KINEMATIK

Translation

Verschiebung: $\vec{s}$

Geschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$

Gleichförmige Geschwindigkeit

$\vec{s} = \vec{v} \cdot t \qquad \vec{v} = const. \qquad \vec{a} = 0$

Gleichförmige Beschleunigung

$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \qquad \vec{v} = \vec{a} \cdot t \qquad \vec{a} = const.$

Rotation

Drehwinkel: $\vec{\varphi}$

Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Winkelbeschleunigung: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$

Gleichförmige Winkelgeschwindigkeit

$\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot t \qquad \vec{\omega} = const. \qquad \vec{\alpha} = 0$

Gleichförmige Winkelbeschleunigung

$\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} \cdot t^2 \qquad \vec{\omega} = \vec{\alpha} \cdot t \qquad \vec{\alpha} = const.$

Drehzahl: $n = \frac{dN}{dt}$

Umdrehungszeit: $T = \frac{1}{n}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot n$

Bahngeschwindigkeit: $v = \frac{2\pi\, r}{T} = 2\pi\, r\, n$

Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \frac{v^2}{r} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r$

Bahngröße = Radius · Winkelgröße: $s = r \cdot \varphi \qquad v = r \cdot \omega \qquad a = r \cdot \alpha$

Zerlegung einer beliebigen Beschleunigung in die Tangential- ($\vec{T}$) - und die Normalkomponente ($\vec{N}$)

$a_T = \frac{dv_T}{dt} \qquad a_N = \frac{dv_N}{dt} \qquad \vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$

$a_T = \frac{v_x}{v} \cdot a_x + \frac{v_y}{v} \cdot a_y + \frac{v_z}{v} \cdot a_z \qquad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$

DYNAMIK

Translation

Masse: m

Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Arbeit: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$

Bewegungsenergie: $E_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2$

Rotation

Trägheitsmoment: $J = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 \cdot dm$

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J \cdot \vec{\omega}$

Arbeit: $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$

$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{M}\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M}\,\vec{\omega}$

Bewegungsenergie: $E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \vec{\omega}^2$

Feder- Drehfederkräfte, elastische Verformungsarbeit

Translation		Rotation	
Federkonstante:	D	Winkelrichtgröße:	D^*
Federkraft:	$\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$	Drehfedermoment:	$\vec{M} = -D^* \cdot \vec{\varphi}$
Verformungsarbeit:	$W_{el} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$	Verformungsarbeit:	$W_{el} = \frac{1}{2} D^* \cdot \varphi^2$

Reibungskräfte, Reibungsarbeit

Haftreibungszahl: μ_H Gleitreibungszahl: μ_G Rollreibungszahl: μ_R

Haftreibungskraft: $F_{H,\max} = \mu_H \cdot F_N$

Gleitreibungskraft: $F_G = \mu_G \cdot F_N$ Gleitreibungsarbeit: $W_G = F_G \cdot s = \mu_G \cdot F_N \cdot s$

Rollreibungskraft: $F_R = \mu_R \cdot F_N$ Rollreibungsarbeit: $W_R = F_R \cdot s = \mu_R \cdot F_N \cdot s$

Gravitationskräfte, potentielle Energie im Gravitationsfeld

Gravitationskonstante: $G = 6{,}672\,59(85)\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$

Gravitationskraft: $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ potentielle Energie: $E(r) = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Masse der Erde: M_E Erdradius: R_E Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

Gewichtskraft: $F_g = m \cdot \left(G \cdot \frac{M_E}{R_E^2} \right) = m \cdot g$ potentielle Energie: $E(h) = m \cdot g \cdot h$

Erhaltungssätze

Ohne äußere Kräfte: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ gilt **Impulserhaltung**: $\sum_i \vec{p}_i = 0$

Ohne äußere Drehmomente: $\sum_i \vec{M}_i = 0$ gilt **Drehimpulserhaltung**: $\sum_i \vec{L}_i = 0$

Bei **konservativen Kräften** gilt (mechanische) **Energieerhaltung**: $E_{ges} = E_{pot} + E_{trans}^{kin} + E_{rot}^{kin}$

