56 s, der über die 60 m Strecke bei 6,39 s. Nehmen Sie in einem vereinfachten Modell an, dass ein Kurzstreckensprint näherungsweise als gleichmäßig beschleunigte Bewegung bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit v_0 und anschließend als gleichförmige Bewegung mit v_0 zusammengesetzt werden kann.

a. Skizzieren Sie qualitativ das *at*-, *vt*- und *st*-Diagramm entsprechend der Modellannahme für beide Sprintstrecken.

b. Bestimmen Sie die Beschleunigung a_0 und die Geschwindigkeit v_0.

c. Nehmen Sie an, dass man auf der 100 m Strecke die gleichen Beschleunigungs- und Geschwindigkeitswerte wie auf den Kurzsprintstrecken erreichen kann. Welche Weltrekordzeit für die 100 m Strecke könnte man aus den im Teil **b**. bestimmten Werten für a_0 und v_0 extrapolieren?

d. Der aktuelle Weltrekord über die 100 m Strecke liegt bei 9,77 s. Wenn man annimmt, dass die Beschleunigungswerte bei den verschiedenen Sprintstrecken gleich sind, welcher Höchstgeschwindigkeit entspricht dann der aktuellen Weltrekordzeit über die 100 m Strecke?

e. Skizzieren Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Sprintstrecken gemeinsam in einem *vt*-Diagramm.

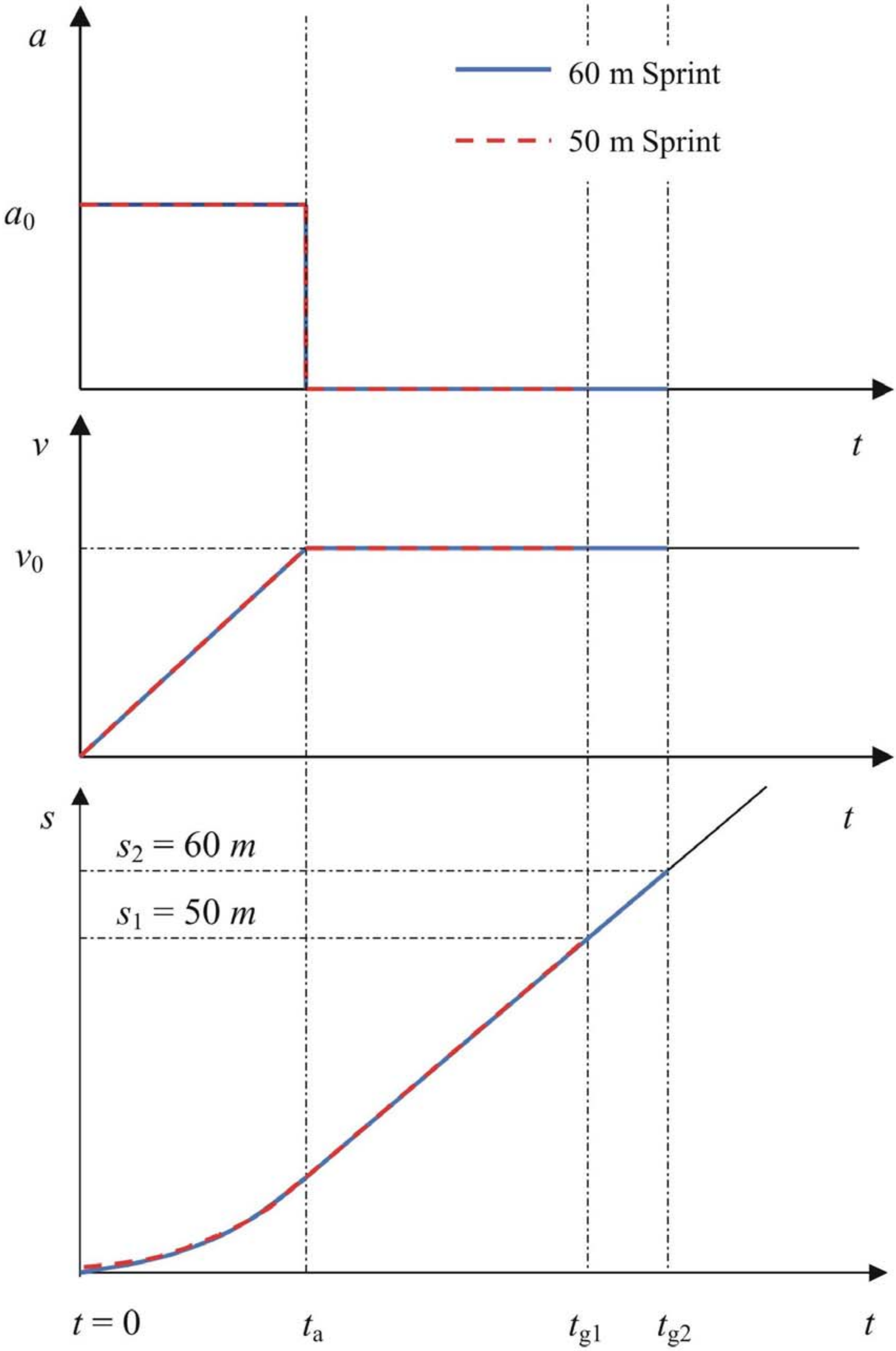
I 2. Zwei Fahrzeuge fahren mit gleicher Geschwindigkeit $v_0 = 108\, km\, h^{-1}$ an der Raststätte Seesen der A7 im zeitlichen Abstand von 30 s vorbei (Fahrzeug 1 fährt voraus, Fahrzeug 2 folgt hinterher). Fahrzeug 1 beginnt auf der Höhe der Raststätte, mit der Bremsbeschleunigung $-0,4\, m\, s^{-2}$ abzubremsen, während Fahrzeug 2 seine Geschwindigkeit beibehält.

a. Zeichnen Sie das Weg-Zeit Diagramm

b. In welcher Distanz zur Raststätte Seesen hat Fahrzeug 2 das Fahrzeug 1 eingeholt?

Lösungen:

I 1.a. *at*- *vt*- und *st* Diagramm des Modells eines Kurzstreckensprints



I 1b. Bezeichnung:

s_1 - Gesamtstrecke 50 m

s_2 - Gesamtstrecke 60m

t_a - Beschleunigungszeit

t_{g1} - Gesamtzeit über 50 m:

t_{g2} - Gesamtzeit über 60 m: 6,39 s

Weg-Zeit-Funktion für 50m Strecke

$$s_1 = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_0 \left(t_{g1} - t_a \right)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_0 t_{g1} - v_0 t_a = \frac{1}{2} a_0 t_a^2 + v_0 t_{g1} - a_0 t_a^2$$

$$s_1 = v_0 t_{g1} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2$$

mit $v_0 = a_0 t_a$

$$s_1 = a_0 t_a t_{g1} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2$$

Die Herleitung der Weg-Zeit-Funktion der 60 m Strecke ist analog: Nach der Modellannahme sollen die Beschleunigung a_0 und die Endgeschwindigkeiten v_0 und damit auch Beschleunigungszeit t_a bei der 50 m und der 60 Sprintstrecke gleich sein.

Weg-Zeit-Funktion für 60m Strecke

$$s_2 = a_0 t_a t_{g2} - \frac{1}{2} a_0 t_a^2$$

Einsetzen von $\frac{1}{2} a_0 t_a^2$

$$s_1 = a_0 t_a t_{g1} - \left(a_0 t_a t_{g2} - s_2 \right)$$

Es folgt:

$$s_1 - s_2 = a_0 t_a \left(t_{g1} - t_{g2} \right)$$

Lösung:

$$a_0 t_a = v_0 = \frac{s_1 - s_2}{t_{g1} - t_{g2}} = \frac{(60-50)\,m}{(6,39-5,56)\,s} = \frac{10\,m}{0,83\,s}$$

$$a_0 t_a = v_0 = \frac{10\,m}{0,83\,s} = 12,05\,m\,s^{-1}$$

$$v_0 = 12,05\,m\,s^{-1} = 43,4\,km\,h^{-1}$$

Für s_1 gilt:

$$s_1 = v_0 t_{g1} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Es folgt:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{2\left(v_0 t_{g1} - s_1 \right)}$$

Lösung:

$$a_0 = \frac{12,05^2}{2 \cdot (12,05 \cdot 5,56 - 50)} \frac{m}{s^2} = 4,27\,m\,s^{-2}$$

I 1c. Für die 100 m Strecke gilt:

$$s_3 = v_0 t_{g3}^{extrapoliert} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Lösung:

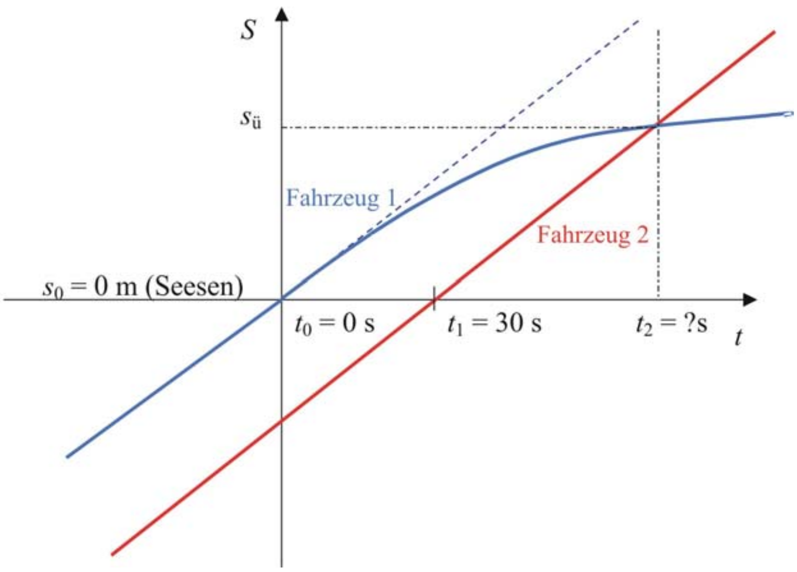
$$t_{g3}^{extrapoliet} = \frac{s_3}{v_0} + \frac{v_0}{2 a_0} = \frac{100}{12,05} + \frac{12,05}{2 \cdot 4,27} = 9,71\,s$$

I 1d. Da die aktuelle Weltrekordzeit über 100 m größer als der extrapolierte Wert ist, kann vermutet werden, dass ein Mensch eine Strecke von $s_3 = 100\,m$ nicht die Geschwindigkeit der 50 m und 60 m Strecke aufrechterhalten kann. Wenn man annimmt, dass die Beschleunigung a_0 konstant bleibt, folgt:

	$s_3 = v_{03}\, t_{g3}^{gem} - \frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0}$
mit:	$s_3 = 100\, m$ und $t_{g3} = 9{,}77\, s$
	$\frac{1}{2}\frac{v_{03}^2}{a_0} - v_{03}\, t_{g3}^{gem} = -s_3$
	$v_{03}^2 - 2\, v_{03}\, t_{g3}^{gem} a_0 = -2 a_0 s_3$
mit: $a_0 = 4{,}27\, m\, s^{-2}$	$v_{03} = \pm\sqrt{a_0^2\, t_{g3}^2 - 2\, a_0\, s_3} + a_0\, t_{g3}$
Erste Lösung (unrealistisch):	$v_{03/1} = \left(+29{,}79 + 41{,}74\right) m\, s^{-1} = 71{,}53\, m\, s^{-1}$
Zweite Lösung (realistisch):	$v_{03/2} = \left(-29{,}79 + 41{,}74\right) m\, s^{-1} = 11{,}95\, m\, s^{-1}$
Richtige Lösung:	$v_{03/2} = 11{,}95\, m\, s^{-1} = 43{,}0\, km\, h^{-1}$

Diese Geschwindigkeit ist nur geringfügig kleiner als die der 50 m und 60 m Sprintstrecken.

I 2a. **Festlegung des Zeitnullpunkts:** Man definiere zum Beispiel, dass Fahrzeug Nr. 1 bei $t_0 = 0\, s$ den Punkt $s_1\left(t = 0\right) = 0\, m$ (die Raststätte Seesen) passieren soll. Fahrzeug Nr. 2 ist zu diesem Zeitpunkt noch vor der Raststätte, also bei einem negativen Wert $s_2(t = 0\, s) < 0\, m$. Nach $t_1 = 30\, s$ erreicht auch Fahrzeug Nr. 2 die Raststätte. Also gilt: $s_2(t = 30\, s) = 0\, m$. Gesucht ist der Zeitpunkt t_2, an dem beide Fahrzeuge den gleichen Weg $s_ü$ hinter der Raststätte zurückgelegt haben.



I 2b.	Wegfunktion für Fahrzeug 1:	$s_1\left(t\right) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0\, t + s_0$
	mit:	$a_0 = -0{,}4\; m\; s^{-2}$
	und:	$s_1\left(t = 0\, s\right) = 0$
	Wegfunktion für Fahrzeug 2:	$s_2\left(t\right) = v_0\, t + s_0$

mit:	$s_2\left(t=30\,s\right)=0$
Es folgt für $t_1=30\,s$:	$0=v_0\,t_1+s_0$ $\qquad s_0=-v_0\,t_1=-900\,m$
Für den Überholzeitpunkt : t_2 gilt:	$s_1\left(t_2\right)=\frac{1}{2}a_0t_2^2+v_0\,t_2=v_0\,t_2-v_0\,t_1=s_2\left(t_2\right)$
	$\frac{1}{2}a_0t_2^2=-v_0\,t_1$
Lösung für t_2	$t_2=\sqrt{-\frac{2\,v_0\,t_1}{a_0}}=\sqrt{-\frac{2\cdot 30\,m/s\cdot 30\,s}{-0,4\,m/s^2}}=67\,s$
Lösung für $s_ü$	$s_ü=v_0\,t_2-v_0\,t_1=v_0\left(t_2-t_1\right)=1112\,m$
Probe:	$s_ü=s_1\left(t_2\right)=\frac{1}{2}a_0t_2^2+v_0\,t_2$
	$s_ü=s_1\left(t_2\right)=-900\,m+2012\,m=1112\,m$
und	$s_ü=s_2\left(t_2\right)=v_0\,t_ü+s_0$
	$s_ü=s_2\left(t_2\right)=2012\,m-900\,m=1112\,m$

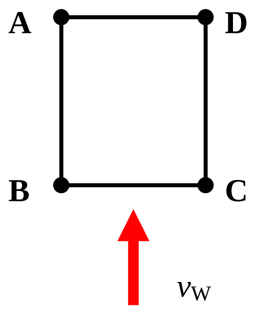
Tutorium Physik I **II. Übungsblatt** **30.03.2007**
zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe **SS07**

II-1. Eine Masse (1) wird bei $t = 0\,s$ aus einer Höhe von 10 m aus der Ruhe fallengelassen. Eine zweite Masse (2) wird genau in diesem Augenblick mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{02} der fallenden Masse entgegen geschossen. Die Körper treffen in halber Höhe aufeinander.
Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Körper? Wie groß ist die Abschussgeschwindigkeit v_{02} der Masse (2)?

II-2. Ein Tennisball soll 20 m senkrecht nach oben geworfen werden.
a. Welche Anfangsgeschwindigkeit muss der Ball haben?
b. Wie weit fliegt ein Ball, der mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit unter einem Winkel von 60° geworfen wird?
c. Wie weit könnte der Ball mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit maximal geworfen werden? Unter welchem Winkel muss der Ball geworfen werden?

II-3. Ein Flugzeug fliegt vom Flughafen Hannover nach Berlin-Schönefeld. Die Entfernung beträgt 280 km, die Fluggeschwindigkeit 210 km h^{-1}. Ohne Windeinfluss wäre die Kursrichtung 90° (Kursrichtung von West nach Ost). Während des Fluges herrscht jedoch Wind mit 60 km h^{-1} aus 180° (aus Süden).
a. Welchen Kurs muss das Flugzeug unter Berücksichtigung des Windes fliegen, um in der kürzesten Zeit Berlin-Schönefeld zu erreichen?
b. Welche Geschwindigkeit hat das Flugzeug über Grund?
c. Welche Zeit benötigt es mit Wind, und wie lange hätte der Flug ohne Windeinfluss gedauert?
Hinweis: *Verwenden Sie die Vektordarstellung der Geschwindigkeiten in einem x-y. Koordinatensystem.*

II-4. Ein Flugzeug fliegt den Kurs entlang der Punkte A → B → C → D → A. Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 100 km, die Fluggeschwindigkeit 200 km h^{-1}.



a. Berechnen Sie die Flugzeit unter der Annahme, dass während des Fluges kein Seitenwind herrscht.
b. Berechnen Sie die Flugzeit unter der Annahme eines konstanten Seitenwindes $v_W = 40$ km h^{-1}, der senkrecht bezüglich der Strecken B ↔ C und A ↔ D wirkt.
c. Vergleichen Sie die unter **a.** und **b.** berechneten Flugzeiten. Überlegen Sie folgende Anwendung: Bei welchen Windbedingungen sollte man z. B. in der Leichtathletik Rekordbedingungen über Laufstrecken von 400 m haben?

Lösungen:

II-1. Man betrachte die Bewegung der Massen entlang einer senkrechten y-Achse.

Für die Masse (1) gilt: $y_1(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$

Für die Masse (2) gilt: $y_2(t) = v_{02}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Die beiden Massen treffen sich zum Zeitpunkt t_1 auf halber Höhe, also bei $\frac{y_0}{2}$.

Für die Masse (1) gilt: $y_1(t_1) = y_0 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{y_0}{2}$

Für die Masse (2) gilt: $y_2(t_1) = v_{02}\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{y_0}{2}$

Lösung für t_1: $t_1 = \sqrt{\frac{y_0}{g}} = \sqrt{\frac{10\, m}{10\, m\, s^{-2}}} = 1\, s$

Lösung für v_{02}: $v_{02} = \frac{y_0}{2 t_1} + \frac{1}{2} g t_1 = \sqrt{g\, y_0} = 10 \frac{m}{s}$

II-2a. Man betrachte die Bewegung des Balls entlang der senkrechten y-Achse.

