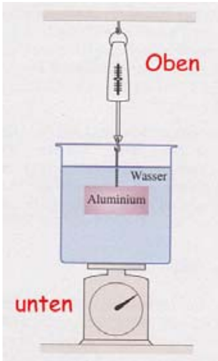
Fachhochschule Hannover | M2A/M2B | 18.06.2005
Fachbereich Maschinenbau | | Zeit: 90 min
Fach: Physik II im SS05 | | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

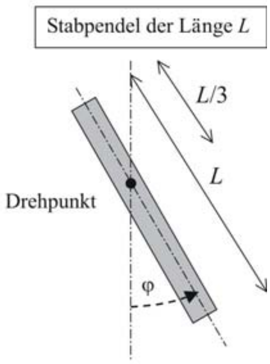
1.a. Wie ändert sich der Druck mit der Wassertiefe, welche Beziehung gilt für den Druck in der Atmosphäre?
b. Skizzieren Sie den Druckverlauf in Wasser als Funktion der Tiefe und in der Atmosphäre als Funktion der Höhe (mit Zahlenangaben für die Druckwerte, von -30 m in Wasser bis 16500 m in der Atmosphäre).

2. Das Element Aluminium hat eine Dichte von $\rho_{Al} = 2,698\, g\, cm^{-3}$ und ein relatives Atomgewicht von $A_r = 26,98\, g\, mol^{-1}$. Mit Hilfe der Avogadro-Konstante $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$ kann aus diesen Angaben eine Abschätzung für den Radius eines Aluminiumatoms gewonnen werden. Wie groß ist ein Al-Atom in etwa?

3. Ein Becher der Masse $m_B = 1\, kg$ sei mit Wasser $m_W = 2\, kg$ gefüllt und stehe auf einer Waage (*unten*). Ein Aluminiumblock der Masse $m_{Al} = 2\, kg$ und der Dichte $\rho_{Al} = 2,698\, g\, cm^{-3}$ sei an einer Federwaage (*oben*) aufgehängt und tauche vollständig in das Wasser ein. (Siehe Abbildung rechts) Welche Anzeigen haben die beiden Waagen *oben* und *unten*?



4. Für ein Stabpendel, ein homogener dünner Stab der Länge *L*, dessen Drehpunkt $L/3$ vom oberen Ende entfernt ist, wird eine Schwingungsdauer von 2,00 s gemessen. Das Pendel schwingt gedämpft, während jeder Schwingungsperiode verringert sich die Amplitude um 30%.
a. Bestimme die Eigen(kreis-)frequenz ω_e der gedämpften Schwingung.
b. Bestimme die Abklingkonstante β.
c. Bestimme die Eigen(kreis-)frequenz ω_0 und die Eigenfrequenz f_0 der ungedämpften Schwingung.
d. Bestimme die Formel für das Massenträgheitsmoment J_{Stab} des Pendels.
e. Berechne die Pendellänge *L*.
f. Berechne für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = 20°$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ die Zeit, nach der das Amplitudenmaximum auf weniger als als 1° abgeklungen ist.



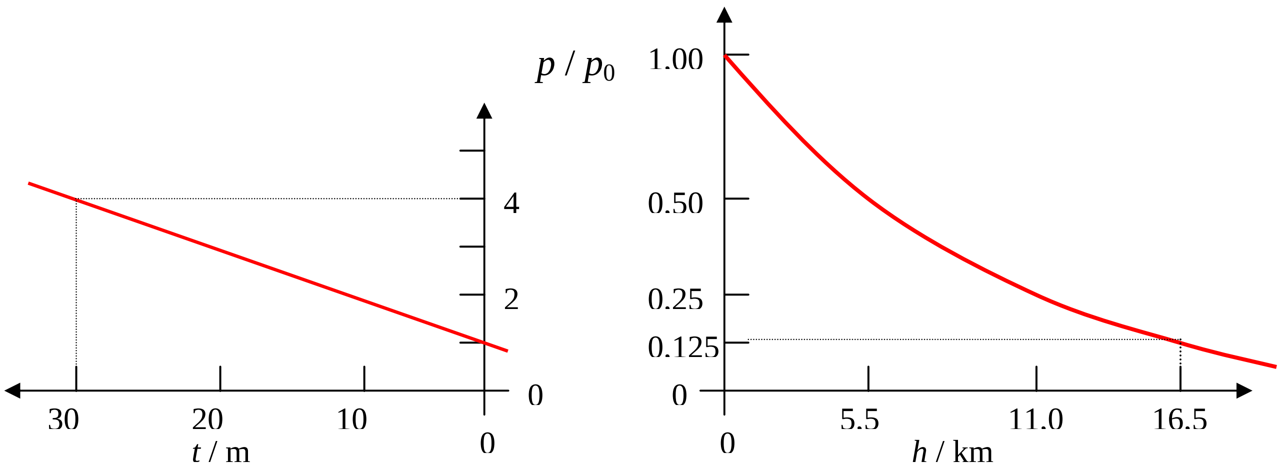
5. Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:
a. Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$
b. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung!
c. Skizzieren Sie den Winkel δ der Phasenverschiebung als Funktion von ω_a/ω_0.