Bei **nicht-konservativen Kräften** (z.B. Reibung) gilt **keine** (mechanische) **Energieerhaltung**:
(ein Teil der mechanischen Energie wird z. B. in Wärme oder Verformungsenergie, Q, umgewandelt):

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{trans}^{kin} + E_{rot}^{kin} + Q$$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{E_{ges} - Q}{E_{ges}} = \frac{W_{nutz}}{E_{ges}}$

Gleiten, Rotieren, Rollen

Gleiten: $\vec{v}(-\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_S$ Geschwindigkeit des Schwerpunktes: $\vec{v}_S$

Rotieren: $\vec{v}(-\vec{r}) = -\vec{v}(\vec{r})$ Geschwindigkeit des Schwerpunktes: $\vec{v}_S = 0$

Rollen: $\vec{v}_{Kontakt} = 0$ Geschwindigkeit des Schwerpunktes:
$\vec{v}_S = \vec{r} \cdot \vec{\omega}$

Verschiebung des Schwerpunktes: $\vec{s}_S = \vec{r} \cdot \vec{\varphi}$

Beschleunigung des Schwerpunktes: $\vec{a}_S = \vec{r} \cdot \vec{\alpha}$

ANWENDUNGEN

Trägheitsmomente

Wird ein Körper der Masse m um eine Achse gedreht, deren Abstand zum Schwerpunkt S gleich h ist, gilt:

$$J_{ges} = m \cdot h^2 + J_S \,,$$

wobei J_S das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes bezeichnet (**Steinerscher Satz**).
Trägheitsmoment geometrischer Körper: $J = k \cdot m \cdot r^2$
Hohlzylinder (Ring): $k = 1$; Vollzylinder (Scheibe): $k = 1/2$; Vollkugel: $k = 2/5$; Hohlkugel: $k = 1/3$;
dünner Stab: Drehpunkt Mitte $k = 1/12$, Drehpunkt Ende: $k = 1/3$;
Trägheitsmoment flacher Körper (Ausdehnung in x- und y-Richtung): $J_z = J_x + J_y$

Trägheitskräfte im beschleunigten Bezugssystem

D'Alembertsches Prinzip: $\vec{F}_{tr} = -m\,\vec{a}$

Zentrifugalkraft: $\vec{F} = -m\dfrac{v^2}{r}$ Corioliskraft: $\vec{F} = -2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_r$

Raketengleichung

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$: $\vec{v}_0$ Masse zum Zeitpunkt $t = 0$: m_0
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $\vec{v}(t)$ Masse zum Zeitpunkt t: $m(t)$
Ausströmungsgeschwindigkeit: $\vec{u}_{aus}$

Geschwindigkeit der Rakete: $\vec{v}(t) = -\vec{u}_{aus} \cdot \ln\dfrac{m_0}{m(t)} + \vec{v}_0$

Zentraler elastischer Stoß

Vor dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{v}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{v}_2$.
Nach dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{u}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{u}_2$.

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 \qquad \vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2$$

Zentraler vollkommen unelastischer Stoß:

Vor dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{v}_1$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{v}_2$.
Nach dem Stoß: Geschwindigkeit der Masse m_1 ist $\vec{u}$, Geschwindigkeit der Masse m_2 ist $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2$$

Verformungsarbeit beim vollkommen unelastischen Stoß: ΔW_Q

$$\Delta W_Q = \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \cdot \vec{v}_2^{\,2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \vec{u}^{\,2}$$

$$\Delta W_Q = E_{kin}^1 \cdot \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) + E_{kin}^2 \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) - \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 + m_2}$$

MECHANIK DEFORMIERBARER KÖRPER

Allgemeine Größen

Dichte:	$\rho = \frac{m}{V}$	Druck:	$p = \frac{F}{A}$
Kompressionsmodul:	$K = \frac{\Delta p}{-\Delta V/V}$	Kompressibilität (Flüssigkeit):	$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{-\Delta V/V}{\Delta p}$

Feste Körper

Zugspannung:	$\sigma = \frac{F}{A}$	Scherspannung:	$\tau = \frac{F_S}{A}$
Dehnung:	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	Scherung:	$\gamma = \frac{\Delta x}{l}$
Elastizitätsmodul:	$E = \frac{F/A}{\Delta l/l}$	Schub-oder Torsionsmodul:	$G = \frac{F_S/A}{\Delta x/l}$
Hooksches Gesetz:	$\sigma = E \cdot \varepsilon$	Scherungsgesetz:	$\tau = G \cdot \gamma$