Für die Geschwindigkeit gilt: $v_y(t) = v_{y0} - g t$

Für den Weg gilt: $y(t) = v_{y0}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Beim Erreichen der Maximalhöhe ist die Geschwindigkeit gleich Null.

Es gilt: $v_y(t_H) = v_{y0} - g\, t_H = 0$

Steigzeit: $t_H = \frac{v_{y0}}{g}$

Es folgt: $y(t_H) = v_{y0}\, t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 = \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{y0}^2}{g} = 5\, m$

$$y(t_H) = \frac{v_{y0}^2}{2 g} = 5\, m$$

Lösung: $v_{y0} = \sqrt{2 g\, y(t_H)} = 20\, m\, s^{-1}$

1b. Die Geschwindigkeit $v_0 = 10\, m\, s^{-1}$ kann in x,y-Komponenten zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 60° = 5\, m\, s^{-1}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 60° = 8{,}66\, m\, s^{-1}$$

Steigzeit: $t_H = \frac{v_{y0}}{g} = 0{,}866\, s$

Gesamte Flugzeit des Balls: $t_{ges} = 2 t_H = 1{,}73\, s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges}: $x(t_{ges}) = v_{x0}\, t_{ges} = 8{,}66\, m$

1c. Die Geschwindigkeit $v_0 = 10\, m\, s^{-1}$ kann in x,y-Komponenten zerlegt werden:

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 7{,}07\, m\, s^{-1}$$
$$v_{y0} = v_0 \sin 45° = 7{,}07\, m\, s^{-1}.$$

Steigzeit: $t_H = \dfrac{v_{y0}}{g} = 0{,}707\, s$

Gesamte Flugzeit: $t_{ges} = 2\, t_H = 1{,}41 s$

Horizontaler Weg in der Zeit t_{ges}: $x(t_{ges}) = v_{x0}\, t_{ges} = 10\, m$

2a. Die x- Achse des Koordinatensystems kann in West->Ost Richtung, die y-Achse der Süd->Nord Richtung gewählt werden. Die Grundgeschwindigkeit des Flugzeugs ist dann parallel zu x-Achse, und die Windgeschwindigkeit antiparallel zur y-Achse. Die Richtung der Fluggeschwindigkeit v_F wird gesucht.

Vorhaltewinkel ist gegeben durch: $\sin\alpha = \dfrac{v_W}{v_F} = 0{,}286$

Vorhaltewinkel: $\alpha = 16{,}6°$

Steuerkurs: $90° + 16{,}6° = 106{,}6°$

2b. Grundgeschwindigkeit: $v_G = \sqrt{v_F^2 - v_W^2} = \sqrt{210^2 - 60^2}\, km\ h^{-1} = 201 km\ h^{-1}$

2c. Flugzeit ohne Wind: $t_{oW} = \dfrac{s}{v_F} = \dfrac{280\, km}{210\, km\, h.^{-1}} = 1{,}333\, h = 80 \min$

Flugzeit mit Wind: $t_{mW} = \dfrac{s}{v_G} = \dfrac{280\, km}{201 km\ h^{-1}} = 1{,}391\, h = 83{,}5 \min$

1.a. Gesamtweg: $s_{ges} = 4 \cdot s_0 = 400\ km$

Gesamtzeit: $t_{ges} = \dfrac{s_{ges}}{v_0} = 2\ h = 7200\ s$

1.b. Strecke A→B: $v_{AB} = v_0 - v_W = 160 \dfrac{km}{h}$ und $t_{AB} = 0{,}625\ h = 2250\ s$

Strecke B→C: $v_{BC} = \sqrt{v_0^2 - v_W^2} = 195{,}95 \dfrac{km}{h}$ und $t_{BC} = 0{,}5103\ h = 1837\ s$

Strecke C→D: $v_{CD} = v_0 + v_W = 240 \dfrac{km}{h}$ und $t_{CD} = 0{,}4166\ h = 1500\ s$

Strecke D→A: $v_{DA} = \sqrt{v_0^2 - v_W^2} = 195{,}95 \dfrac{km}{h}$ und $t_{DA} = 0{,}5103\ h = 1837\ s$

Gesamtzeit: $t_{ges} = 7424 s$

1.c. Die Zeiten mit Seitenwind sind auf einem Rundkurs immer länger als ohne Seitenwind. In Aufgabe 1.b. ist t_{ges} 3,1% größer als t_{ges} von Aufgabe 1.a. Rekordversuche im Laufen über die 400 m Strecke (Rundkurs) in einem Stadion sollten deshalb möglichst bei Windstille unternommen werden.

III-1. Ein PKW wird auf einer 1000 m langen <u>geraden</u> Strecke getestet: Er wird von 0 km/h auf 120 km/h in 13,3 s beschleunigt, fährt anschließend mit konstanter Geschwindigkeit und wird auf den letzten 100 m bis zum Stillstand abgebremst.

a. Skizzieren Sie die *a*-*t*, *v*-*t* und *s*-*t*-Diagramme.

b. Bestimmen Sie die Beschleunigung a_0 und die Beschleunigungsstrecke s_a.

c. Wie lang ist der Streckenabschnitt, der mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird?

d. Wie groß sind die Bremsverzögerung a_b und die Bremszeit t_b?

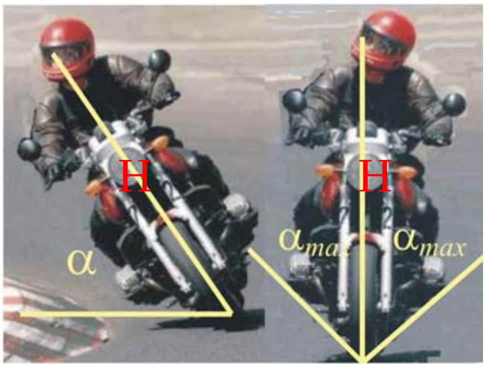
Betrachten Sie jetzt eine Testfahrt auf einer <u>kreisförmigen</u> Strecke mit R = 120 m:

e. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung, wenn die Bahnbeschleunigung gleich der in Aufgabe **b** ermittelten Beschleunigung a_0 der geraden Teststrecke ist und der Punkt der betrachtet werden soll, an dem die Bahngeschwindigkeit des Fahrzeugs $v_B = 72\,km\,h^{-1}$ beträgt.

f. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung a_{ges}, kurz <u>vor dem Erreichen</u> der konstanten Bahngeschwindigkeit von $v_B = 120\,km\,h^{-1}$ ◁? In welche Richtung zeigt der Beschleunigungsvektor? (Man verwende den Wert $v_B = 120\,km\,h^{-1}$ für Bahngeschwindigkeit)

g. Wie groß ist die Gesamtbeschleunigung a_{ges}, kurz <u>nach dem Erreichen</u> der konstanten Bahngeschwindigkeit von $v_B = 120\,km\,h^{-1}$? In welche Richtung zeigt der Beschleunigungsvektor? (Man verwende auch hier den Wert $v_B = 120\,km\,h^{-1}$ für die Bahngeschwindigkeit)

III-2. Motorräder fahren üblicherweise Kurven mit einer Schräglage (charakterisiert durch den Winkel α im Bild rechts), so dass die Resultierende aus dem negativen Vektor der Erdbeschleunigung $-\vec{g}$ und Vektor der Radialbeschleunigung a_r (entspricht der Zentripetalbeschleunigung) parallel zur Hochachse (**H**) verläuft. Bauartbedingt kann im vorliegenden Beispiel die Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ nicht überschritten werden.



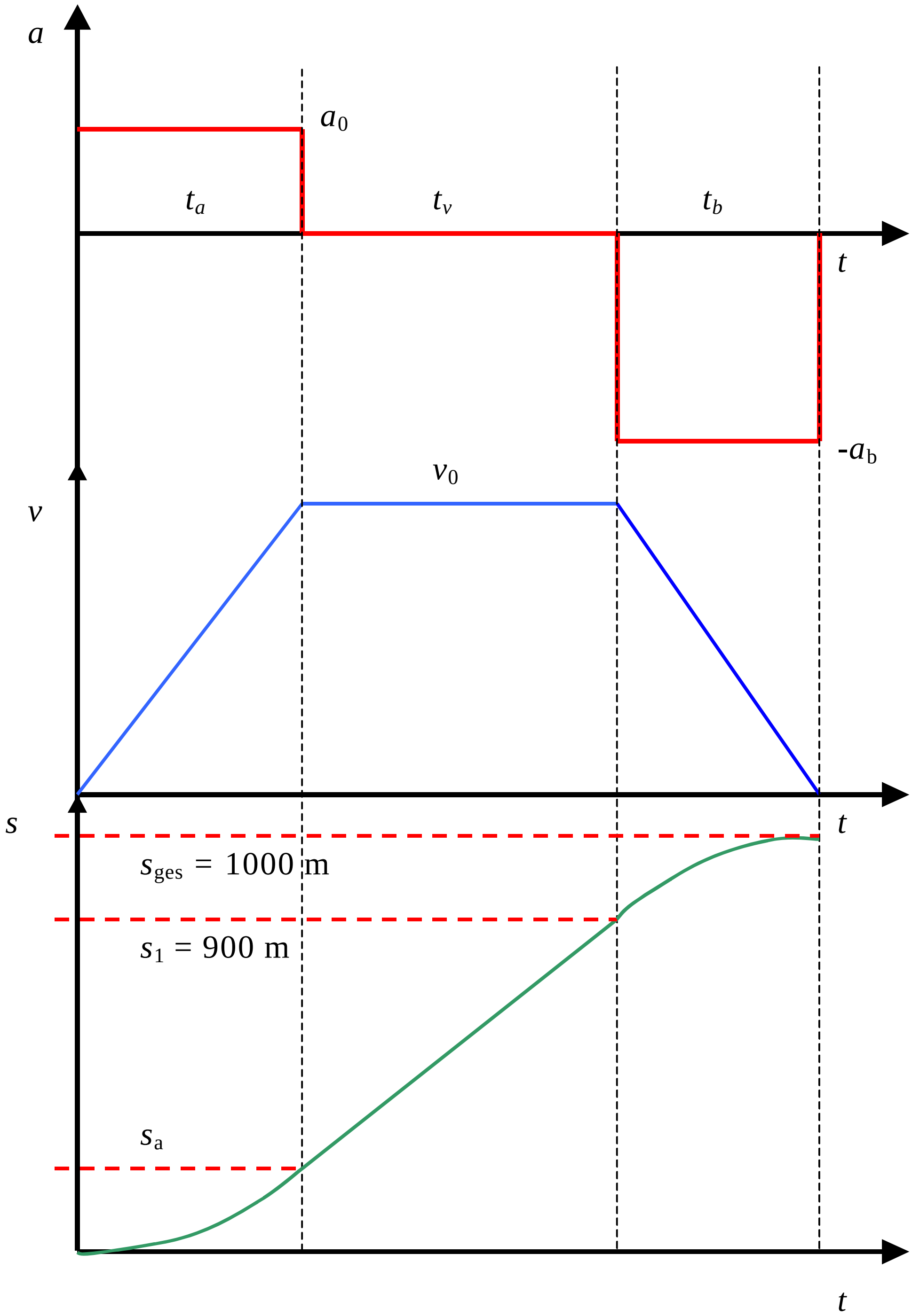
a. Betrachten Sie eine <u>gleichmäßig beschleunigte Motorradfahrt</u> auf einer Kreisstrecke mit Radius $R = 62{,}5\,m$. Das Motorrad startet aus dem Stand heraus und passiert in den Abständen von 10 m und 20 m Lichtschranken. Die Messung der Zeitdifferenz zwischen dem Passieren der Lichtschranken ergibt 1,0 s. Wie groß ist die Bahnbeschleunigung?

b. Nach welcher Fahrtstrecke auf dem Kreis wird die maximale Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ erreicht?

c. Welche Gesamtbeschleunigung a_{ges} hat das Motorrad in diesem Punkt?

Lösungen:

III-1a.



III-2b. Geschwindigkeit v_0:

$$v_0 = \frac{120\,km/h}{3,6(km/h)/(m/s)} = 33,33\frac{m}{s}$$

Beschleunigung:

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0}{t_a} = \frac{33,33}{13,3}\frac{m}{s^2} = 2,5\frac{m}{s^2}$$

Beschleunigungsstrecke: $s_a = \frac{1}{2} a_0\, t_a^2 = 221{,}1\, m$

III-2c. Strecke mit v_0: $s_v = s_1 - s_a = 900\, m - 221{,}2\, m = 678{,}9\, m$

III-2d. Bremsweg: $s_b = v_0\, t_b + \frac{1}{2} a_b t_b^2$

Bremsverzögerung: $a_b = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_b - 0} = -\frac{v_0}{t_b}$

es folgt: $t_b = -\frac{v_0}{a_b}$

Einsetzen ergibt: $s_b = -v_0 \frac{v_0}{a_b} + \frac{1}{2} a_b \frac{v_0^2}{a_b^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a_b}$

Bremsverzögerung: $a_b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{s_b} = -\frac{1}{2} \frac{33{,}33^2\, m^2\, s^{-2}}{100\, m} = -5{,}55 \frac{m}{s^2}$

Bremszeit: $t_b = -\frac{v_0}{a_b} = -\frac{33{,}33\, m\, s^{-1}}{-5{,}55\, m\, s^{-2}} = 6{,}00\, s$

III-2e. Die Gesamtbeschleunigung a_{ges} bei der Kreisfahrt ergibt sich als Vektorsumme aus der Tangentialkomponente a_t (= a_B Bahnbeschleunigung) und der Normalkomponente a_n (= a_R Radialbeschleunigung):

Nach Aufgabenstellung soll die Tangentialbeschleunigung gleich der Beschleunigung a_0 aus Aufgabe III-2b. sein. $a_t = a_0 = 2{,}5 \frac{m}{s^2}$

Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \frac{v_B^2}{r}$

mit Bahngeschwindigkeit: $v_B = v_0 = 20\, m\, s^{-1}$

Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \frac{v_B^2}{r} = \frac{20^2\, m}{120\, s^2} = 3{,}33\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$$a_{ges} = \sqrt{2{,}5^2 + 3{,}33^2} \frac{m}{s^2} = 4{,}16 \frac{m}{s^2}$$

III-2f. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_t = a_B = a_0 = 2{,}5\, m\, s^{-1}$

mit Bahngeschwindigkeit: $v_B = v_0 = 33{,}33\, m\, s^{-1}$

folgt für Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \frac{v_B^2}{r} = 9{,}25\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{2{,}5^2 + 9{,}25^2} \frac{m}{s^2} = 9{,}59 \frac{m}{s^2}$

(Das ist fast 1 g! Damit könnte schon knapp der Punkt erreicht sein, an dem die Reifen ihre Haftung verlieren und rutschen)

III-2g. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_t = a_B = a_0 = 0$

mit Bahngeschwindigkeit: $v_B = v_0 = 33{,}33\, m\, s^{-1}$

folgt für Normalbeschleunigung: $a_n = a_r = \dfrac{v_B^2}{r} = 9{,}25\, m\, s^{-2}$

Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{0^2 + 9{,}25^2}\,\dfrac{m}{s^2} = 9{,}25\dfrac{m}{s^2}$

Der Beschleunigungsvektor zeigt auf das Zentrum der Kreisbahn.

III-2a. Gleichmäßige Beschleunigung: $s(t) = \dfrac{1}{2} a_t\, t^2$

wobei a_t die Bahnbeschleunigung bezeichnet.

Erster Messpunkt bei $s_1 = 10\, m$: $s_1(t_1) = \dfrac{1}{2} a_t\, t_1^2$

Für s_2 = 20 m gilt: $s_2(t_2) = \dfrac{1}{2} a_t\, t_2^2$

Setze: $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$s_2 = \frac{1}{2} a_t (t_1 + \Delta t)^2$$

Für die Differenz $s_2 - s_1$ gilt: $s_2 - s_1 = a_t\, t_1\, \Delta t + \dfrac{1}{2} a_t (\Delta t)^2$

Für t_1 gilt: $t_1 = \sqrt{\dfrac{2\, s_1}{a_t}}$

$$s_2 - s_1 = a_t \sqrt{\frac{2\, s_1}{a_t}}\, \Delta t + \frac{1}{2} a_t (\Delta t)^2$$

Nach Aufgabenstellung ist: $s_2 - s_1 = 10\, m$ und $s_1 = 10\, m$

Zur Vereinfachung kann also $s_2 - s_1 = s_1$ eingesetzt werden.

$$s_1 = \sqrt{2\, s_1\, a_t}\, \Delta t + \frac{1}{2} a_t (\Delta t)^2$$

$$s_1 - \frac{1}{2} a_t (\Delta t)^2 = \sqrt{2\, s_1\, a_t}\, \Delta t$$

$$s_1^2 - s_1\, a_t (\Delta t)^2 + \frac{a_t^2 (\Delta t)^4}{4} = 2\, s_1\, a_t (\Delta t)^2$$

$$s_1^2 + \frac{a_t^2 (\Delta t)^4}{4} = 3\, s_1\, a_t (\Delta t)^2$$

$$a_t^2 - 12 \frac{s_1\, a_t}{(\Delta t)^2} = -4 \frac{s_1^2}{(\Delta t)^4}$$

$$\left(a_t - \frac{6\, s_1}{(\Delta t)^2}\right)^2 = -4 \frac{s_1^2}{(\Delta t)^4} + 36 \frac{s_1^2}{(\Delta t)^4} = 32 \frac{s_1^2}{(\Delta t)^4}$$

$$a_t = \left(\pm\sqrt{32} + 6\right) \cdot \frac{s_1}{(\Delta t)^2}$$

Lösung: $a_{t-} = \left(-\sqrt{32}+6\right)\cdot 10\,m\,s^{-2} = 3{,}43\,m\,s^{-2}$

Nur für $a_{t-} = 3{,}43\,m\,s^{-2}$ ist $s\left(t_1\right) = 10\,m$ <u>und</u> $s\left(t_1+1s\right) = 20\,m$ mit $t_1 = 2{,}41\,s$.

III-2b. Im Fall maximaler Schräglage $\alpha_{\max} = 45°$ ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung gleich dem Betrag der Erdbeschleunigung.