6. Ein Drehpendel besteht aus einer Spiralfeder mit der Winkelrichtgröße $D^* = 0,12\, N\, m$ und einer zylindrischen Scheibe der Masse $m_S = 0,5\, kg$ mit Radius $R_s = 0,15\, m$. Es wird durch das äußere Drehmoment $M(t) = (0,2 Nm) \cdot \sin(\omega_a t)$ angeregt und bei der (Kreis-)Frequenz $\omega_a = \omega_R = 3\, s^{-1}$ zur Resonanz gebracht.
a. Wie groß ist die Eigen(kreis-)frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung und wie groß ist die Abklingkonstante β?
b. Wie groß ist das Amplitudenmaximum bei der Resonanzbedingung?
Lösungen:

1a. Tiefendruck: $p(t) = \rho\, g\, t + p_0$

Atmosphärendruck $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g\, h} = p_0 \cdot e^{-\frac{1,293}{101325} 9,81 \cdot \frac{h}{m}} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7,988\, km}}$

1b.



2. Molzahl pro Volumen: $\frac{n}{V} = \frac{\rho}{A_r} = \frac{2,698\, mol}{26,98\, cm^3} = 0,10 \frac{mol}{cm^3}$

Atomzahl pro Volumen: $\frac{N}{V} = \frac{n}{V} \cdot N_A = 0,10 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\ cm^{-3} = 6,022 \cdot 10^{22}\ cm^{-3}$

Volumen pro Atom: $V_{Atom} = \frac{V}{N} = \frac{1}{6,02210^{22}}\ cm^3 = 1,661 \cdot 10^{-23}\ cm^3$

Näherung Würfel: $V_{Atom} = (2 \cdot R)^3$

$$R \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{V_{Atom}} = \frac{1}{2} \cdot 2,551 \cdot 10^{-8}\ cm = 0,128\ nm$$

Näherung Kugel: $V_{Atom} = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 V_{Atom}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1,661 \cdot 10^{-23}\ cm^3}{4 \cdot \pi}} = 0,158\ nm$$

Tabellenwert zum Vergleich: $R_{Al} = 0,143\ nm$

3. Gewichtskraft Al-Block: $F_g = m_{Al}\ g = 2\ kg \cdot 10\, m\, s^{-2} = 20\ N$

Auftriebskraft Al-Block: $F_A = \rho_W\ V\ g = \frac{\rho_W}{\rho_{Al}} m_{Al}\ g = \frac{1,00}{2,698} 2 \cdot 10\ N = 7,41\, N$

Anzeige Waage oben: $A_o = F_g - F_A = 12,59\ N$

Anzeige Waage unten: $A_u = (m_B + m_W) \cdot g + F_A = 37,41\, N$

4a. Eigen(kreis-)frequenz der gedämpften Schwingung: $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{2,00\, s} = 3,142\, s^{-1}$

4b. Es gilt: $\varphi((n+1) \cdot T_e) = 0,7 \cdot \varphi(n \cdot T_e)$

und: $\varphi((n+1) \cdot T_e) = \varphi(n \cdot T_e) \cdot e^{-\beta T_e}$

Es folgt: $0,7 = e^{-\beta T_e}$

Lösung: $\beta = \frac{\ln 0{,}7}{-T_e} = 0{,}178\, s^{-1}$

4c. Es gilt: $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Es folgt: $\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2} = 3{,}147\, s^{-1}$

Eigenfrequenz: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = 0{,}501\, Hz$

4d. Massenträgheitsmoment: $J_{Stab} = \frac{1}{12} m L^2 + m d^2$

Abstand Drehachse-Schwerpunkt: $d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{1}{6} L$

Lösung: $J_{Stab} = \frac{1}{12} m L^2 + \frac{1}{36} m L^2 = \frac{1}{9} m L^2$

4e. Physikalisches Pendel: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m g d}{J}} = \sqrt{\frac{m g L \cdot 9}{6 \cdot m L^2}} = \sqrt{\frac{3 g}{2 L}}$

Pendellänge: $L = \frac{3 g}{2 \omega_0^2} = \frac{3 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 3{,}147^2} = 1{,}49\, m$

4f. Es gilt: $\varphi_{\max}(t) = \varphi_{\max}(t = 0) \cdot e^{-\beta t}$

$$t = \frac{\ln \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi_{\max}(t=0)}}{-\beta} = \frac{\ln \frac{1}{20}}{-0{,}178}\, s = 16{,}83\, s$$

5a. Siehe Vorlesung

5b. Wenn: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$

folgt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$

Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.

5c. siehe Vorlesung

6a. Eigen(kreis-)frequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}} = \sqrt{\frac{D^*}{\frac{1}{2} m R_S^2}} = \sqrt{\frac{0{,}12}{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}15^2} s^{-2}} = 4{,}619\, s^{-1}$

Abklingkonstante: $ß = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(4{,}619^2 - 3^2\right)} = 2{,}483\, s^{-1}$

6b. Maximalamplitude: $\varphi_{\max}(\omega_a, \omega_0, \beta) = \frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_a\right)^2}}$

$$\varphi_{\max}\left(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta\right)=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

mit: $$\omega_R^2=\omega_0^2-2\beta^2$$

$$\varphi_{\max}\left(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta\right)=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_0^2+2\beta^2\right)^2+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}$$

$$\varphi_{\max}\left(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta\right)=\frac{f_a}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}=\frac{f_a}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Winkelbeschleunigung: $$f_a=\frac{M_a}{J}=\frac{0,2\,Nm}{0,5\cdot 0,5\cdot 0,15^2\,kg\,m^2}=35,55\,s^{-2}$$

$$\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{4,619^2-2,483^2}\;s^{-1}=3,895\,s^{-1}$$

$$\varphi_{\max}\left(\omega_a=\omega_R,\omega_e,\beta\right)=\frac{f_a}{2\beta\,\omega_e}$$

$$\varphi_{\max}\left(\omega_a=\omega_R,\omega_e,\beta\right)=\frac{35,55\,s^{-2}}{2\cdot 2,483\cdot 3,895\,s^{-2}}=1,838=105,3^\circ$$