Flüssigkeiten

Druck durch Säule h:	$p(h) = \rho\, g\, h + p_0$	Auftrieb:	$F_a = V \rho\, g$
Oberflächenspannung:	$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F}{2l}$	Steighöhe in der Kapillare:	$h = \frac{2\gamma \cdot \cos \Theta_K}{\rho\, r\, g}$
Innendruck einer Kugel:	$p = \frac{2\gamma}{r}$	Innendruck der Seifenblase:	$p = \frac{4\gamma}{r}$

Gase

Gesetz von Boyle-Mariotte:	$p \cdot V = const.$	Gesetz von Gay-Lussac:	$p(T) = \frac{C}{V} \cdot T$
Allgem. Gasgesetz:	$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	alternativ:	$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot N_A \cdot T$
Anzahl der Mole:	n	Gaskonstanste:	$R = 8{,}314\,510\,(70)\; J\, mol^{-1}\, K^{-1}$
Boltzmann-Konst.:	$k_B = 1{,}380\,658\,(12)\,10^{-23}\; J\, K^{-1}$	Avogadro-Konst.:	$N_A = 6{,}0221367(36)\,10^{23}\, mol^{-1}$

Gaskonstante = Boltzmann-Konst. · Avogadro-Konst. $R = k_B \cdot N_A$

Kompressibilität (Gase) $\kappa = \frac{1}{p}$

Barometrische Höhenformel: $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7{,}988 km}}$

Strömende Flüssigkeiten (und Gase)

Kontinuitätsgleichung:	$Q = \dot{V} = v \cdot A = const.$
Bernoulli-Gleichung:	$p + \rho \cdot g \cdot y + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = const.$
Gesetz von Torricelli: Wenn v konstant ist, gilt:	$p(y) - p(y_0) = \rho \cdot g \cdot (y - y_0)$
Viskosität (η): (A = Fläche, z = Schichtdicke)	$F = \eta \cdot \frac{v \cdot A}{z}.$
Hagen-Poiseuillesches Gesetz:	$Q = \dot{V} = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot r^4}{8\eta l}.$

SCHWINGUNGEN

Allgemeine Größen

Ungedämpfter Oszillator:	Eigenkreisfrequenz:	ω_0	Eigenfrequenz:	f_0
Gedämpfter Oszillator :	Eigenkreisfrequenz:	ω_e	Eigenfrequenz:	f_e
Periodische Erregung:	Erregerkreisfrequenz:	ω_a	Erregerfrequez:	f_a

Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

Ungedämpfte Schwingung

Harmonische Differentialgleichung:	$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$	**Lösung**:	$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0\, t + \delta)$
Federpendel:	$m\,\ddot{x} + D\,x = 0$	Eigenkreisfrequenz:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Drehpendel:	$J\,\ddot{\varphi} + D^*\,\varphi = 0$	Eigenkreisfrequenz:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$
Mathematisches Pendel:	$l\,\ddot{s} + g\,s = 0$	Eigenkreisfrequenz:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physikalisches Pendel:	$J\,\ddot{\varphi} + mgd\,\varphi = 0$	Eigenkreisfrequenz:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$

Energieerhaltung (Federpendel): $E_{ges} = const. = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = E_{kin}^{\max} = E_{pot}^{\max} = \frac{1}{2} m\, v_{\max}^2 = \frac{1}{2} D\, x_{\max}^2$

Kinetische Energie: $E_{kin}(t) = E_{ges} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \delta)$

Potentielle Energie: $E_{pot}(t) = E_{ges} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \delta)$

Energiemittelwerte: $\langle E_{kin} \rangle = \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2} E_{ges}$

Gedämpfte Schwingung (Geschwindigkeitsabhängige Dämpfung)

Differentialgleichung:	$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$	Abklingkonstante:	β
Charakteristische Gleichung für λ:	$\lambda^2 + 2\beta\,\lambda + \omega_0^2 = 0$	beim Federpendel:	$\beta = \frac{b}{2m}$