Es gilt: $\frac{v_{\max}^2}{R} = g$

Es folgt: $v_{\max} = \sqrt{R\,g} = \sqrt{62{,}5\,m\cdot 10\,m\,s^{-2}} = 25\frac{m}{s} = 90\frac{km}{h}$

Zeit zum Erreichen von $v_{\max}$: $t_{\max} = \frac{v_{\max}}{a_B} = \frac{25\,m\,s^{-1}}{3{,}43\,m\,s^{-2}} = 7{,}28\,s$

Fahrtstrecke: $s_{\max} = \frac{1}{2}a_t\,t_{\max}^2 = \frac{1}{2}3{,}43\,m\,s^{-2}\left(7{,}28\,s\right)^2 = 91\,m$

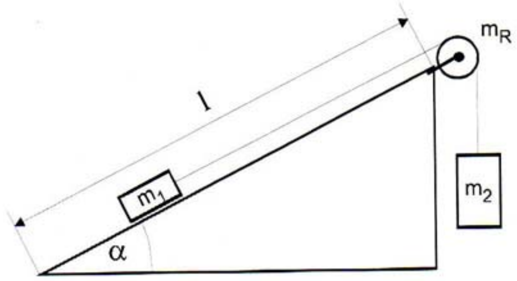
III-2c. Gesamtbeschleunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_R^2}$

wobei Radialbeschleunigung = Zentripetalbeschleunigung

Zentripetalbeschleunigung: $a_R = \frac{v_{\max}^2}{R} = 10\,m\,s^{-2}$

Gesamtbescheunigung: $a_{ges} = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} = \sqrt{3{,}43^2 + 10^2}\;m\,s^{-1} = 10{,}6\,m\,s^{-2}$

IV-1. Eine Masse ($m_1 = 20\,kg$) wird von einem zweiten Körper (Masse $m_2 = 25\,kg$)auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 15°$ und der Länge $l = 5\,m$ hochgezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0{,}1$. Die Masse der Rolle und des Seils soll vernachlässigt werden ($m_R \cong 0$).

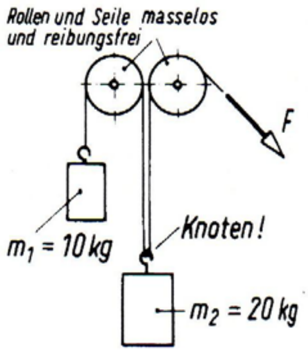


a. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Körper?

b. Wie lange benötigt m_1, um die Strecke l zu durchlaufen?

c. Wie groß ist die Seilkraft?

IV-2. Ein Körper m_2 mit einer Masse von 20 kg wird durch die Gewichtskraft der Masse $m_1 = 10\,kg$ an dem nach links und die Kraft F an dem nach rechts führenden Seilende angehoben. Das Seil und die Rollen seien masselos gedacht. Der Körper m_2 ist mit einem Knoten am Seil befestigt.



a. Mit welcher Kraft F muss an dem rechten Seilende gezogen werden, wenn sich der Körper m_2 mit einer Beschleunigung $a = \frac{g}{2}$ nach oben bewegen soll?

IV-1a. Man betrachte die Masse m_2:

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0$

Es wirkt die Gewichtskraft F_{g2} nach unten und die Seilkraft F_{S2} nach oben.

$$\left(F_{g2} - F_{S2}\right) - m_2\, a = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Man betrachte die Masse m_1:

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0$

Es wirken die Seilkraft F_{g1} nach oben, die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_{t1} und die Gleitreibungskraft F_{G1} nach unten.

$$\left(F_{S1} - F_{t1} - F_{G1}\right) - m_1\, a = 0 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Aus Gl. (**1.2**) folgt $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

da die Kräfte an den beiden Seilenden betragsmäßig gleich sind: $F_{S1} = F_{S2}$

folgt durch Einsetzen in Gl. (**1.1**): $\left(F_{g2} - \left(F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a\right)\right) - m_2\, a = 0$

Lösung: $a = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(F_{g2} - F_{t1} - F_{G1}\right)$

mit: $F_{g2} = m_2\, g$

$F_{t1} = m_1\, g \sin\alpha$

$F_{G1} = \mu_G\, m_1\, g \cos\alpha$

Lösung: $a = g \cdot \frac{m_2 - m_1\left(\sin\alpha + \mu_G \cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{25 - 20\left(0,2588 + 0,1 \cdot 0,9659\right)}{45}$$

$$a = 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,3976 = 3.98\, m\, s^{-2}$$

IV-1b. Gleichmäßig Beschleunigung: $s = \frac{1}{2} a\, t^2$

Für die Strecke *l* gilt: $t_l = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\, m}{3,98\, m\, s^{-2}}} = 1,59\, s$

IV-1c. Seilkraft an m_2: $F_{S2} = F_{g2} - m_2\, a = m_2\, g - m_2\, a$

$F_{S2} = 250,0N - 99,4N = 150,6\, N$

Seilkraft an m_1: $F_{S1} = F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a$

$F_{S1} = m_1\, g \cdot \sin\alpha + \mu_G\, m_1\, g \cdot \cos\alpha + m_1\, a$

$F_{S1} = 51,8\, N + 19,3\, N + 79,5\, N = 150,6\, N$

IV-2a. Man betrachte die Masse m_2:

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0 = \left(F_{Sl} + F_{Sr} - F_{g2}\right) - m_2 a$ **(2.1)**

mit der Seilkraft links F_{Sl}

und der Seilkraft rechts $F_{Sr} = F$

und der Gewichtskraft: $F_{g2} = m_2\, g$

Die Seilkraft (links) F_{Sl} wird mit Hilfe des Seils auf die Masse m_1 übertragen und wirkt der Gewichtskraft entgegen.

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0 = \left(F_{g1} - F_{Sl}\right) - m_1 a$ (**2.2**)

mit der Gewichtskraft: $F_{g1} = m_1\, g$

Aus Gl. (**2.1**) folgt: $F = F_{Sr} = F_{g2} - F_{Sl} + m_2 a$

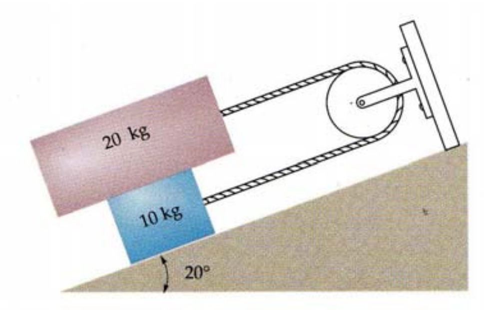
setze F_{sl} aus Gl. (**2.2**) ein: $F = F_{Sr} = F_{g2} - \left(F_{g1} - m_1 a\right) + m_2 a$

mit $a = \dfrac{g}{2}$ $F = g \cdot \left[\left(m_2 - m_1\right) + \dfrac{\left(m_1 + m_2\right)}{2}\right]$

$$F = g \cdot \left(\frac{3}{2} m_2 - \frac{1}{2} m_1\right) = 10 \frac{m}{s^2} \cdot \left(30 - 5\right) kg = 250\, N$$

Tutorium Physik I **V. Übungsblatt** **27.04.2007**
zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe **SS07**

V-1. Die Massen $m_1 = 20\,kg$ und $m_2 = 10\,kg$ sind in der gezeigten Anordnung mit einem Seil verbunden, das durch eine Umlenkrolle umgelenkt wird. Die Massen des Seils und der Rolle können vernachlässigt werden. Der Steigungswinkel der schiefen Ebene betrage $\theta = 20°$.



a. Die Haftreibung zwischen m_1 und m_2 und zwischen m_2 und der schiefen Ebene (SE) soll gleich sein. Welchen Wert darf die Haftreibungszahl $\mu_{H,\max}$ <u>nicht überschreiten</u>, damit die Massen <u>gleiten können</u>?

b. Beim Gleiten soll die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}05$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung a?

Wie groß sind die Seilkräfte

c. im Haftreibungsfall, mit dem Maximalwert für $\mu_{H,\max}$ wie in **Teil a.** berechnet,

d. im Gleitfall wie in **Teil b.** beschrieben?

V-2. Abbildung 1 zeigt einen doppelten Flaschenzug mit $m_1 = 1\,kg$, $m_2 = 2\,kg$ und $m_3 = 3\,kg$. Zur Vereinfachung vernachlässige man die Massen der Seile und Rollen. Ziel ist es, die Seilkräfte und die Beschleunigung der Masse m_3 zu bestimmen.

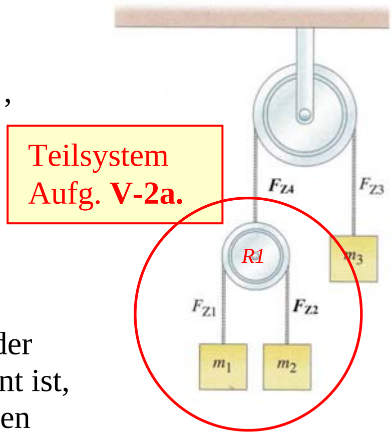


Abb. 1

<u>Vorschlag für einen Lösungsansatz:</u>

a. Man betrachte das Teilsystem mit den Massen m_1 und m_2 an der kleinen Rolle (*R1* im roten Kreis) zunächst als <u>ruhend</u> (gemeint ist, dass die Rolle *R1* sich zwar drehen, nicht aber vertikal bewegen kann) und leite zunächst für das <u>ruhende</u> Teilsystem eine Beziehung für die Kraft $F'_{Z4}(m_1, m_2, g)$ her, mit der das Teilsystem das nach oben führende Seil belastet. Wird anschließend das Teilsystem bestehend aus *R1* und den Massen m_1 und m_2 mit $\pm a$ <u>beschleunigt</u>, kann g durch $(g \pm a)$ ersetzt werden, um F_{Z4} in einem bewegten System zu erhalten.

b. Man berechne unter Verwendung der Beziehung für F_{Z4} die Beschleunigung der Masse m_3.

c. Bestimme die Seilkräfte F_{Z1}, F_{Z2}, F_{Z3} und F_{Z4}.

Lösungen:

V-1a. Die Masse m_1 ist größer als die Masse m_2. Deshalb wird im Gleitfall m_1 abwärts und m_2 aufwärts gleiten.

Kräfte an m_1: Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft von m_1 zeigt abwärts, die (Haft-) Reibungskraft und die Seilkraft aufwärts.

abwärts: $F_{t1} = m_1 g \sin\theta = 68{,}404\,N$

aufwärts: $F_{H,\max 1} + F_{S1} = \mu_{H,\max} m_1\, g \cdot \cos 20° + F_{S1}$

$F_{H,\max 1} + F_{S1} = \mu_{H,\max} \cdot 187{,}938\,N + F_{S1}$

Kräfte an m_2: Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft von m_2 und die (Haft-) Reibungskraft zeigen abwärts, die Seilkraft aufwärts.

abwärts: $F_{t2} + F_{H,\max 2} = m_2\, g \sin\theta + \mu_{H,\max}\left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta$

$F_{t2} + F_{H,\max 2} = 34{,}202\,N + \mu_{H,\max} \cdot 281{,}907\,N$

aufwärts: F_{S2}

Die Seilkräfte sind gleich, wenn die Masse der Umlenkrolle vernachlässigbar ist. Es gilt: $F_{S1} = F_{S2}$

Im <u>statischen Fall</u> muss deshalb die Summe aller Kräfte Null sein:

$$F_{t1} - F_{H,\max 1} - F_{H,\max 2} - F_{t2} = 0$$

Die Körper gleiten, wenn gilt: $F_{t1} > F_{H,\max 1} + F_{H,\max 2} + F_{t2}$

Gleitbedingung $F_{t1} - F_{t2} > F_{H,\max 1} + F_{H,\max 2}$

$$\left(m_1 - m_2\right) g \cdot \sin 20° > \mu_{H,\max}\left(2m_1 + m_2\right) g \cdot \cos 20°$$

Lösung für $\mu_{H,\max}$: $\mu_{H,\max} < \dfrac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\theta}{\left(2m_1 + m_2\right)\cos\theta} = \dfrac{10}{50}\tan 20° = 0{,}073$

V-1b. D'Alembertsche Prinzip für m_1: $\left(\sum_i F_i\right) - m_1\, a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{t1} - F_{G1} - F_{S1}\right) - m_1\, a = 0$

D'Alembertsche Prinzip für m_2: $\left(\sum_i F_i\right) - m_2\, a = 0$

Einsetzen (siehe III1a): $\left(F_{S2} - F_{t2} - F_{G2}\right) - m_2\, a = 0$

Es gilt: $F_{S1} = F_{S2} = F_{t2} + F_{G2} + m_2\, a$

Einsetzen: $\left(F_{t1} - F_{G1} - \left(F_{t2} + F_{G2} + m_2\, a\right)\right) - m_1\, a = 0$

$$F_{t1} - F_{t2} - F_{G1} - F_{G2} - m_1\, a - m_2\, a = 0$$

Lösung: $a = \dfrac{\left(F_{t1} - F_{t2}\right) - \left(F_{G1} + F_{G2}\right)}{m_1 + m_2}$

$$a = g \cdot \frac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\theta - \mu_G\left(m_1 + \left(m_1 + m_2\right)\right)\cos\theta}{m_1 + m_2}$$

$$a = g \cdot \frac{10\,kg \sin 20° - 0{,}05 \cdot 50\,kg \cos 20°}{30\,kg}$$

Lösung: $a = 0{,}357\,\frac{m}{s^2}$

V-1c. Bedingung im Haftreibungsfall: $F_{S1} = F_{t1} - F_{H,\max 1} = m_1 g \sin\theta - \mu_{H,\max} m_1\, g \cos\theta$

Seilkraft an Masse m_1: $F_{S1} = 68{,}404\,N - 13{,}681\,N = 54{,}723\,N$

Probe für F_{S2} : $F_{S2} = F_{t2} + F_{H,\max 2}$

$$F_{S2} = m_2\; g \sin 20° + \mu_{H,\max}\left(m_1 + m_2\right) g \cos 20°$$

Seilkraft an Masse m_2: $F_{S2} = 34{,}202\,N + 20{,}521\,N = 54{,}723\,N$

V-1d. Bedingung im Gleitfall: $F_{S1} = F_{t1} - F_{G1} - F_{Tr1}$

Seilkraft an Masse m_1: $F_{S1} = 68{,}404\,N - 9{,}396\,N - 7{,}140\,N = 51{,}868\,N$

Probe für F_{S2} : $F_{S2} = F_t^2 + F_{G2} + F_{Tr}^2$

Seilkraft an Masse m_2: $F_{S2} = 34{,}202\,N + 14{,}095\,N + 3{,}570\,N = 51{,}867\,N$

V-2a. Man betrachte zunächst die Massen m_1 und m_2 an einer <u>ruhenden Umlenkrolle</u> (*R1*), die nicht vertikal bewegt wird. Die Kraft F'_{Z4} (Kräfte und Beschleunigungen für die ruhende Rolle werden mit einem "Strich" ($'$) ist die Kraft, mit der die Rolle und die beiden Massen m1 und m2 auf das nach oben führende Seil wirken.

Wenn (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $m_2 > m_1$ gilt, fällt die Masse m_2 nach unten und die Masse m_1 steigt nach oben.

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(F'_{g2} - F'_{Z2}\right) - m_2\, a'_2 = 0$

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(F'_{Z1} - F'_{g1}\right) - m_1\, a'_1 = 0$

Die Beträge der Beschleunigungen der beiden Massen und die Beträge der Seilkräfte sind gleich.

Es gilt: $a'_1 = a'_2 = a'_{12}$

und: $F'_{Z1} = F'_{Z2} = F'_{Z12}$

Es folgt: $F'_{g1} + m_1\, a'_{12} = F'_{g2} - m_2\, a'_{12}$

$$m_1\; g + m_1\, a'_{12} = m_2\; g - m_2\, a'_{12}$$

Lösung für a'_{12}: $a'_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g$ (*)

Der Betrag der Kraft F'_{Z4} ist die Summe der Beträge der Kräfte F'_{Z1} und F'_{Z2}:

$$F'_{Z4} = F'_{Z1} + F'_{Z2} = \left(m_2\; g - m_2\, a'_{12}\right) + \left(m_1\; g + m_1\, a'_{12}\right)$$

Einsetzen von a'_{12}: $F'_{Z4} = g \cdot \left(m_2 - m_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + m_1 + m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)$

$$F'_{Z4} = g \cdot \frac{m_2 m_1 + m_2^2 - m_2^2 + m_2 m_1 + m_1^2 + m_1 m_2 + m_1 m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2}$$

Lösung für F'_{Z4}: $F'_{Z4} = \frac{4\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$

F'_{Z4} ist die Kraft am oberen Seil der Umlenkrolle (*R1*), wenn *R1* nicht vertikal beschleunigt wird. Wenn *R1* mit $\pm a$ beschleunigt wird, muss *g* wie in der Aufgabenstellung angegeben *g* durch die Gesamtbeschleunigung $g \pm a$ ersetzt werden.

Lösung für F_{Z4}: $$F_{Z4} = \frac{4\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(g \pm a\right)$$

V-2b. Man betrachte jetzt das Gesamtsystem des doppelten Flaschenzugs. Die Gewichtskraft der Masse m_3 ist: $$F_{g3} = m_3 \cdot g = 30\,N$$

Die Kraft F'_{Z4} ist: $$F'_{Z4} = \frac{4\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{8}{3} \cdot g = 26{,}7\,N$$

Da $F_{g3} > F'_{Z4}$ bewegt sich die Masse m_3 nach unten und die Rolle *R1* nach oben.

D'Alembertsches Prinzip für m_3: $$\left(F_{g3} - F_{Z3}\right) - m_3\,a_3 = 0$$

Umstellen nach F_{Z3}: $$F_{Z3} = m_3\,g - m_3\,a_3 = m_3\,(g - a_3)$$

Die Umlenkrolle (*R1*)) bewegt sich noch oben.

Für die Seilkraft F_{Z4} gilt nach **2a**.: $$F_{Z4} = \frac{4\,m_1\,m_1}{m_1 + m_2}\left(g + a_3\right)$$

Da $F_{Z3} = F_{Z4}$ gilt: $$F_{Z3} = m_3 \cdot \left(g - a_3\right) = \frac{4m_1\,m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(g + a_3\right) = F_{Z4}$$

Umstellen: $$\left(m_3 - \frac{4m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot g = \left(m_3 + \frac{4m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot a_3$$

$$\left(\frac{m_1\,m_3 + m_2\,m_3 - 4\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot g = \left(\frac{m_1\,m_3 + m_2\,m_3 + 4\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot a_3$$

Lösung $$a_3 = \frac{m_1\,m_3 + m_2\,m_3 - 4\,m_1\,m_2}{m_1\,m_3 + m_2\,m_3 + 4\,m_1\,m_2} \cdot g$$

Einsetzen $$a_3 = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 2} \cdot g = \frac{1}{17} \cdot g = 0{,}588\,m\,s^{-2}$$

V-2c. Seilkraft F_{Z3}: $$F_{Z3} = m_3\,(g - a_3) = 3\,kg \cdot \left(1 - \frac{1}{17}\right) \cdot g$$

$$F_{Z3} = \left(\frac{3\cdot 16}{17} \cdot 10\right) N = \frac{480}{17}\,N = 28{,}24\,N$$

Seilkraft F_{Z4}: $$F_{Z4} = F_{Z3} = \frac{480}{17}\,N = 28{,}24\,N$$

In Aufg. 2a wurde die Gleichung (*) für den Betrag der Beschleunigung der Massen m_1 und m_2 hergeleitet. Wenn die Umlenkrolle (*R1*) mit $+a_3$ beschleunigt wird, muss *g* durch $g + a_3$ ersetzt werden. $$a_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\left(g + a_3\right)$$

Für die Seilkraft F_{Z1} gilt: $$F_{Z1} = F_{g1} + m_1\,a_{12}$$

$$F_{Z1} = m_1\left(g + a_3\right) + m_1\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\left(g + a_3\right)$$

$$F_{Z1} = \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) m_1 \left(g + a_3\right)$$

Mit $m_1 = 1\,kg$ und $m_2 = 2\,kg$ und $a_3 = \frac{1}{17} g$:

$$F_{Z1} = \left(1 + \frac{2-1}{1+2}\right) \cdot 1\,kg \cdot \left(g + \frac{1}{17} g\right)$$

$$F_{Z1} = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \frac{18}{17} \cdot 10\,N = 14{,}12\,N$$

Für die Seilkraft F_{Z2} gilt:

$$F_{Z2} = F_{g2} - m_2\, a_{12}$$

$$F_{Z2} = m_2 \left(g + a_3\right) - m_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \left(g + a_3\right)$$

$$F_{Z2} = \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) m_2 \left(g + a_3\right)$$

Mit $m_1 = 1\,kg$ und $m_2 = 2\,kg$ und $a_3 = \frac{1}{17} g$:

$$F_{Z2} = \left(1 - \frac{2-1}{1+2}\right) \cdot 2\,kg \cdot \left(g + \frac{1}{17} g\right)$$

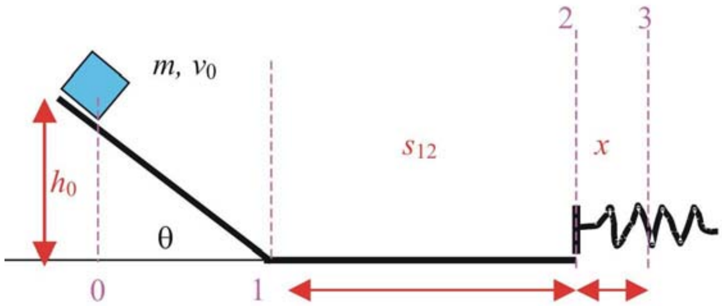
$$F_{Z2} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{18}{17} \cdot 10\,N = 14{,}12\,N$$

Kontrolle: Die Summe der Seilkräfte F_{Z2} und F_{Z2} ist gleich der Kraft F_{Z4}.

Tutorium Physik I **VI. Übungsblatt** **04.05.2007**

zu den Vorlesungen von Prof. Dr. Schrewe **SS07**

VI-1. Die Masse $m = 1 kg$ rutscht mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 4 m s^{-1}$ aus einer Höhe von $h_0 = 0,5 m$ eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel $\theta = 30°$ hinab. Anschließend rutscht sie auf einer Strecke $s_{12} = 2m$ horizontal weiter und trifft am Ende auf eine Feder mit der Federkonstanten $D = 5000\ N m^{-1}$. Die Gleitreibungszahl beträgt auf dem gesamten Weg $\mu_G = 0,2$.

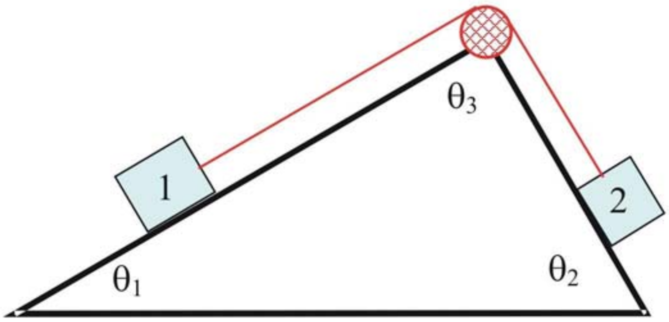


a. Berechnen Sie die Gesamtenergie E_{ges}, die kinetischen Energien E_{kin} und die Reibungsarbeiten W_R in den Punkten 1 und 2 der Bahn, sowie die an der Feder geleistete elastische Verformungsarbeit W_{E3} im Punkt 3.

b. Wie groß ist der Federweg *x*?

c. Wie groß müsste die Anfangsgeschwindigkeit v_0' gewählt werden, damit die Masse nach dem Rückprall wieder genau die Anfangshöhe h_0 ohne Geschwindigkeit erreicht? (Vernachlässigen Sie zur Vereinfachung die Reibung entlang des Federweges *x*)

VI-2. Auf unterschiedlich geneigten Dachflächen (siehe Skizze) liegen zwei Massen mit $m_1 = m_2 = 1 kg$, die durch ein Seil verbunden sind. Das Seil wird auf der Dachspitze mit einer Rolle umgelenkt. Die Massen von Seil und Rolle sollen vernachlässigt werden. Die Winkel betragen: $\theta_1 = 30°$ und $\theta_2 = 60°$.



a. Betrachten Sie die Kräfte, die auf die beiden Massen m_1 und m_2 wirken. Wie groß muss die Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ mindestens sein, damit die Massen nicht gleiten können?

b. Man stelle sich vor, links und rechts der Umlenkrolle wären Kraftmessgeräte im Seil. Welche Seilkräfte zeigen diese an, solange sich die Massen nicht bewegen?

c. Man nehme jetzt an, dass die in Aufgabe 7.a. berechnete Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ unterschritten werde (z. B. durch Regen, der auf das Dach fällt). Die beiden Massen beginnen zu gleiten. In welche Richtung? Die Gleitreibungszahl während des Rutschvorganges soll dann (einheitlich für m_1 und m_2) $\mu_G = 0,2$ betragen. Wie groß ist die Beschleunigung?

d. Bestimmen Sie die Kräfte (einschließlich der Trägheitskräfte), die auf die bewegten Massen m_1 und m_2 wirken. Geben Sie Betrag und Richtung der Kräfte an. Berechnen Sie erneut die Seilkräfte.

Lösungen:

VI-1a. Gesamtenergie: $E_{ges} = m\,g\,h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = 5\ J + 8\ J = 13\ J$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 0→1**:

$$W_{R01} = \mu_G\,F_N\,s_{01} = \frac{\mu_G\,m\,g\cos 30°h_0}{\sin 30°} = 1{,}732\ J$$

Kinetische Energie **Punkt 1**: $E_{kin1} = E_{ges} - W_{R01} = (13 - 1{,}732)\ J = 11{,}268\ J$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 1→2**:

$$W_{R12} = \mu_G\,F_N\,s_{12} = \mu_G\,m\,g\,s_{12} = 4\ J$$

Reibungsarbeit auf der **Strecke 0→2**:

$$W_{R02} = W_{R01} + W_{R12} = 5{,}732\ J$$

Kinetische Energie **Punkt 2**: $E_{kin2} = E_{ges} - W_{R02} = (13 - 5{,}732)\ J = 7{,}268\ J$

Verformungsarbeit (Feder) im **Punkt 3**:

$$W_{E3} = E_{kin2} = 7{,}268\ J$$

VI-1b.. Federweg:

Da gilt: $W_{E3} = \frac{1}{2} D\,x_3^2$

folgt: $x_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{E3}}{D}} = 0{,}0539\ m \cong 5{,}4\ cm$

VI-1c. Die Summe aller Reibungsarbeiten entlang des gesamten Weges ist gleich der kinetische Anfangsenergie im **Punkt 0.**

Kinetische Anfangsenergie: $E_{kin0} = \frac{1}{2} m \left(v_0'\right)^2 = 2 \cdot \left(W_{R01} + W_{R12}\right) = 11{,}464\ J$

Anfangsgeschwindigkeit: $v_0' = \sqrt{\frac{4 \cdot \left(W_{R01} + W_{R12}\right)}{m}} = 4{,}79\,\frac{m}{s}$

VI-2a. Die Gewichtskräfte können in die Normalkomponente F_n (senkrecht zur Gleitfläche) und die den Hang abwärts weisende Tangentialkomponente F_t zerlegt werden.

Für Masse m_1 gilt:

$$F_{t1} = m\,g \cdot \sin 30° = 5\,N$$
$$F_{n1} = m\,g \cdot \cos 30° = 8{,}66\,N$$

Für die Masse m_2 gilt:

$$F_{t2} = m\,g \cdot \sin 60° = 8{,}66\,N$$
$$F_{n2} = m\,g \cdot \cos 60° = 5\,N$$

Die Hangabtriebskraft der Masse m_2 $F_{t2} = 8{,}66\,N$ ist größer als die Hangabtriebskraft von m_1 $F_1 = 5\,N$. Ohne Haftreibungskräfte würde sich deshalb die Masse m_2 abwärts und die Masse m_1 aufwärts bewegen. Im Haftreibungsfall ist die Summe aller Kräfte, die auf m_1 und m_2 wirken, gleich Null, da die Körper in Ruhe bleiben sollen. An der Masse m_2 ist die Hangabtriebskraft F_{t2} entgegengesetzt gerichtet zur Haftreibungskräfte F_{H2} und zur Seilkraft F_{S2}. An der Masse m_1 sind die Hangabtriebskraft F_{t1} und die Haftreibungskraft F_{H1} gleich gerichtet und wirken entgegengesetzt zur Seilkraft F_{S1}.

Es gilt: $F_{t2} - (F_{H2} + F_{S2}) = 0 = F_{t2} - F_{H2} - F_{S2}$

und: $(F_{t1} + F_{H1}) - F_{S1} = 0 = F_{t1} + F_{H1} - F_{S1}$

Seilkräfte sind gleich: $F_{S1} = F_{S2} = F_S$

Es folgt: $F_{t2} - F_{H2} - F_S = 0 = F_{t2} - F_{H2} - (F_{t1} + F_{H1})$

$$(F_{t2} - F_{t1}) - (F_{H2} + F_{H1}) = 0$$

oder: $F_{t2} - F_{t1} = F_{H1} + F_{H2} = \mu_{H,\max} \cdot (F_{n1} + F_{n2})$

Die Massen bleiben in Ruhe wenn für die Haftreibungszahl folgende Relation gilt:

$$\mu_{H,\max} \geq \frac{F_{t2} - F_{t1}}{F_{n1} + F_{n2}} = \frac{\sin 60° - \sin 30°}{\cos 30° + \cos 60°}.$$

$$\mu_{H,\max} \geq \frac{0,866 - 0,5}{0,866 + 0,5} = 0,2679$$

VI-2b. Haftreibungsfall: Die Seilkräfte sind in jedem Punkt des Seils, also auch links und rechts der Umlenkrolle gleich groß.

Sie betragen für: $\mu_{H.\max} = 0,2679$

links der Umlenkrolle: $F_S = F_{t1} + F_{H,\max 1} = 5\,N + 0,27 \cdot 8,66\,N = 7,32\,N$

rechts der Umlenkrolle: $F_S = F_{t2} - F_{H,\max 2} = 8,66\,N - 0,27 \cdot 5\,N = 7,32\,N$

VI-2c. Gleitfall: Die Masse m_2 gleitet abwärts, die Masse m_1 aufwärts. Die Summe der Tangentialkräfte und Gleitreibungskräfte ist ungleich Null. Die Resultierende bewirkt nach dem eine Beschleunigung.

D'Alembertsches Prinzip: $\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = 0$

Betrachte m_2: $(F_{t2} - F_{S2} - F_{G2}) - m_2\, a_2 = 0$

Betrachte m_1: $(F_{S1} - F_{t1} - F_{G1}) - m_1\, a_1 = 0$

Es gilt: $F_{S1} = F_{S2} = F_S$

und: $a_2 = a_1 = a$

Einsetzen: $(F_{t2} - (F_{t1} + F_{G1} + m_1\, a_1) - F_{G2}) - m_2\, a = 0$

Beschleunigung: $a = \frac{1}{m_{ges}}(F_{t2} - F_{t1} - F_{G1} - F_{G2})$

$$a = g \cdot \frac{\sin 60° - \sin 30° - \mu_G (\cos 30° + \cos 60°)}{2}$$

$$a = g \cdot 0,0464 = 0,464\,m\,s^{-2}$$

VI-2d. Betrachte die Masse m_1**:** Die Seilkraft F_{S1} beschleunigt die Masse m_1 aufwärts. Die Hangabtriebskraft F_{t1} und die Gleitreibungskraft $F_{G1} = \mu_G \cdot F_{n1}$ sind entgegengesetzt gerichtet. Zusätzlich wirkt noch die Trägheitskraft $F_{Tr1} = m_1 \cdot a$ entgegengesetzt zur Beschleunigungsrichtung.

Die Seilkraft an m_1: $F_{S1} = F_{t1} + \mu_G\, F_{n1} + m_1 \cdot a$

$$F_{S1} = 5\,N + 0,2 \cdot 8,66\,N + 0,464\,N = 7,196\,N$$

Kontrolle: Betrachte die Masse m_2: Die Seilkraft F_{S2} ist die Differenz aus der Hangabtriebskraft F_{t2} und Summe aus Gleitreibungskraft $F_{G2} = \mu_G \cdot F_{n2}$ und Trägheitskraft $F_{Tr2} = m_2 \cdot a$.

Die Seilkraft an m_1:

$$F_{S2} = F_{t2} - \mu_G \, F_{n1} - m_1 \cdot a$$

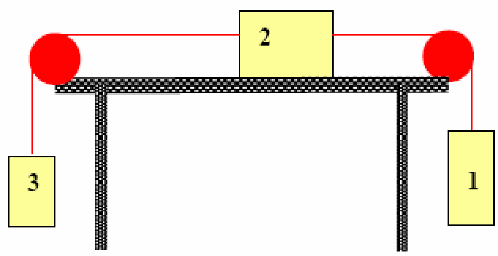
$$F_{S2} = 8,66\,N - 0,2 \cdot 5\,N - 0,464\,N = 7,196\,N$$

VII-1. Ein Wagen der Masse $m = 1600\,kg$ soll innerhalb einer Zeit von $t = 2,5$ Minuten eine Rampe der Länge $s = 190\,m$ mit einer Steigung von 16% aus dem Stillstand hochgezogen werden. Die Bewegung sei gleichmäßig beschleunigt. Die Rollreibungszahl beträgt $\mu_R = 0,1$. Welche Leistung muss der Motor bei einem Wirkungsgrad von $\eta = 0,75$ aufbringen?

a. Man kann die mittlere und die maximale Leistung aus Kraft und Geschwindigkeit bestimmen.

b. Alternativ kann die mittlere Leistung aus den benötigten Energien und den geleisteten Arbeiten bestimmen.
(Allgemeiner Hinweis: Steigung ist der Quotient aus der Höhenänderung und dem entsprechenden horizontalen Weg)

VII-2. Drei Massen, m_1 = 2 kg m_2 = 3 kg und m_3 = 1 kg, sind mit (masselosen) Seilen verbunden. m_2 liegt auf einer horizontalen Unterlage, m_1 und m_3 hängen senkrecht an den Seilen herab. Die Seile werden mit masselosen Rollen mit Radius R = 0,1 m umgelenkt.



a. Welche Haftreibungszahl $\mu_{H,max}$ muss für m_2 unterschritten werden, damit sich die Massen bewegen?

b. Die Gleitreibungszahl μ_G für m_2 betrage 0,2. Wie groß ist die Beschleunigung der Massen?

c. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung der Rollen?

Welche Drehzahl haben die Umlenkrollen, wenn sich die Massen aus der Ruhe heraus um die Strecke s = 1 m bewegt haben?

d. Verwenden Sie zur Lösung zunächst die kinematischen Gleichungen.

e. Bestimmen Sie die Drehzahl alternativ mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes.