Schwingfall: **Bedingung**: $\beta^2 < \omega_0^2$ **Lösung**: $\lambda = -\beta \pm i \cdot \omega_e$ $\quad \omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e\, t) + \cos(\omega_e\, t)\right)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot e^{-\beta t}\, \frac{\omega_0^2}{\omega_e} \cdot \sin(\omega_e\, t)$$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_e} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_e\, t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cdot e^{-\beta t}\left(\cos(\omega_e\, t) - \frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e\, t)\right)$$

Aperiodischer Grenzfall: **Bedingung**: $\beta^2 = \omega_0^2$ **Lösung**: $\lambda = -\beta$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot (1 + \beta t)$$
$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \beta^2 \cdot t$$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$:

$$x(t) = \dot{x}_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$
$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot (1 - \beta\, t)$$

Kriechfall: **Bedingung**: $\beta^2 > \omega_0^2$ **Lösung**: $\lambda = -\beta \pm i \cdot \gamma$ $\gamma^2 = \beta^2 - \omega_0^2$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}\left(\frac{\beta+\gamma}{2\gamma} e^{+\gamma t} - \frac{\beta-\gamma}{2\gamma} e^{-\gamma t}\right)$$
$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot e^{-\beta t} \frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma} \cdot \left(e^{+\gamma t} - e^{-\gamma t}\right)$$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{2\gamma} \cdot e^{-\beta t} \cdot \left(e^{+\gamma t} - e^{-\gamma t}\right)$$
$$\dot{x}(t) = -\dot{x}_0 \cdot e^{-\beta t}\left(\frac{\beta-\gamma}{2\gamma} e^{+\gamma t} - \frac{\beta+\gamma}{2\gamma} e^{-\gamma t}\right)$$

Gedämpfte Schwingung (Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung)

Differentialgleichung: $m\ddot{x} \pm \mu F_N + D x = 0$

Fallunterscheidung: $\mu F_N = D \cdot a$ $m\ddot{x} + D(x+a) = 0$ für: $\dot{x} > 0$

$\mu F_N = -D \cdot a$ $m\ddot{x} + D(x-a) = 0$ für: $\dot{x} < 0$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$

Lösung (für $0 < \omega t < 2\pi$ **)**: $x(t) = (x_0 - a) \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + a$ für: $\dot{x} < 0$

$x(t) = (x_0 + a) \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) - a$ für: $\dot{x} > 0$

Amplitudenabnahme: $x(\pi) - x(0) = 2a$ $x(2\pi) - x(\pi) = 2a$ $x(2\pi) - x(0) = 4a$

Erzwungene Schwingung mit sin-förmiger Erregung

Differentialgleichung: Beispiel: Federpendel mit periodischer Kraft: $F(t) = F_a \cdot \sin(\omega_a t)$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + D x = F_a \cdot \sin(\omega_a t)$$

Mit: $\beta = \frac{b}{2m}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $f_a = \frac{F_a}{m}$ folgt:

Charakteristische Gleichung für komplexe λ: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = f_a \cdot \sin(\omega_a t)$

Komplexe Lösung: $\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right) \cdot |z_0| + i\, 2\beta\omega_a \cdot |z_0| = f_a \cdot e^{i\varphi_0}$

Amplitude: $$x_0(\omega_a, \omega_0, \beta) = \frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 + (2\beta\omega_a)^2}}$$

Phasenverschiebung: $$\varphi_0(\omega_a, \omega_0, \beta) = \arctan\frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}$$

Amplitudenverstärkung

Bei kleiner Dämpfung: $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0$ tritt eine Amplitudenverstärkung auf.