Lösungen:

VII-1a. Lösungsweg I: Berechnung der mittleren und maximalen Leistung aus Kraft und Geschwindigkeit:

Gesucht ist die Kraft aufwärts: F_{auf}

Gewichtskraft: F_g

Tangentialkomponente von F_g: $F_t = F_g \sin\theta = m\,g \sin\theta$

Reibungskraft: $F_G = \mu_G\, F_N = \mu_G\, F_G \cos\theta = \mu_G\, m\,g \cos\theta$

D'Alembertsches Prinzip: $\left(\sum_i F_i\right) - m\,a = 0$

$$\left(F_{auf} - F_t - F_G\right) - m\,a = 0$$

Lösung: $F_{auf} = F_t + F_G + m\,a$

$$F_{auf} = m\,g \sin\theta + \mu_G\, mg \cos\theta + m\,a$$

$$F_{auf} = 2527{,}8\,N + 1579{,}9\,N + 27{,}0N = 4134{,}8\,N$$

Mittlere Nutzleistung: $\overline{P}_{Nutz} = F_{auf} \cdot \overline{v} = 4135\,N \cdot 1{,}267\,\frac{m}{s} = 5237\,W$

Maximale Nutzleistung: $P_{Nutz}^{\max} = F_{auf} \cdot v_{\max} = 4135N \cdot 2{,}533\,N$

$$P_{Nutz}^{\max} = F_{auf} \cdot v_{\max} = 10475W$$

Mittlere Gesamtleistung: $\overline{P}_{ges} = \frac{1}{\eta} \cdot \overline{P}_{Nutz} = \frac{1}{0{,}75} \cdot 5237 = 6983W$

Maximale Gesamtleistung: $P_{ges}^{\max} = \frac{1}{\eta} \cdot P_{Nutz}^{\max} = \frac{1}{0{,}75} \cdot 10475 = 13966\,W$

VII-1b Berechnung der mittleren Leistung aus Energie und Arbeit:

Höhenänderung: $\Delta h = s \cdot \sin\theta = s \cdot \sin\left(\arctan 0{,}16\right) = 30.0\,m$

Hubarbeit: $W_H = m\,g\,h = 1600\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m = 480{,}29\,kJ$

Reibungsarbeit: $W_G = \mu_G \cdot m\,g \cdot \cos\theta \cdot s$

$$W_G = 0{,}1 \cdot 1600\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}98744 \cdot 190\,m$$

$$W_G = 300{,}18\,kJ$$

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m\,v^2 = \frac{1}{2} 1600\,kg \cdot \left(2{,}54\,\frac{m}{s}\right)^2 = 5{,}14kJ$

Gesamtenergie: $E_{ges} = W_H + W_G + E_{kin} = 785{,}61\,kJ$

Mittlere Nutzleistung: $P = \frac{E_{ges}}{\Delta t} = \frac{785\,kJ}{150\,s} = 5237\,W$

Mittlere Gesamtleistung: $\overline{P}_{ges} = \frac{1}{\eta} \cdot \overline{P}_{Nutz} = \frac{1}{0{,}75} \cdot 5237 = 6983W$

(**Kommentar:** Wenn man annimmt, dass der Wagen am Ende der Rampe wieder die Geschwindigkeit $v = 0$ hat, entfällt der Energieanteil E_{kin}. Die Aufgabenstellung macht keine Aussage über die Endgeschwindigkeit. Da die kinetische Energie klein im Vergleich mit der Summe aus Hubarbeit und Reibungsarbeit ist, kann man sie natürlich näherungsweise weglassen.)

VII-2a. Die Gewichtskraft für die Masse m_1 beträgt $F_{g1} = 20\,N$, die für die Masse m_3 $F_{g3} = 10\,N$. Ohne Reibung von Masse m_2 würde sich das System nach rechts bewegen. Folglich zeigen die Reibungskräfte nach links. Im Haftreibungsfall gilt: Die Seilkraft rechts von der Masse m_2 (erzeugt durch die Gewichtskraft von m_1), ist gleich der Summe der Haftreibungskraft von m_2 ($F_{G2} = \mu_{H,\max}\ F_{n2}$) und der Seilkraft links von m_2 (erzeugt durch die Gewichtskraft von m_3).

$$F_{g1} = F_{g3} + F_{H2}$$

$$\mu_{H,\max} = \frac{F_{g1} - F_{g3}}{F_{n2}} = \frac{20\,N - 10\,N}{30\,N} = \frac{1}{3}$$

VII-2b. Gegeben: Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}2$. Gesucht: Beschleunigung a.

Gewichtskraft von m_1: $F_{g1} = m_1\,g = 20N$

Gewichtskraft von m_3: $F_{g3} = m_3\,g = 10N$

Reibungskraft von m_2: $F_{G2} = \mu_G\,F_{n2} = 6\,N$

D'Alembertsches Prinzip für m_1: $\left(F_{g1} - F_{S1}\right) - m_1 a = 0$

D'Alembertsches Prinzip für m_2: $\left(F_{S1} - F_{G2} - F_{S3}\right) - m_2 a = 0$

D'Alembertsches Prinzip für m_3: $\left(F_{S3} - F_{g3}\right) - m_3 a = 0$

Einsetzen von F_{S1}: $\left(F_{g1} - \left(F_{G2} + F_{S3} + m_2 a\right)\right) - m_1 a = 0$

Einsetzen von F_{S2}: $\left(F_{g1} - \left(F_{G2} + \left(F_{g3} + m_3 a\right) + m_2 a\right)\right) - m_1 a = 0$

Es folgt:

$$F_{g1} - F_{G2} - F_{g3} - m_3\,a - m_2\,a - m_1\,a = 0$$

$$m_1 g - \mu_G m_2 g - m_3\,g - m_1 a - m_2 a - m_3 a = 0$$

Lösung:

$$a = g \cdot \frac{\left(m_1 - m_3 - \mu_G\,m_2\right)}{m_1 + m_2 + m_3} = g \cdot \frac{0{,}4}{6} = 0{,}666\,m\,s^{-2}$$

VII-2c. Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{0{,}666\ m}{0{,}1\ m\ s^2} = 6{,}66\ s^{-2}$$

VII-2d. **Kinematik:** Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, gelten die kinematischen Beziehungen

für $s_1 = 1m$: $s_1 = \frac{1}{2} a\,t_1^2$

und für v_1: $v_1 = a\,t_1$

Einsetzen: $s_1 = \frac{v_1^2}{2\,a}$

Lösung:

$$v_1 = \sqrt{2\,a\,s_1} = \sqrt{2 \cdot 0{,}666 \cdot 1}\,\frac{m}{s} = 1{,}15\,m\,s^{-1}$$

Drehzahl der Rolle:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_1}{2\pi\ r} = 1{,}84\ s^{-1}$$

VII-2e. **Energieerhaltungssatz:** Setze (oBdA) die potentielle Energie des Ausgangszustand gleich Null. Die kinetische Energie im Ausgangszustand (A) ist ebenfalls Null. Es gilt also:

Gesamtenergie Ausgangszustand: $E_{ges}(A) = E_{pot}(A) + E_{kin}(A) = 0$

Im Endzustand (E), wenn sich Massen um die Strecke von $s = 1m$ bewegt haben, ist die Masse m_1 um die Höhe $h_1 = -1m = -|h|$ gefallen, während die Masse m_3 um die Höhe $h_3 = +1m = +|h|$ gehoben werden ist. An der Masse m_2 ist Reibungsarbeit W_{R2} verrichtet worden.

Da die Gesamtenergie erhalten bleibt, gilt für die Energiebilanz (= Gesamtenergie + Summe der geleisteten Arbeiten) im Endzustand (E):

$$E_{pot}(E) + E_{kin}(E) + W_{R2} = 0$$

Potentielle Energie (E) $\quad E_{pot}(E) = m_1\, g\left(-|h|\right) + m_3\, g\left(+|h|\right)$

$$E_{pot}(E) = -20\,J + 10\,J = -10\,J$$

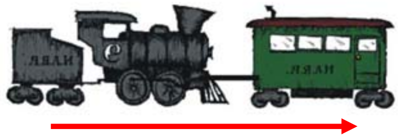
Reibungsarbeit in (E): $\quad W_{R2} = \mu_G \cdot F_{n2} = \mu_G \cdot m_2 \cdot g = 6\,J$

Energiebilanz in (E): $\quad E_{ges}(E) = 0 = -10J + \frac{1}{2} m_{ges} v_1^2 + 6J = 0$

Geschwindigkeit der Massen: $\quad v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4J}{6\,kg}} = 1,25\,m\,s^{-1}$

Drehzahl der Rolle: $\quad n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_1}{2\pi\, r} = 1{,}837\ s^{-1}$

VIII-1. Eine Rangierlok der Masse 25 t, die einen (nicht angekuppelten) Waggon der Masse 10 t vor sich her schiebt, wird gleichmäßig beschleunigt. Sie soll in 5 s aus dem Stand heraus eine Endgeschwindigkeit von 18 km/h erreichen. Dabei ist ständig eine Reibungskraft von 5 kN vorhanden.



a. Wie groß ist die maximale und wie groß die mittlere Leistung, die die Lok aufbringen muss?

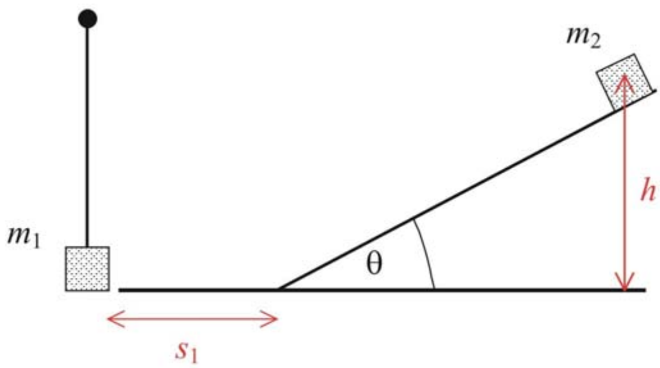
Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit bremst die Lok, der geschobene Waggon löst sich und rollt mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Nach einer reibungsfreien Fahrt stößt er auf <u>drei</u> stehende, aneinander gekuppelte gleiche Waggons mit jeweils 10 t Masse und kuppelt automatisch an diese an.

b. Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit rollen die <u>vier</u> Waggons weiter?

c. Wie groß ist der <u>relative Energieumsatz</u> in der Kupplung? (<u>Hinweis</u>: Gesucht ist der Energieverlust Q beim Stoß geteilt durch die kinetische Energie E_{kin}^{0} des stoßenden Waggons.)

d. Welche Kraft muss die Kupplung aufbringen, wenn die Ankupplungszeit circa 0,75 s beträgt?

VIII-2. Ein Körper der Masse $m_2 = 1kg$ gleitet aus der Höhe $h = 1m$ eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta = 30°$ hinab. Anschließend rutscht er auf einem horizontalen Streckenabschnitt der Länge $s_1 = 1m$ und stößt am Ende auf einen Pendelkörper mit der Masse $m_1 = 0,5kg$. Die Gleitreibungszahl auf der gesamten Strecke beträgt $\mu_G = 0,1$. Berechnen Sie, <u>wie hoch</u> das Pendel mit der Masse m_1 ausschwingt (Masse der Pendelstange kann vernachlässigt werden), für folgende Bedingungen:



a. Einen (vollkommen) **elastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1.

b. Einen **unelastischen Stoß** zwischen den Massen m_2 und m_1, wobei als Zusatzbedingung angenommen werden soll, dass beim Stoß 25% der kinetischen Energie in Verformungs- bzw. Wärmeenergie umgewandelt wird.

c. Einen **vollkommen unelastischen Stoß**.

d. Wie groß ist der Energieverlust beim vollkommen unelastischen Stoß (**V1c**.) relativ zur kinetischen Energie des Körpers m_2 direkt vor dem Stoß?

Lösungen:

VIII-2a. Masse der Lok: $m_L = 25\,t = 25000\,kg$

Masse des Wagons: $m_W = 10\,t = 10000\,kg$

Geschwindigkeitsänderung: $\Delta v = (18-0)\,km/h = 5\,m/s$

Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5\,m\,s^{-1}}{5\,s} = 1{,}0\,m\,s^{-2}$

Beschleunigungskraft: $F_a = m_{ges}\,a = \left(m_L + m_W\right)a$

$F_a = 35000\,kg \cdot 1{,}0\,\frac{m}{s^2} = 35\,kN$

Reibungskraft: $F_R = 5\,kN$

Gesamtkraft: $F_{ges} = F_a + F_R = 40{,}0\,kN$

Maximale Leistung: $P_{\max} = F_{ges}\,v_{\max} = 40\,kN \cdot 5\frac{m}{s} = 200\,kW$

Mittlere Leistung: $P_{mittel} = F_{ges}\,v_{mittel} = 40\,kN \cdot 2{,}5\frac{m}{s} = 100\,kW$

VIII-2b. Waggon Nr. 1 vor dem Stoß: $v_1 = 5\,m\,s^{-1}$

Waggon Nr. 2,3,4 vor dem Stoß: $v_i = 0,\ \mathit{für}\ i = 2,3,4$

Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)u$

Geschwindigkeit nach dem Stoß: $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot v_1 = \frac{m_1}{\sum_{i=1,4} m_i} \cdot v_1$

$u = \frac{10}{40} v_1 = \frac{5}{4} m\,s^{-1} = 1{,}25\,m\,s^{-1}$

IV2c. Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2} m_i u^2\right) + Q$

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)u^2 + Q$

Energieumsatz in der Kupplung: $Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)u^2$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right) m_1^2 v_1^2}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)^2} = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\right) E_{kin}^1$$

$$Q = \left(1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\right) E_{kin}^1$$

Absoluter Energieverlust: $Q = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 5^2\ J = 125\,kJ$

Relativer Energieumsatz: $\frac{Q}{E_{kin}} = 1 - \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = 1 - \frac{10}{40} = 75\%$

VIII-1d. Kraft = Impulsänderung: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{End} - p_{Anf}}{\Delta t}$

Für Waggon Nr. 1: $F_1 = \frac{m_1 u - m_1 v_1}{\Delta t} = \frac{m_1 (u - v_1)}{\Delta t}$

$$F_1 = \frac{10000(1,25-5)}{0,75} N = -50\,kN$$

Für Waggon Nr.2,3,4: $F_{234} = \frac{(m_2 + m_3 + m_4) u - 0}{\Delta t} = \frac{(m_2 + m_3 + m_4) u}{\Delta t}$

$$F_{234} = \frac{30000 \cdot 1,25}{0,75} = +50\,kN$$

Auch in diesem Fall gilt also: Actio = Reactio.

VIII-2. Berechnung von Hilfsgrößen:

Anfangsenergie Masse m_2: $E_{pot,2} = m_2\, g\, h = 10\,J$

Weg auf schiefer Ebene: $s_0 = \frac{h}{\sin\theta} = 2\,m$

Reibungsarbeit auf s_0: $W_{R0} = \mu_G\, m\, g \cos\theta\, s_0 = 1,732\,J$

Reibungsarbeit s_1: $W_{R0} = \mu_G\, m\, g\, s_1 = 1,000\,J$

Gesamte Reibungsarbeit: $W_{R,ges} = 2,732\,J$

Kinetische Energie des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$E_{kin,2} = E_{pot,2} - W_{R,ges} = 7,268\,J$$

Geschwindigkeit des Körpers m_2 vor dem Kontakt mit dem Pendel:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin,K}}{m_2}} = 3,813\,m\,s^{-1}$$

VIII-2a. Elastischer Stoß mit $v_1 = 0$:

Ansatz:

Impulserhaltungssatz: $m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

Lösung nach Formelsammlung (Ableitung siehe Vorlesung):

Geschwindigkeit u_1: $u_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

mit $v_1 = 0$: $u_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2}{1,5} v_2 = \frac{4}{3} v_2 = 5,084\,m\,s^{-1}$

Geschwindigkeit u_2: $u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$

mit $v_1 = 0$: $u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1 - 0,5}{1,5} = +\frac{1}{3} v_2 = 1,271\,m\,s^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{elastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2$

$$h_{elastisch} = \frac{u_1^2}{2\,g} = 1,292\,m$$

VIII-2b. Unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $\frac{Q_u}{E_{kin,2}} = \chi$; allgemeine Lösung für u_1

Impulserhaltungssatz: $m_2\, v_2 = m_1\, u_1 + m_2\, u_2$

Umstellen: $m_2\, u_2 = m_2\, v_2 - m_1\, u_1$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, u_2^2 + Q_u$

mit $Q_u = \chi \cdot E_{kin,2}$ folgt $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2} m_1\, u_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, u_2^2 + \chi \cdot \frac{1}{2} m_2\, v_2^2$

$$(1-\chi)\, m_2^2\, v_2^2 = m_1\, m_2\, u_1^2 + m_2^2\, u_2^2$$

$$(1-\chi)\, m_2^2\, v_2^2 = m_1\, m_2\, u_1^2 + (m_2\, v_2 - m_1\, u_1)^2$$

$$(1-\chi)\, m_2^2\, v_2^2 = m_1\, m_2\, u_1^2 + m_2^2\, v_2^2 - 2 m_2\, v_2\, m_1\, u_1 + m_1^2\, u_1^2$$

$$(m_1\, m_2 + m_1^2)\, u_1^2 - 2\, m_2\, v_2\, m_1\, u_1 = -\chi \cdot m_2^2\, v_2^2$$

$$u_1^2 - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1\, v_2 = -\chi \cdot \frac{m_2^2}{m_1\, m_2 + m_1^2} v_2^2$$

$$u_1^2 - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1\, v_2 = -\chi \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_2}{m_2 + m_1} v_2^2$$

Setze zur Vereinfachung: $\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

$$u_1^2 - 2\,\lambda\, u_1\, v_2 + \lambda^2 v_2^2 = \left(\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1} \lambda \right) v_2^2$$

$$u_1 - \lambda\, v_2 = \pm v_2 \cdot \sqrt{\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1} \lambda} \cdot$$

Allgemeine Lösung: $u_1 = \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \chi \cdot \frac{m_2}{m_1} \lambda} \right) \cdot v_2$

Diskussion: Für $\chi \to 0$ entspricht die Lösung der des elastischen Stoßes:

Setze $\chi = 0$ $u_1 = \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2$

$$\lambda = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Für die positive Wurzel ist: $u_1 = \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2 = 2\,\lambda \cdot v_2 = \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} v_2$

diese Lösung stimmt mit der aus Teil a. überein.

(Negative Wurzel: $u_1 = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2} \right) \cdot v_2 = 0 \cdot v_2 = 0$ kann ausgeschlossen werden)

Lösung für Teil b: Setze $\chi = 0,5 = \frac{1}{2}$, $m_2 = 1kg$ und $m_1 = 0,5kg$:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

$$u_1 = \left(\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}} \right) \cdot v_2$$

Wie oben gezeigt, muss die positive Wurzel verwendet werden:

$$u_1 = \left(\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{8-6}{18}} \right) \cdot v_2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot v_2$$

$$u_1 = v_2 = 3,813\, m\, s^{-1}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_2} u_1 = v_2 \left(1 - \frac{0,5}{1} \cdot v_2 \right)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} v_2 = 1,907\, ms^{-1}$$

Hinweis: Hier wurde eine <u>allgemeine Lösung</u> für χ und λ hergeleitet. Man kann im vorliegenden Fall die Rechnung stark vereinfachen, wenn man im Ansatz bereits $\chi = \frac{Q_u}{E_{kin,2}} = \frac{1}{4}$ und $\frac{m_2}{m_1} = 2$ verwendet.

Setze $m_2 = 2m$ und $m_1 = 1m$:

Impulserhaltungssatz: $$2m v_2 = m u_1 + 2m u_2$$

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2} u_1$$

Energieerhaltungssatz: $$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + Q_u$$

mit $Q_u = \chi \cdot E_{kin,2}$ folgt $$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \chi \cdot \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

mit $\chi = \frac{1}{4}$ und $m_2 = 2m$ und $m_1 = 1\, m$ folgt:

$$v_2^2 = \frac{1}{2} u_1^2 + u_2^2 + \frac{1}{4} \cdot v_2^2$$

$$\frac{3}{4} v_2^2 = \frac{1}{2} u_1^2 + \left(v_2 - \frac{1}{2} u_1 \right)^2$$

$$\frac{3}{4} v_2^2 = \frac{1}{2} u_1^2 + v_2^2 - v_2 u_1 + \frac{1}{4} u_1^2$$

$$3v_2^2 = 3u_1^2 + 4v_2^2 - 4v_2 u_1$$

$$3u_1^2 - 4v_2 u_1 = -v_2^2$$

$$u_1^2 - 2\frac{2}{3} v_2 u_1 = -\frac{1}{3} v_2^2$$

$$\left(u_1 - \frac{2}{3} v_2 \right)^2 = -\frac{1}{3} v_2^2 + \frac{4}{9} v_2^2 = \frac{1}{9} v_2^2$$

$$u_1 = \pm\frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_2$$

Positive Lösung: $u_1 = v_2$

und $u_2 = v_2 - \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}v_2$

Berechnung der Höhe, die das Pendel schwingt:

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{unelastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u^2_{unelastisch,1}$

$$h_{unelastisch} = \frac{u_1^2}{2\,g} = 0,727\,m$$

VII-2c. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim <u>v</u>ollkommen <u>u</u>nelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Impulserhaltungssatz: $m_2\, v_2 = (m_1 + m_2)\, u$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 + Q_{vu}$

Lösung für u: $u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1}{3} v_2 = 1,271\, m\, s^{-1}$

Energieerhaltungssatz: $m_1\, g\, h_{vollk.unelastisch} = \frac{1}{2} m_1\, u^2_{vollk.\,unelastisch,1}$

$$h_{vollk.\,unelastisch} = \frac{u^2}{2\,g} = 0,112\,m$$

V1d. Vollkommen unelastischer Stoß mit $v_1 = 0$ und $u = u_1 = u_2$; Q_{vu} ist die Energie, die beim vollkommen unelastischen Stoß als Verformungs- oder Wärmeenergie verloren geht.:

Energieverlust: $Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2$

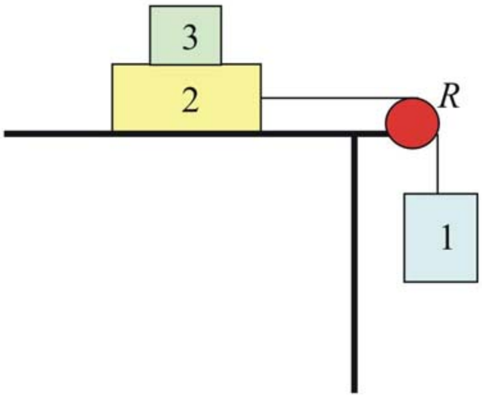
$$Q_{vu} = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{1}{9} v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_2 - \frac{m_1 + m_2}{9}\right) v_2^2$$

Setze: $m_1 = m$ und $m_2 = 2\,m$ $\quad Q_{vu} = \frac{1}{2}\left(2\,m - \frac{3\,m}{9}\right) v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m\right) v_2^2 = \frac{5}{6} E_{kin,2}$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q_{vu}}{E_{kin,2}} = \frac{5}{6} = 83,3\%$

Tutorium Physik I **IX. Übungsblatt** **25.05.2007**
zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe **SS07**

IX-1. Auf einem Tisch liegen zwei Blöcke $m_2 = 3\,kg$ und $m_3 = 1{,}5\,kg$ übereinander. Die Gleitreibungszahlen zwischen Block Nr.2 und dem Tisch und zwischen den beiden Blöcken Nr. 2 und Nr. 3 betragen $\mu_G = 0{,}3$, die Haftreibungszahlen $\mu_{H,\max} = 0{,}4$. Der Block Nr. 1 ist mit einem Seil, das über eine Umlenkrolle geführt ist, mit dem Block Nr.2 verbunden. (Seil und Umlenkrolle sollen als masselos betrachtet werden.)



a. Überlegen Sie zunächst, was passieren würde, wenn weder Haftreibung noch Gleitreibung vorhanden wäre. Würde sich der Block Nr. 3 bewegen? Bestimmen Sie die Beschleunigung des Blocks Nr. 2, wenn der Block Nr. 1 eine Masse von $m_1 = 2\,kg$ besitzt?

Berücksichtigen Sie im folgenden die genannten Reibungszahlen:

b. Wie groß muss die Masse des Blocks Nr. 1 mindestens sein (m_{1a}), damit der Block m_2 bewegt werden kann?

c. Wie groß darf die Masse des Blocks Nr. 1 höchstens sein (m_{1b}), damit der Block Nr. 3 auf dem Block Nr. 2 haften bleibt?

d. Wie groß ist die Beschleunigung des Blocks Nr. 2, wenn für die Masse des Blocks Nr. 1 gilt $m_1 = 2\,kg$? (Hinweis: Überlegen Sie zunächst, was bei dem gegebenen Wert von m_1 mit Block Nr. 3 passiert).

e. Die Masse des Blocks Nr. 1 soll $m_1 = 8\,kg$ betragen. Bestimmen Sie die Beschleunigung für Block Nr. 2 (a_2) und für Block Nr. 3 (a_3).

f. Skizieren Sie die Ergebnisse für die Beschleunigungen $a = a_1 = a_2$ und a_3 als Funktion der Masse m_1 des Blocks Nr. 1. Diskutieren Sie den Verlauf und die Sprungstellen.

Lösungen:

Bezeichnungen:

Gewichtskraft der Masse m_1: $F_{g1} = m_1\,g$

Seilkraft: F_S

Haftreibungskraft und Gleitreibungskraft für die Kontaktfläche zwischen Block Nr. 2 und der Unterlage (Tisch):

$$F_{H,\max 2} = \mu_{H,\max}\,F_n = \mu_{H,\max}\left(m_2 + m_3\right) g$$
$$F_{H,\max 2} = 0,4 \cdot 4,5\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 18N$$
$$F_{G2} = \mu_G\,F_n = \mu_G\left(m_2 + m_3\right) g$$
$$F_{G2} = 0,30 \cdot 4,5\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 13,5N$$

Haftreibungskraft und Gleitreibungskraft für die Kontaktfläche zwischen Block Nr. 3 und der Unterlage (Block Nr.2):

$$F_{H,\max 3} = \mu_{H,\max}\,F_n = \mu_{H,\max}\,m_3\,g$$
$$F_{H,\max 3} = 0,4 \cdot 1,5\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 6N$$
$$F_{G3} = \mu_G\,F_n = \mu_G\,m_3\,g$$
$$F_{G3} = 0,3 \cdot 1,5\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 4,5\,N$$

IX-a. Der Block Nr. 2 ist mit dem Block Nr. 1 durch ein Seil verbunden. Die Gewichtskraft der Masse m_1 erzeugt eine Beschleunigung der verbundenen Massen $m_1 + m_2$. Zwischen Block Nr. 2 und Block Nr. 3 wirken jedoch nur Reibungskräfte, und wenn man annimmt, dass diese Reibungskräfte nicht vorhanden sind, kann der Block Nr. 3 auch nicht beschleunigt werden.

Bestimmung der Beschleunigung ohne Berücksichtigung von Reibungskräften:

D'Alembertsches Prinzip:

1. für Kräfte an Block Nr. 1 $\sum_i F_i - m_1 a = 0$

Einsetzen:
$$\left(F_{g1} - F_S\right) - m_1\,a = 0$$
$$m_1\,g - F_S - m_1\,a = 0$$
$$F_S = m_1\,g - m_1\,a = m_1\,(g - a) \qquad (1)$$

2. für Kräfte an Block Nr. 2 $\sum_i F_i - m_2 a = 0$

Einsetzen: $F_S - m_2\,a = 0$ (2)

Setze F_S aus Gleichung (1) in Gleichung (2):

$$m_1(g - a) - m_2\,a = 0$$
$$m_1\,g - a\left(m_1 + m_2\right) = 0$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$a = \frac{2}{2+3} \cdot g = 0{,}4\,g = 4\,m\,s^{-2}$$

IX-b. Es handelt sich um ein rein **statisches Problem**: Der Block Nr. 2 wird bewegt, wenn die Gewichtskraft F_{g1} von Block Nr. 1 größer als die Haftreibungskraft $F_{H,\max 2}$ zwischen Block Nr. 2 und seiner Unterlage ist:

$$F_{g1} = m_{1a}\, g > \mu_{H,\max} \left(m_2 + m_3\right) g = F_{H,\max 2}$$

$$m_{1a} > \mu_{H,\max} \left(m_2 + m_3\right)$$

$$m_{1a} > 0{,}4 \cdot \left(3\,kg + 1{,}5\,kg\right) = 1{,}8\,kg$$

Lösung: $m_{1a} = 1{,}8\,kg$

IX-c. Der Block Nr. 3 haftet auf dem Block Nr. 2, wenn der Betrag der Trägheitskraft der Masse m_3 kleiner als der Betrag der Haftreibungskraft $F_{H,\max 3}$ zwischen Block Nr. 3 und seiner Unterlage ist.

$$F_{Tr3} = m_3\, a_3 < \mu_{H,\max}\, m_3\, g = 6\,N$$

Bedingung für Haftreibung: $a_3 < \mu_{H,\max} \cdot g$ (*)

Im Haftreibungsfall sind die Beschleunigungen von Block Nr. 2 und Block Nr. 3 gleich: $a_3 = a_2$

D'Alembertsches Prinzip:

1. Kräfte an Block Nr. 1 sind identisch mit denen des Aufgabenteils a.
Für die Seilkraft ergab sich: $F_S = m_1\, g - m_1\, a = m_1\,(g - a)$ (1)

2. für Kräfte an Block Nr. 2 gilt: $\sum_i F_i - \left(m_2 + m_3\right) a = 0$

Einsetzen: $\left(F_S - F_{G2}\right) - \left(m_2 + m_3\right) a = 0$

Erläuterung: Da der Haftreibungsfall zwischen Block Nr. 2 und Block Nr. 3 angenommen wird, muss für die Trägheitskraft die Summe beider Massen eingesetzt werden. Die Beschleunigung wird durch die Differenzkraft aus Seilkraft und Gleitreibungskraft für Block Nr. 2 erzeugt.

$$\left(F_S - \mu_G \left(m_2 + m_3\right) g\right) - \left(m_2 + m_3\right) a = 0$$

$$F_S = \left(m_2 + m_3\right)\left(\mu_G\, g + a\right) \qquad (4)$$

Setze F_S aus Gleichung (1) und in Gleichung (4):

$$m_1 (g - a) = \left(m_2 + m_3\right)\left(\mu_G\, g + a\right)$$

$$m_1 g - m_1\, a - \left(m_2 + m_3\right) \mu_G\, g - \left(m_2 + m_3\right) a = 0$$

Allgemeine Lösung für a: $$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\mu_G}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g \qquad (5)$$

Bed. für Haftreibung von m_3 (*): $a = a_3 < \mu_{H,\max} \cdot g$

Einsetzen:
$$\mu_{H,\max}\, g > \frac{m_1 - (m_2 + m_3)\,\mu_G}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g$$
$$\mu_{H,\max} > \frac{m_1 - (m_2 + m_3)\,\mu_G}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$0,4 > \frac{m_1 - 4,5\,kg \cdot 0,3}{m_1 + 4,5\,kg}$$
$$m_1 - 1,35\,kg < 0,4\,m_1 + 1,8\,kg$$
$$m_1 < 5,25\,kg$$

Gesuchter Wert der Masse m_{1b}: $m_{1b} = 5,25\,kg$

IX-d. Vorüberlegung: Die Masse des Blocks Nr. 1 $m_1 = 2\,kg$ liegt zwischen $m_{1a} = 1,8\,kg$ und $m_{1b} = 5,25\,kg$. Die Masse m_1 ist also groß genug, um die Haftreibung zwischen Block Nr. 2 und Tisch zu überwinden, aber klein genug, um den Block Nr. 3 auf Block Nr. 2 haften zu lassen.

Die allgemeine Lösung für die Beschleunigung wurde in Gleichung (5) angegeben.

Bestimmung der Beschleunigung:
$$a = \frac{m_1 - (m_2 + m_3)\,\mu_G}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g$$

Lösung:
$$a = \frac{2 - 4,5 \cdot 0,3}{6,5} \cdot g = 0,1 \cdot 10\,m\,s^{-2} = 1\,m\,s^{-2}$$

IX-e. Die Masse von Block Nr. 1 $m_1 = 8\,kg$ ist größer als $m_{1b} = 5,25\,kg$. Deshalb kann der Block Nr. 3 nicht mehr auf Block Nr. 2 haften bleiben. Der Block Nr. 2 wird unter Block Nr. 3 hindurch gleiten und über die Gleitreibungskraft F_{G3} den Block Nr. 3 beschleunigen. Man muss jetzt also zwischen den Beschleunigungen a_2 und a_3 unterscheiden, da die Werte verschieden sind. Zur Vereinfachung wählen wir die Bezeichnungen: $a_2 = a_1 = a$ und $a_3 \neq a$

D'Alembertsches Prinzip:

1. Kräfte an Block Nr. 1 sind identisch mit denen des Aufgabenteils a.
Für die Seilkraft ergab sich: $F_S = m_1\, g - m_1\, a = m_1\,(g - a)$ (1)

2. für Kräfte an Block Nr. 2 gilt: $\sum_i F_i - m_2\, a = 0$

Nach Einsetzen folgt: $(F_S - F_{G2} - F_{G3}) - m_2 a = 0$

Erläuterung: Der Block Nr. 3 haftet jetzt nicht auf Block Nr. 2. Deshalb trägt seine Masse nicht zur Trägheitskraft bei. Stattdessen wirken auf den Block Nr. 2 jetzt zwei Gleitreibungskräfte: F_{G2} entspricht der Reibungskraft zwischen Block Nr. 2 und dem Tisch und F_{G3} entspricht der Reibungskraft zwischen Block Nr. 2 und Block Nr. 3.

Einsetzen von F_{G2} und F_{G3} $\left(F_S - \mu_G\,(m_2 + m_3)\,g - \mu_G\, m_3\, g\right) - m_2 a = 0$

$$F_S = \mu_G \left(m_2 + 2\,m_3\right) g + m_2\, a \qquad (6)$$

Setze F_S aus Gleichung (1) in Gleichung (6) ein:

$$m_1\,(g-a) - \mu_G \left(m_2 + 2\,m_3\right) g - m_2\, a = 0$$

$$m_1\, g - m_1\, a - \mu_G \left(m_2 + 2\,m_3\right) g - m_2\, a = 0$$

$$g\left(m_1 - \mu_G\left(m_2 + 2\,m_3\right)\right) = a\left(m_1 + m_2\right)$$

Allgemeine Lösung für a

$$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + 2\,m_3\right)\mu_G}{m_1 + m_2} \cdot g \qquad (7)$$

$$a = \frac{8 - \left(3 + 2\cdot 1{,}5\right)\cdot 0{,}3}{8+3} \cdot g = \frac{8 - 1{,}8}{11}\, g$$

Lösung:

$$a = \frac{6{,}2}{11}\, g = 0{,}564 \cdot 10\, m\, s^{-2} = 5{,}64\, m\, s^{-2}$$

Das Prinzip "Actio gleich Reactio" erfordert, dass die gleiche Reibungskraft, mit der Block Nr. 3 auf Block Nr. 2 wirkt, in umgekehrter Richtung auch von Block Nr. 2 auf Block Nr. 3 wirkt. Diese Gegenkraft bewirkt am Block Nr. 3 eine Beschleunigung.