Die **Resonanzfrequenz** ω_R ist der Wert von ω_a, bei dem die Amplitudenüberhöhung maximal wird:

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\,\beta^2$$

Die **Resonanzamplitude** ist:

$$x_0^{\max} = x_0\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right) = \frac{f_a}{\sqrt{4\,\beta^2\,\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_a}{2\,\omega_0^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$$

Die **Amplitudenüberhöhung** ist:

$$\frac{x_0^{\max}}{x_{00}} = \frac{x_0\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)}{x_0\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right)} = \frac{0{,}5}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$$

Gekoppelte Schwingungen

Harmonische Differentialgleichungen mit Koppelung:

$$J\,\varphi_1 + D^*\,\varphi_1 + D^+\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$$
$$J\,\varphi_2 + D^*\,\varphi_2 - D^+\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$$

Gleichsinnige Schwingung: Differentialgleichung für $\varphi_1 + \varphi_2$: $J\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + D^*\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = 0$

Eigenkreisfrequenz ω_0: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$

Gegensinnige Schwingung: Differentialgleichung für $\varphi_1 - \varphi_2$ $J\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \left(D^* + 2D^+\right)\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$

Eigenkreisfrequenz: ω_1: $\omega_1 = \sqrt{\frac{D^* + 2D^+}{J}}$

Für die **Anfangsamplituden**: $\varphi_1(t=0) = \varphi_2(t=0) = 0$ gilt:

Amplitude: $\varphi_1 = a\sin(\omega_0\,t) + a'\sin(\omega_1\,t)$ Geschwindigkeit: $\dot\varphi_1 = a\,\omega_0\cos(\omega_0\,t) + a'\,\omega_1\cos(\omega_1\,t)$

$\varphi_2 = a\sin(\omega_0\,t) - a'\sin(\omega_1\,t)$ $\dot\varphi_2 = a\,\omega_0\cos(\omega_0\,t) - a'\,\omega_1\cos(\omega_1\,t)$

Für **gleichsinnige Schwingung** mit Anfangsgeschwindigkeiten: $\dot\varphi_1(t=0) = \dot\varphi_2(t=0) = \dot\varphi_0$ gilt:

Amplitude: $\varphi_1 = \frac{\dot\varphi_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0\,t)$ Geschwindigkeit: $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_0\cos(\omega_0\,t)$

$\varphi_2 = \frac{\dot\varphi_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0\,t)$ $\dot\varphi_2 = \dot\varphi_0\cos(\omega_0\,t)$

Für **gegensinnige Schwingung** mit Anfangsgeschwindigkeiten: $\dot\varphi_1(t=0) = -\dot\varphi_2(t=0) = \dot\varphi_0$ gilt:

Amplitude: $\varphi_1 = \frac{\dot\varphi_0}{\omega_1}\cdot\sin(\omega_1\,t)$ Geschwindigkeit: $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_0\cos(\omega_1\,t)$

$\varphi_2 = -\frac{\dot\varphi_0}{\omega_1}\cdot\sin(\omega_1\,t)$ $\dot\varphi_2 = -\dot\varphi_0\cos(\omega_1\,t)$

Für **Schwebungsschwingungen**
mit Anfangsgeschwindigkeiten: $\dot{\varphi}_1(t=0)=\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\varphi}_2(t=0)=0$ gilt:

Amplituden (Näherungslösung):

$$\varphi_1 \cong \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1}\cdot\left(\sin\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right) \qquad \varphi_2 \cong \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1}\cdot\left(\cos\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)$$

Geschwindigkeiten:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0\cdot\left(\cos\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right) \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_0\cdot\left(\sin\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)$$

Wellen

Wellen:

Wellenfunktion einer nach rechts laufenden Welle: $y(x,t)=y_1(x-vt)$

Wellenfunktion einer nach links laufenden Welle: $y(x,t)=y_1(x+vt)$

Gesamtwellenfunktion: $y(x,t)=y_1(x-vt)+y_2(x+vt)$

Harmonische Welle: $y(x,t)=A\cdot\sin(k\,x-\omega\,t)$

Übertragene Leistung durch harmonische Welle: $P=\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$

Interferenz: $y_1=A\sin(k\,x-\omega\,t)$ u. $y_2=A\sin(k\,x-\omega\,t+\delta)$: $y_1+y_2=2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(k\,x-\omega\,t+\frac{\delta}{2})$

Stehende Wellen: Für die Randbedingungen: $y_n(x=0)=0$ und $y_n(x=l)=0$ folgt:

$k_n l=\frac{2\pi}{\lambda_n}\cdot l=n\cdot\pi$ oder: $\lambda_n=\frac{2l}{n}$ Wellenfunktionen: $y_n(x,t)=2A_n\cos(\omega_n\,t)\cdot\sin(k_n\,x)$