D'Alembertsches Prinzip:

4. für Kräfte, die auf Block Nr. 3 wirken:

$$\sum_i F_i - m_3\, a_3 = 0$$

Einsetzen:

$$F_{G3} - m_3\, a_3 = 0$$

$$\mu_G\, m_3\, g - m_3\, a_3 = 0$$

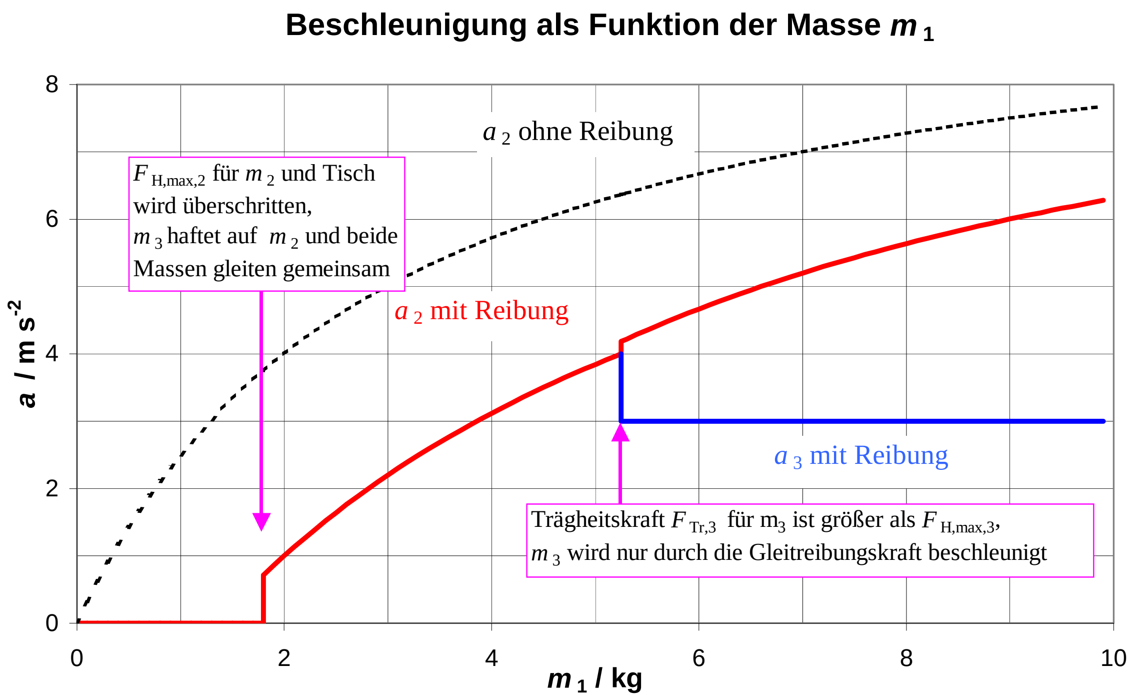
Lösung:

$$a_3 = \mu_G\, g = 0{,}3 \cdot 10\, m\, s^{-2} = 3\, m\, s^{-2}$$

Kommentar: Man beachte, dass die Beschleunigung a_3 es Blocks Nr. 3 nicht von der Seilkraft F_S. Die Seilkraft ist Ursache für die Beschleunigung der Massen m_2 und man könnte, wenn F_S hinreichen groß ist, den Block Nr. 2 sehr stark beschleunigen. Der Block Nr. 3 wird aber immer mit dem oben bestimmten Wert a_3 beschleunigen, unabhängig von der Beschleunigung a_2.
Dies ist der Grund, warum man etwa ein Blatt Papier oder ein Tuch unter einem gefüllten Glas herausziehen kann, ohne den Inhalt des Glases zu verschütten. Man muss die Beschleunigung des Papiers oder des Tuchs nur ausreichend groß wählen.

IX-f. Ohne Reibung: Die Beschleunigung ohne Berücksichtigung der Reibung ist eine monoton wachsende Funktion mit dem Grenzwert $a \to g$ wenn $m_1 \to \infty$. Zur Erklärung: Wenn m_1 sehr klein ist, wird die Trägheitskraft von m_2 bestimmt, bei sehr großem m_1 entspricht dessen Wert praktisch der Gesamtmasse.

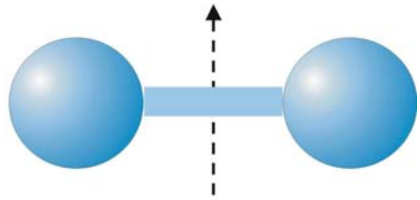
Mit Reibungskräften: Die Funktion der Beschleunigung a_2 des Blocks Nr. 2 hat zwei Sprungstellen. Bei $m_1 \le 1{,}8\,kg$ haftet Block Nr. 2 auf dem Tisch und es gilt $a_2 = 0$. Im Bereich $1{,}8\,kg < m_1 \le 5{,}25\,kg$ werden die Blöcke Nr. 2 und Nr. 3 gemeinsam beschleunigt. Wenn $m_1 > 5{,}25\,kg$ ist, ist die Trägheitskraft von Block Nr. 3 größer als dessen Haftreibungskraft. Die Trägheitskraft von Block Nr. 3 wird deshalb nicht mehr auf den Block Nr. 2 übertragen. Stattdessen wirkt die Gleitreibungskraft von Block Nr. 3 der Seilkraft an Block 2 entgegen. Die Beschleunigung von Block Nr. 3 ist für $m_1 < 5,25\,kg$ gleich der Beschleunigung des Blocks Nr. 2. Wenn $m_1 > 5,25\,kg$ ist die Beschleunigung von Block Nr. 3 konstant.



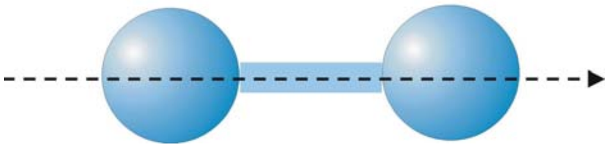
Tutorium Physik I | **X. Übungsblatt** | **01.06.2007**
zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe | **SS07**

X-1. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für folgende Körper mit **homogener Dichte**. Die Körper sollen jeweils die Gesamtmasse m_{ges} besitzen. Die gestrichelte Linie zeigt die Drehachse. Das Ergebnis soll in der Form $J_{ges} = x \cdot m_{ges} \cdot R^2$ angegeben werden, wobei der Faktor *x* aus den Angaben zur Geometrie zu bestimmen ist..

a. **Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:**
Radius der Kugeln R,
Länge der Verbindungsstange $L = 2 \cdot R$,
Radius der Verbindungsstange $r = 0,2 \cdot R$.



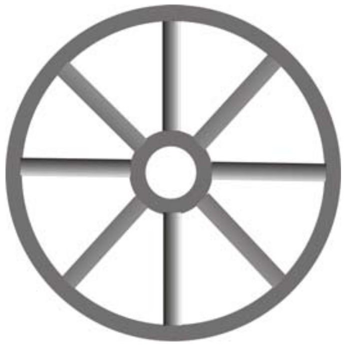
b. **Hantel parallel zur Symmetrieachse:**
Radius der Kugeln R,
Länge der Verbindungsstange $L = 2 \cdot R$,
Radius der Verbindungsstange $r = 0,2 \cdot R$.



c. **Speichenrad:**
Radkranz (Äußerer Reifen):
Außenradius: $R = R_{aa} = 16 \cdot r$,
Innenradius: $R_{ai} = R_{aa} - r$,

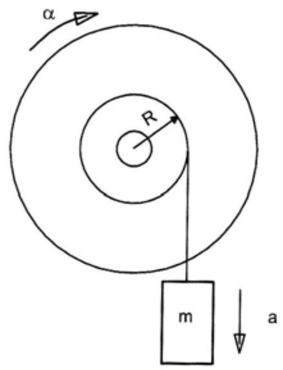
Radnabe (Innerer Ring):
Außenradius: $R_{ia} = R_{ii} + r$,
Innenradius: $R_{ii} = 2r$
Beide Ringe haben die Höhe: $h = 2r$

Radius der **Speichen**: $R_S = r$



d. Versuchen Sie, für die gegebenen Beispiele einfache Abschätzung zu finden und vergleich Sie die Ergebnisse der Schätzung mit denen der exakten Rechnung.

X-2. Ein Drehmomentenrad erfährt um seine horizontale Achse eine Winkelbeschleunigung, die durch die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 10\,kg$ erzeugt wird, der an einem um die Achse ($R = 8\,cm$) gewickelten Faden hängt. Lässt man den Körper (*m*) los, so bewegt er sich in $t = 5\,s$ um die Strecke $s = 2m$ nach unten. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Systems Rad/Achse,



a. indem Sie die am System wirkenden **Kräfte und Momente betrachten**,
b. indem Sie den **Energieerhaltungssatz anwenden**.

Lösungen:

X-1a. Hantel senkrecht zur Symmetrieachse:
Berechnung der Volumina:

Kugelvolumen: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1,333 \cdot \pi R^3$

Volumen der Stange: $V_S = \left(\pi r^2\right) \cdot L = 0,040 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^3 = 0,080 \cdot \pi R^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = \left(2 \cdot \frac{4}{3} + 0,08\right)\pi R^3 = 2,747\ \pi R^3$

Da eine homogene Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ angenommen wird, sind die Massen der Teilkörper proportional zu deren Volumina.

Masse der Stange: $\frac{m_S}{m_{ges}} = \frac{V_S}{V_{ges}} = \frac{0,08}{2,747} = 0,029126 = 2,9\%$

Masse der Kugel: $\frac{m_K}{m_{ges}} = \frac{V_K}{V_{ges}} = \frac{1,333}{2,747} = 0,4854 = 48,5\%$

Massenträgheitsmoment Kugel: $J_K = m_K \left(2R\right)^2 + \frac{2}{5} m_k R^2 = 4,4\, m_K R^2$

$$J_K = 4,4 \cdot 0,4854 \cdot m_{ges} R^2 = 2,1358 \cdot m_{ges} R^2$$

Massenträgheitsmoment Stange: $J_S = \frac{1}{12} m_S L^2 = \frac{1}{12} m_S\, 4R^2 = \frac{1}{3} m_S R^2$

$$J_S = \frac{1}{3} \cdot 0,029126 \cdot m_{ges} R^2 = 0,0097 \cdot m_{ges} R^2$$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{ges} = 2 \cdot J_K + J_S = \left(2 \cdot 2,1354 + 0,0097\right) \cdot m_{ges} R^2$

Lösung: Faktor *x*: $x = \frac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 2 \cdot 2,1354 + 0,0097 = 4,28$

X-1b. Hantel parallel zur Symmetrieachse:
Die Volumina und Massenverhältnisse der Teilkörper können aus **VI1a** übernommen werden.

Massenträgheitsmoment Kugel: $J_K = \frac{2}{5} m_k R^2 = 0,4 \cdot m_k R^2$

$$J_K = 0,4 \cdot 0,48532 \cdot m_{ges} R^2 = 0,19413 \cdot m_{ges} R^2$$

Massenträgheitsmoment Stange: $J_S = \frac{1}{2} m_s r^2 = 0,5\, m_s r^2 = 0,5\, m_s\, 0,04\, R^2$

$$J_S = 0,02\ m_s R^2 = 0,02 \cdot 0,029126 \cdot m_{ges} R^2$$

$$J_S = 0,00058252 \cdot m_{ges} R^2$$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{ges} = 2 \cdot J_K + J_S$

$$J_{ges} = \left(2 \cdot 0,19413 + 0,000583\right) m_{ges} R^2$$

Lösung: Faktor *x*: $x = \frac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 2 \cdot 0,19413 + 0,000583 = 0,389$

Fazit: Die Massenträgheitsmomente der Hantel unterscheiden sich je nach Orientierung von Dreh- und Symmetrieachse um den Faktor 11,0!

X-1c. Speichenrad:

Berechnung der Volumina:

Volumen des Radkranzes: $V_a = \pi\, h\left(R_{aa}^2 - R_{ai}^2\right) = 2\left(256 - 225\right)\pi\, r^3 = 62\,\pi\, r^3$

Volumen der Radnabe: $V_i = \pi\, h\left(R_{ia}^2 - R_{ii}^2\right) = 2\left(9 - 4\right)\pi\, r^3 = 10\,\pi\, r^3$

Volumen einer Speiche: $V_S = \pi\, r^2 l_S = \left(15 - 3\right)\pi\, r^3 = 12\,\pi\, r^3$

Volumen aller Speichen: $V_{S,ges} = 8 \cdot V_S = 96\,\pi\, r^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges} = \left(10 + 62 + 96\right)\pi\, r^3 = 168\ \pi\, r^3$

Mit $R = R_{aa} = 16\, r$ folgt: $V_{ges} = \dfrac{168}{16^3}\pi\, R^3 = \dfrac{168}{4096}\pi\, R^3 = 0{,}041015\,\pi\, R^3$

Da eine homogene Dichte $\rho = \dfrac{m}{V}$ angenommen wird, sind die Massen der Teilkörper proportional zu den Volumina.

Masse des Radkranzes: $\dfrac{m_a}{m_{ges}} = \dfrac{V_a}{V_{ges}} = \dfrac{62}{168} = 0{,}369048 = 36{,}9\%$

Masse der Radnabe: $\dfrac{m_i}{m_{ges}} = \dfrac{V_i}{V_{ges}} = \dfrac{10}{168} = 0{,}059524 = 6{,}0\%$

Masse einer Speiche: $\dfrac{m_S}{m_{ges}} = \dfrac{V_S}{V_{ges}} = \dfrac{12}{168} = 0{,}071429 = 7{,}1\%$

Masse aller Speichen: $\dfrac{m_K}{m_{ges}} = \dfrac{V_K}{V_{ges}} = \dfrac{96}{168} = 0{,}571429 = 57{,}1\%$

Massenträgheitsmoment Kranz: $J_a = \dfrac{1}{2} m_a\left(R_{aa}^2 + R_{ai}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(256 + 225\right) m_a\, r^2$

$$J_a = \frac{1}{2} 481 m_a\, r^2 = \frac{1}{2} 481 \cdot 0{,}369048 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_a = 88{,}756 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment Nabe: $J_i = \dfrac{1}{2} m_i\left(R_{ia}^2 + R_{ii}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(9 + 4\right) m_i\, r^2$

$$J_i = \frac{1}{2} 13 \cdot m_i\, r^2 = \frac{1}{2} 13 \cdot 0{,}059524 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_i = 0{,}38691 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Zur Berechnung des Massenträgheitsmoments der Speichen kann der Steinersche Satz verwendet werden: $J_{ges} = m\, h^2 + J_S$,

wobei h gleich dem Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt, und J_S dem Massenträgheitsmoment für Drehungen um eine Achse durch den Schwerpunkt entspricht.

Abstand Drehachse – Schwerpunkt: $h = 9\, r$

Massenträgheitsmoment J_S: $J_S = \dfrac{1}{12} m_S\, L^2 = \dfrac{1}{12} m_S\, 12^2 r^2 = 12\, m_S\, r^2$

Massenträgheitsmoment J_{ges} $J_{S,ges} = m_S\, h^2 + J_S = m_S\, 81 r^2 + 12\, m_S\, r^2$

$$J_{S,ges} = 93 m_S\, r^2 = 93 \cdot 0{,}071429 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{S,ges} = 6{,}6429 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment aller acht Speichen:

$$J_{8S,ges} = 8 \cdot 6,6429 \cdot m_{ges}\, r^2 = 53,1432 \cdot m_{ges}\, r^2$$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{Rad,ges} = J_i + J_{8S,ges} + J_a$

$$J_{Rad,ges} = \left(0,38691 + 53,1432 + 88,756\right) \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{Rad,ges} = 142,286 \cdot m_{ges}\, r^2$$

$$J_{Rad,ges} = \frac{142,286}{16^2} \cdot m_{ges}\, r^2 = 0,5558 \cdot m_{ges}\, R^2$$

Lösung: Faktor x: $x = \dfrac{J_{Rad,ges}}{m_{ges}\, R^2} = 0,5558$

X-1d. Dreht man die Hantel senkrecht zur Symmetrieachse, könnte man als sehr einfache Abschätzung zum Beispiel die beiden Kugeln als Massenpunkte im Abstand h betrachten und die Verbindungsstange ignorieren

Abstand Drehachse – Schwerpunkt: $h = 2\,R$

Massenträgheitsmoment für einen Massenpunkte mit Masse m_{ges} im Abstand h von der Drehachse: $J'_{ges} \cong 4\, m_{ges} R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges}\, R^2} = 4$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 4,28$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -6,5\%$

Dreht man die Hantel parallel zur Symmetrieachse, könnte man als einfache Abschätzung zum Beispiel nur die Massenträgheitsmomente der beiden Kugeln mit jeweils der Hälfte der Gesamtmasse addieren.

Massenträgheitsmoment einer Kugel: $J_K = \dfrac{2}{5} m_K\, R^2 = \dfrac{2}{5} \dfrac{m_{ges}}{2} R^2 = \dfrac{1}{5} m_{ges} R^2$

Massenträgheitsmoment von zwei Kugeln : $J'_K \cong \dfrac{2}{5} m_{ges} R^2 = 0,4 \cdot m_{ges} R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges}\, R^2} = 0,4$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 0,389$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -2,8\%$

Das Massenträgheitsmoment des Speichenrad könnte man durch das einer homogene Scheibe mit Masse m_{ges} und Radius R abschätzen.

Homogene Scheibe: $J'_S = \dfrac{1}{2} m_{ges}\, R^2 = 0,5\, m_{ges}\, R^2$

Faktor x Schätzung: $x' \cong \dfrac{J'_{ges}}{m_{ges} R^2} = 0,5$

Faktor x exakt: $x = \dfrac{J_{ges}}{m_{ges} R^2} = 0,5558$

Abweichung: $\dfrac{x' - x}{x} = -10,0\%$

Fazit: Es lohnt also fast immer zunächst eine einfache Abschätzung des Massenträgheitsmoments zu verwenden, bevor die aufwendige Berechnung des korrekten Wertes durchgeführt wird.

X-2a. Betrachtung der Kräfte und Momente:

Der Körper mit der Masse *m* fällt gleichmäßig beschleunigt.

Gleichm. beschleunigte Bewegung: $s = \dfrac{1}{2} a\, t^2$

$$a = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{4m}{25\,s^2} = 0{,}16\, m\, s^{-2}$$

Es wirken auf m die Gewichtskraft F_g und die Seilkraft F_S:

D'Alembertsches Prinzip für m: $\left(\sum_i F_i\right) - m\,a = 0 = \left(F_g - F_S\right) - ma$

Die Seilkraft F_S erzeugt ein Drehmoment am System Rad/Achse:

$$M = F_S \cdot R$$

Das Drehmoment erzeugt eine Winkelbeschleunigung::

$$M = J \cdot \alpha$$

Für Beschleunigung und Winkelbeschleunigung gilt der Zusammenhang:

$$a = R \cdot \alpha$$

Es folgt: $F_S \cdot R = J\, \dfrac{a}{R}$

$$F_S = J\, \frac{a}{R^2}$$

Es folgt: $\left(F_g - F_S\right) - ma = m\left(g - a\right) - \dfrac{J\,a}{R^2} = 0$

$$J = m\,R^2\, \frac{g-a}{a}$$

$$J = 10 \cdot \left(0{,}08\right)^2 \frac{10 - 0{,}16}{0{,}16}\, kg\, m^2 = 3{,}936\, kg\, m^2$$

X-2b. Energieerhaltungssatz: $E_{pot} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot}$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2$$

Es gilt: $\omega = \dfrac{v}{R}$

Einsetzen von ω: $m\,g\,h = \dfrac{1}{2} m v^2 + \dfrac{1}{2} J\, \dfrac{v^2}{R^2}$

Umstellen: $J = \left(2\,m\,g\,h - m\,v^2\right)\dfrac{R^2}{v^2}$

$$J = mR^2\left(\frac{2\,g\,h}{v^2} - 1\right)$$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2$$

und: $v = a\,t$

Einsetzen von *a*: $v = \dfrac{2s}{t^2}t = \dfrac{2s}{t}$

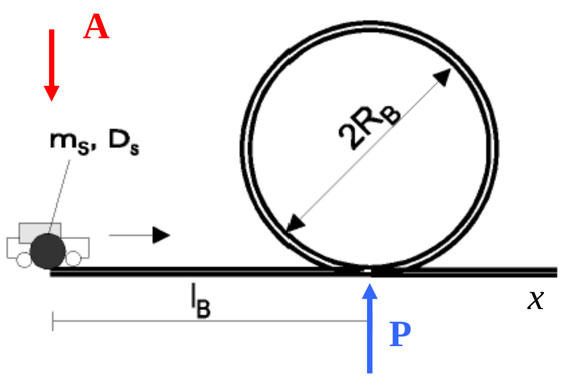
$$J = mR^2\left(\frac{2\,g\,h\,t^2}{4s^2} - 1\right) = mR^2\left(\frac{g\,h\,t^2}{2s^2} - 1\right)$$

$$J = 10\,kg \cdot 0{,}0064\,m^2 \cdot \left(\frac{10\cdot 2\cdot 5^2}{2\cdot 2^2} - 1\right)$$

$$J = 0{,}064\,kg\,m^2 \cdot 61{,}5 = 3{,}936\,kg\,m^2$$

Tutorium Physik I zur Vorlesung Prof. Dr. Schrewe | **XI. Übungsblatt** SS07 | **08.06.2007**

XI-1. Ein Student möchte sein neues Weihnachtsgeschenk, ein Spielzeugauto und eine Loopingbahn testen. Das Auto hat eine Masse von $m_A = 200\,g$ mit Schwungradantrieb (Vollscheibe mit der Masse $m_S = 50\,g$, Durchmesser $D_S = 4\,cm$) und die Loopingbahn besteht aus einer horizontaler Anlaufstrecke der Länge $l_B = 50\,cm$ und einer Loopingschleife mit Radius $R_B = 20\,cm$. Das Schwungrad dient nicht nur als Energiespeicher, sondern auch als Antriebsrad (d. h. die Umfangsgeschwindigkeit des Rades entspricht der Fahrgeschwindigkeit des Autos).



a. Das Auto soll durch die Loopingschleife fahren können. Bestimmen Sie die kleinste Geschwindigkeiten $v_{\min}$, die es im höchsten Punkt der Schleife haben kann, ohne herabzufallen. (Betrachten Sie dazu das Auto näherungsweise als <u>Massenpunkt</u>, der sich <u>reibungsfrei</u> bewegt.)

b. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_P ,die das Auto im Punk (**P**) (Einfahrt in die Loopingschleife) haben muss, um die im Aufgabenteil **a.** genannten Bedingungen zu erfüllen.

c. Skizzieren Sie die Funktion der Normalkraft, die auf das Auto entlang der Fahrtstrecke x wirkt ($x > l_B + \pi \cdot (2R_B)$).Betrachten Sie hierzu die Geschwindigkeit v bei (**P**), insbesondere v_{links} für $x = l_B - \varepsilon$ und v_{rechts} für $x = l_B + \varepsilon$, mit jeweils $\varepsilon \to 0$.

d. Mit welcher Anfangsdrehzahl muss sich das Schwungrad am Anfangspunkt (**A**) der Loopingbahn drehen?

XI-2. Zwei Schwungräder in Form von homogenen Vollzylindern mit den Massen $m_1 = 0{,}8\,kg$ und $m_2 = 1{,}5\,kg$ und dem Radius $R_1 = R_2 = 10\,cm$ haben eine Drehzahl von $n_1 = 900\,\min^{-1}$ und $n_2 = 600\,\min^{-1}$. Die beiden Schwungräder werden gekuppelt. Die Kupplungszeit dauert $\Delta T = 0{,}5\,s$.

a. Welche gemeinsame Drehfrequenz haben die Schwungräder nach dem Kuppeln?

b. Wie groß ist der Drehimpuls der beiden verkuppelten Schwungräder?

c. Berechnen Sie die Veränderung des Drehimpulses vor und nach dem Kupplungsvorgang für beide Schwungräder getrennt. Kommentieren Sie das Ergebnis.

d. Welches Drehmoment hat beim Kupplungsvorgang gewirkt?

e. Betrachten Sie die Energien: Welche Energien hatten die Schwungräder vor, welche Energie haben sie nach der Kupplung?. Gilt der Energieerhaltungssatz? Kommentieren Sie auch dies Ergebnis.

Lösungen:

XI-1a. Die Zentrifugalkraft im höchsten Punkt muss kleiner als die Gewichtskraft sein.

Zentrifugalkraft: $F_{Zf} = m\dfrac{v^2}{R_B}$

Gewichtskraft: $F_g = m\,g$

Es muss gelten: $F_{Zf} = m\dfrac{v^2}{R_B} \geq m\,g = F_g$

Es folgt: $v \geq \sqrt{R_B\,g}$

Minimalgeschwindigkeit: $v_{\min} = \sqrt{R_B\,g} = \sqrt{0{,}2\cdot 10}\,\dfrac{m}{s} = 1{,}414\,\dfrac{m}{s}$

XI-1b. Setzt man die potentielle Energie im tiefsten Punkt der Bahn gleich Null, so besitzt das Auto im Punkt (**P**) nur kinetische Energie, im höchsten Punkt der Bahn sowohl kinetische als auch potentielle Energie.

Energieerhaltungssatz: $E_{ges} = E_{kin}(P) = \dfrac{1}{2}m\,v_P^2 = m\,g\,(2R_B) + \dfrac{1}{2}m\,v_{\min}^2$

$$m\,v_P^2 = 2\cdot m\,g\,(2R_B) + m\,v_{\min}^2$$

Es folgt: $v_P = \sqrt{4\,g\,R_B + v_{\min}^2} = \sqrt{4\cdot 10\cdot 0{,}2 + 2}\,\dfrac{m}{s}$

$$v_P = \sqrt{10}\,\frac{m}{s} = 3{,}162\,\frac{m}{s}$$

XI-1c. Für alle Wegpunkte "links" vom Punkt (**P**), also für $x < l_B$ gilt:

Normalkraft = Gewichtskraft: $F_n = F_g = m\,g$ für $x \leq l_B$

"Rechts" von (**P**) ist die Normalkraft jedoch die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft. Nähert man sich von "rechts" dem Punkt (P), also im Punkt $P+\varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$, so gilt:

$$F_n = F_g + F_{Zf} = m\,g + m\frac{v^2}{R_B} \quad \text{für } l_B \leq x \leq l_B + 2\pi R_B$$

Die Funktion der Normalkraft ist <u>unstetig</u> im Punkt (P).

Den Verlauf der Normalkraftfunktion innerhalb der Loopingschleife kann aus dem Energieerhaltungssatz abgeleitet werden.

$$E_{ges} = E_{kin}(l_B) = E_{kin}(x > l_B) + E_{pot}(x > l_B)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m\,v_P^2 = m\,g\,h(x) + \frac{1}{2}m\,(v(x))^2$$

$$(v(x))^2 = v_P^2 - 2\,g\,h(x) = v_P^2 - 2\,g\,R_B\left(1-\cos\frac{s}{R_B}\right)$$

mit $s =$ Kreisbogenlänge: $s = x - l_B$

Zentrifugalkraft: $F_{Zf}(x) = \dfrac{m\,v_P^2}{R_B} - 2\,m\,g\left(1-\cos\dfrac{x-l_B}{R_B}\right)$

Normalkomponente von F_g: $F_{ng} = m\,g\cos\dfrac{x-l_B}{R_B}$

Die Geschwindigkeit im Punkt (**P**) war $v_P = \sqrt{4\,g\,R_B + v_{\min}^2}$ (siehe **XI-1b.**)

Es folgt mit Lösung **XI-1a.**: $v_P^2 = 4\,g\,R_B + v_{\min}^2 = 4g\,R_B + g\,R_B = 5\,g\,R_B$

Die Funktion der Normalkraft $F_n(x)$ kann in Einheiten der Gewichtskraft ausgedrückt werden:

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \frac{F_{ng}(x)}{m\,g} + \frac{F_{Zf}(x)}{m\,g}$$

Einsetzen:

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \frac{m\,g\cos\frac{x-l_B}{R_B}}{m\,g} + \frac{\frac{m\,v_P^2}{R_B} - 2\,m\,g\left(1-\cos\frac{x-l_B}{R_B}\right)}{mg}$$

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = \cos\frac{x-l_B}{R_B} + 5 - 2\left(1-\cos\frac{x-l_B}{R_B}\right)$$

$$\frac{F_n(x)}{F_g} = 3 + \cos\frac{x-l_B}{R_B} + 2\cdot\cos\frac{x-l_B}{R_B}$$

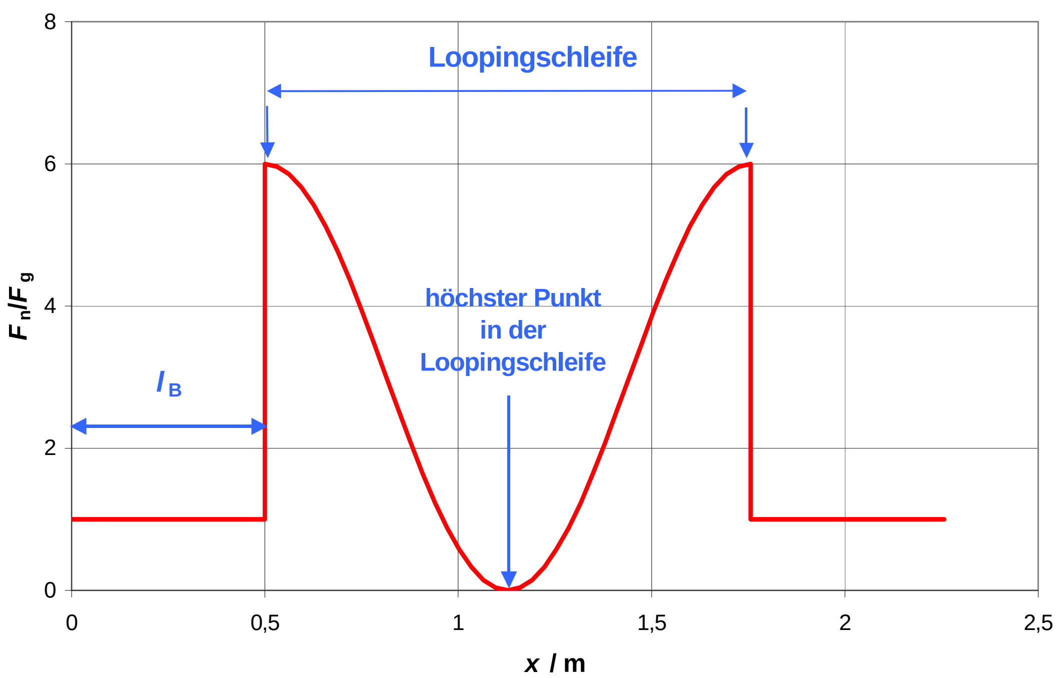
$$\frac{F_n(x)}{F_g} = 3\left(1+\cos\frac{x-l_B}{R_B}\right)$$

Lösung:

Für $0 < x < l_B$: $\frac{F_n(x)}{F_g} = 1$

für $l_B < x < l_B + 2\pi\,R_B$: $\frac{F_n(x)}{F_g} = 3\left(1+\cos\frac{x-l_B}{R_B}\right)$

für $x > l_B + 2\pi\,R_B$: $\frac{F_n(x)}{F_g} = 1$



XI-1d. Die kinetische Energie im Anfangspunkt (**A**) ist gleich der kinetischen Energie im Punkt (**P**), weil keine Reibungsarbeit aufgebracht werden muss.

$$E_{kin}(A) = E_{kin}(P)$$

Aus **VIIIb.** folgt für die Fahrgeschwindigkeit des Autos:

$$v_A = v_P = \sqrt{10}\,\frac{m}{s} = 3{,}162\,\frac{m}{s}$$

Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades:

$$v_U = \pi \cdot D_S \cdot n_S$$

wobei n_S die Anfangsdrehzahl des Schwungrades bezeichnet.

Es soll gelten: $v_U = v_A$

Lösung: $$n_S = \frac{v_A}{\pi\, D_S} = \frac{\sqrt{10}}{\pi \cdot 0{,}04}\, s^{-1} = 25{,}2\, s^{-1}$$

XI-2a. Die beiden Schwungräder haben Drehimpuls.

Die Radien sind gleich: $R = R_1 = R_2$

Schwungrad (1): $$L_1 = J_1\,\omega_1 = J_1\, 2\pi\, n_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2\, 2\pi\, n_1$$

$$L_1 = m_1\, R^2 \pi\, n_1$$

Schwungrad (2): $$L_2 = m_2\, R^2 \pi\, n_2$$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L' = L_1 + L_2$$

Es gilt: $$L' = (J_1 + J_2)\,\omega_{gem} = (J_1 + J_2)\, 2\pi\, n_{gem}$$

$$n_{gem} = \frac{L'}{2\pi (J_1 + J_2)} = \frac{L'}{\pi (m_1 + m_2) R^2}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1\, n_1 + m_2\, n_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}8 \cdot 900 + 1{,}5 \cdot 600)\,\mathrm{min}^{-1}}{0{,}8 + 1{,}5}$$

$$n_{gem} = \frac{m_1\, n_1 + m_2\, n_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}8 \cdot 900 + 1{,}5 \cdot 600)\,\mathrm{min}^{-1}}{0{,}8 + 1{,}5}$$

$$n_{gem} = 704\,\mathrm{min}^{-1}$$

XI-2b. Drehimpuls des Schwungrades (1): $L_1 = m_1\, R^2 \pi\, n_1 = 0{,}8\,kg \cdot 0{,}01\, m^2 \cdot \pi \cdot \frac{900}{60\,s}$

$$L_1 = 0{,}377\,\frac{kg\, m^2}{s}$$

Schwungrad (2): $$L_2 = m_2\, R^2 \pi\, n_2 = 1{,}5\,kg \cdot 0{,}01 m^2 \cdot \pi \cdot \frac{600}{60\,s}$$

$$L_2 = 0{,}471\,\frac{kg\, m^2}{s}$$

Bei dem Kupplungsvorgang bleibt die Summe der Drehimpulse konstant:

$$L' = L_1 + L_2 = (0{,}377 + 0{,}471)\,\frac{kg\, m^2}{s}$$

$$L' = 0{,}848 \frac{kg\, m^2}{s}$$

Probe: $L' = L_1 + L_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, 2\pi\, n_{gem}$

$$L' = \frac{1}{2}(0{,}8 + 1{,}5)\, kg \cdot 0{,}01 m^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{704}{60\, s}$$

$$L' = 0{,}848 \frac{kg\, m^2}{s}$$

XI-2c. Änderung des Drehimpulses (1): $\Delta L_1 = 2\pi\, J_1 \left(n_{gem} - n_1\right)$

$$\Delta L_1 = 2\pi\, J_1 \left(n_{gem} - n_1\right) = \pi \cdot m_1\, R^2 \left(-\frac{196}{60\, s}\right)$$

$$\Delta L_1 = \pi \cdot m_1\, R^2 \left(-\frac{196}{60\, s}\right) = -0{,}082 \frac{kg\, m^2}{s}$$

Änderung des Drehimpulses (1): $\Delta L_2 = 2\pi\, J_2 \left(n_{gem} - n_2\right)$

$$\Delta L_2 = 2\pi\, J_2 \left(n_{gem} - n_2\right) = \pi \cdot m_2\, R^2 \left(-\frac{104}{60\, s}\right)$$

$$\Delta L_2 = \pi \cdot m_2\, R^2 \left(-\frac{104}{60\, s}\right) = +0{,}082 \frac{kg\, m^2}{s}$$

Verringerung der Drehimpulses (1) ist gleich der Vergrößerung des Drehimpulses (2).

XI-2d. Drehmoment: $M = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0{,}082\, kg\, m^2}{0{,}5\, s^2} = 0{,}164\, Nm$

XI-2e. Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = \frac{1}{2} J_1\, \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 R^2\right) 4\pi^2\, n_1^2$

Energie Schwungrad (1) $E_{kin,1}^{rot} = m_1 R^2 \pi^2\, n_1^2 = 17{,}765\, J$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,2}^{rot} = \frac{1}{2} J_2\, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_2 R^2\right) 4\pi^2\, n_2^2$

Energie Schwungrad (2) $E_{kin,1}^{rot} = m_2 R^2 \pi^2\, n_2^2 = 14{,}804\, J$

Rotationsenergie nach Kupplung: $E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\, \omega_{gem}^2$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(m_1 + m_2) R^2\right) 4\pi^2\, n_{gem}^2$$

$$E_{kin,1+2}^{rot} = (m_1 + m_2) R^2 \pi^2\, n_{gem}^2 = 31{,}251\, J$$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges} = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} = E_{kin,1+2}^{rot} + Q$

Energieverlust: $Q = E_{kin,1}^{rot} + E_{kin,1}^{rot} - E_{kin,1+2}^{rot}$

$$Q = (17{,}765 + 14{,}804 - 31{,}251)\, J = 1{,}318\, J$$

Relativer Energieverlust: $\frac{Q}{E_{ges}} = \frac{1{,}318}{32{,}569} = 0{,}040 \approx 4\%$

Die Rotationsenergien vor und nach dem Kupplungsvorgang sind <u>nicht gleich</u>. Der Energieverlust beträgt 4%.