Wellengleichung: $\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\frac{\mu}{F}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial t^2}$ oder: $\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial t^2}$ Geschwindigkeit: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

Formelzeichen und Einheiten

A	Fläche	$1\ m^2$
A	Amplitude	$1\ m$
b	Reibungskonstante	$1\ kg\ s^{-1}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$1\ m\ s^{-2}$
D	Federkonstante	$1\ N\ m^{-1}$
D^*	Winkelrichtgröße	$1\ kg\ m^2\ s^{-2}$
D^+	Koppelungskonstante	$1\ N\ m^{-1}$
E	Elastizitätsmodul	$1\ N\ m^{-2}$
E	Energie	$1\ J = 1\ N\ m = 1\ kg\ m^2\ s^{-2}$
$\vec{F}$	Kraft	$1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-2}$
f	Frequenz	$1\ s^{-1}$
g	Erdbeschleunigung	$9{,}81\ m\ s^{-2}$
G	Torsionsmodul	$1\ N\ m^{-2}$
G	Gravitationskonstante	$6{,}672\ 59(85)\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
J	Trägheitsmoment	$1\ kg\ m^2$
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Wellenzahl	$1\ m^{-1}$
k_B	Boltzmann-Konstante	$1{,}380\ 658(12)\ 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
$\vec{L}$	Drehimpuls	$1\ kg\ m^2\ s^{-1}$
m	Masse	$1\ kg$
$\vec{M}$	Drehmoment	$1\ kg\ m^2\ s^{-2}$
n	Drehzahl	$1\ s^{-1}$
N	Zahl der Umdrehungen	1
N_A	Avogadro-Konstante	$6{,}022\ 1367(36)\ 10^{23}\ mol^{-1}$
$\vec{p}$	Impuls	$1\ kg\ m\ s^{-1}$
p	Druck	$1\ Pa = 1\ N/m^2$
P	Leistung	$1\ J\ s^{-1} = 1\ N\ m\ s^{-1} = 1\ kg\ m^2\ s^{-3}$
Q	Wärmeenergie	$1\ J = 1\ N\ m = 1\ kg\ m^2\ s^{-2}$
$Q = \dot{V}$	Volumenstrom	$1\ m^3\ s^{-1}$
R	allgemeine Gaskonstante	$8{,}314\ 510(70)\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$
r oder R	Radius	$1\ m$

$\vec{s}$	Verschiebung	1 m
t	Zeit	1 s
T	Umdrehungszeit oder Schwingungsdauer	1 s
T	Temperatur	1 K (0 K = - 273,15°C)
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	1 m s^{-1}
W	Arbeit	1 J = 1 N m = 1 kg m^{2} s^{-2}
$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung	1 s^{-2}
β	Abklingkonstante	1 s^{-1}
δ	Phasenkonstante	1
ε	Dehnung	1
γ	Scherung	1
γ (oder σ)	Oberflächenspannung	1 J m^{-2} = 1 N m^{-1} = 1 kg s^{-2}
K	Kompressionsmodul	1 Pa = 1 N m^{-2} = 1 kg m^{-1} s^{-2}
κ	Kompressibilität	1 Pa^{-1}= 1 m^{2} N^{-1} = 1 m s^{2} kg^{-1}
η	Wirkungsgrad	1
η	Viskosität	1 Pa s = 1 kg s^{-1} m^{-1}
μ_H	Haftreibungszahl	1
μ_G	Gleitreibungszahl	1
μ_R	Rollreibungszahl	1
μ	Massenbelegung	1 kg m^{-1}
ρ	Dichte	1 kg m^{-3}
σ	Zugspannung	1 N m^{-2} = 1 kg m^{-1} s^{-2}
τ	Scherspannung	1 N m^{-2} = 1 kg m^{-1} s^{-2}
$\vec{\varphi}$	Drehwinkel	1 (Umrechnung: 360° = 2π)
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit (allgemein)	1 s^{-1}
ω_0	Eigenkreisfrequenz **ohne** Dämpfung	1 s^{-1}
$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	Eigenkreisfrequenz **mit** Dämpfung	1 s^{-1}
ω_a	Erregerkreisfrequenz	1 s^{-1}
$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Resonanzfrequenz	1 s^{-1}