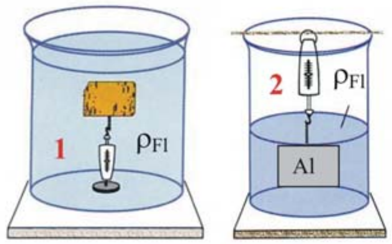
Fachhochschule Hannover | M2A | 09.01.2006
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0506 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Zur Bestimmung der Dichte einer unbekannten Flüssigkeit mit Dichte ρ_{Fl} untersucht man das Verhalten von einem Stück Kork (**1**) (Dichte Kork: $\rho_{Kork} = 200\,kg\,m^{-3}$) und einem Gewichtsstück aus Aluminium (**2**) (Dichte Aluminium: $\rho_{Al} = 2,70\,g\,cm^{-3}$). Die Volumina der beiden Auftriebskörper sind gleich. Die Federwaage (**1**) zeigt eine Kraft von $2,31\,N$, die Federwaage (**2**) $7,50\,N$.

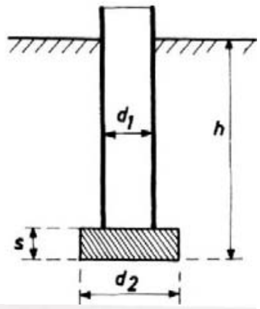


a. Wie groß ist das Volumen der Probekörper?

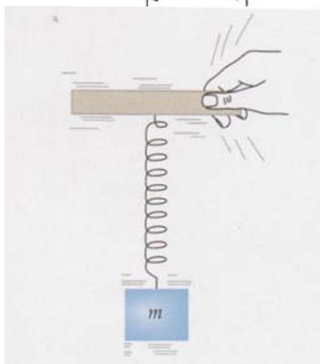
b. Welche Dichte ρ_{Fl} hat die Flüssigkeit?

2. Ein Kupferdraht mit einer Zugfestigkeit von 220 N mm^{-2} soll senkrecht ins Meer hinab gelassen werden. Bei welcher Länge wird der Kupferdraht zerreißen? (Dichte Cu: $\rho_{Cu} = 8,95\,g\,cm^{-3}$, Dichte Meerwasser: $\rho_{MW} = 1,025\,g\,cm^{-3}$)

3. Ein dünnwandiges Stahlrohr mit Innendurchmesser $d_1 = 100\,mm$, dessen unteres Ende mit einer <u>quadratischen</u> Kupferplatte verschlossen ist, wird ins Wasser getaucht. Die Platte mit Kantenlänge $d_2 = 150\,mm$ und einer Dicke $s = 10\,mm$ soll nur durch den Wasserdruck gegen das Rohrende gedrückt werden. Welche Eintauchtiefe h ist erforderlich, damit sich die Scheibe nicht vom Rohr löst? ($\rho_{Cu} = 8,95\,g\,cm^{-3}$, $\rho_W = 1,00\,g\,cm^{-3}$)



4. Hängt man eine Masse von 300 g an eine Feder, so verlängert sie sich um 6 cm.



a. Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung, wenn man ein Federpendel mit einer Masse von 150 g und die oben beschriebene Feder verwendet? (Hinweis: Verwenden Sie $g = 9,81\,m\,s^{-2}$ und geben Sie das Ergebnis mit mindestens vier Stellen an)

b. Eine sehr genaue Messung der Schwingungsdauer ergibt den Wert von 0,3500 s. Wie groß ist die Abklingkonstante β?

c. Mit welcher Frequenz ω_R muss die Aufhängung periodisch bewegt werden, um das Resonanzmaximum zu erhalten?

d. Wie groß muss das Maximum der periodisch erregenden Kraft sein, die bei der Resonanzfrequenz ω_R eine Resonanzamplitude von 25 cm erzeugt??

e. Wie muss eine homogene dünne Stange der Länge $L = 5,2\,cm$ aufgehängt werden, damit sie als Schwerependel die gleiche Schwingungsdauer wie das Federpendel hat?

5. Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:

a. Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$

b. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung!

c. Skizzieren Sie den Winkel δ der Phasenverschiebung als Funktion von ω_a/ω_0.

Lösungen:

1a. Auftriebskraft ist größer als Gewichtskraft. Die resultierende Kraft F_1 zeigt nach oben. Für den Betrag gilt: Kraftanzeige (1)

$$F_1 = \rho_{Fl} \cdot V_{Kork} \cdot g - \rho_{Kork} \cdot V_{Kork} \cdot g$$

$$F_1 = (\rho_{Fl} - \rho_{Kork}) \cdot V_{Kork} \cdot g$$

Auftriebskraft ist kleiner als Gewichtskraft. Die resultierende Kraft F_2 zeigt nach unten. Für den Betrag gilt: Kraftanzeige (2)

$$F_2 = \rho_{Al} \cdot V_{Al} \cdot g - \rho_{Fl} \cdot V_{Al} \cdot g$$

$$F_2 = (\rho_{Al} - \rho_{Fl}) \cdot V_{Al} \cdot g$$

Umformung nach ρ_{Fl}:

$$\rho_{Fl} = \rho_{Al} - \frac{F_2}{V_{Al}\, g}$$

Einsetzen:

$$F_1 = \left(\rho_{Al} - \frac{F_2}{V_{Al}\, g} - \rho_{Kork} \right) \cdot V_{Kork} \cdot g$$

Da die Volumina gleich sind, gilt:

$$V_{Al} = V_{Kork} = V$$

Einsetzen:

$$F_1 = \left(\rho_{Al} - \frac{F_2}{V\, g} - \rho_{Kork} \right) \cdot V \cdot g$$

$$\frac{F_1}{g} = \rho_{Al} V - \frac{F_2}{g} - \rho_{Kork} V = V \cdot (\rho_{Al} - \rho_{Kork}) - \frac{F_2}{g}$$

$$V = \frac{\frac{F_1}{g} + \frac{F_2}{g}}{\rho_{Al} - \rho_{Kork}} = \frac{F_1 + F_2}{g \cdot (\rho_{Al} - \rho_{Kork})} = \frac{9{,}81\, m^3}{9{,}81 \cdot 2500}$$

$$V = \frac{9{,}81\, m^3}{9{,}81 \cdot 2500} = 0{,}0004\, m^3 = 400\, cm^3$$

1b. Einsetzen (Gleichung für F_2):

$$\rho_{Fl} = \rho_{Al} - \frac{F_2}{V \cdot g}$$

$$\rho_{Fl} = 2700\, kg\, m^{-3} - \frac{7{,}50\, N\, s^2}{0{,}0004\, m^3 \cdot 9{,}81\, m} = 789\, kg\, m^{-3}$$

$$\rho_{Fl} = 789\, kg\, m^{-3} = 0{,}789\, g\, cm^{-3}$$

Probe (Gleichung für F_1):

$$\rho_{Fl} = \frac{F_1}{V \cdot g} + \rho_{Kork}$$

$$\rho_{Fl} = \left(\frac{2{,}31}{0{,}0004 \cdot 9{,}81} + 200 \right) \frac{kg}{m^3} = 789 \frac{kg}{m^3} = 0{,}789 \frac{g}{cm^3}$$

2. Der Draht reißt, wenn die resultierende Kraft $F_{\max}$ größer als das Produkt aus Zugfestigkeit $\sigma_{\max}$ und Querschnittsfläche A des Drahtes ist.

$$F_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A$$

Resultierende Kraft $F_{\max}$:

$$F_{\max} = F_G - F_A = (\rho_{Cu} - \rho_{MW}) \cdot A \cdot L \cdot g$$

$$L = \frac{\sigma_{\max}}{(\rho_{Cu} - \rho_{MW}) \cdot g} = \frac{220\ N\ mm^{-2}}{(8{,}95 - 1{,}025)\ g\, cm^{-3} \cdot 9{,}81\, m\, s^{-2}}$$

$$L = \frac{220 \cdot 10^3}{(8{,}95 - 1{,}025) \cdot 9{,}81} m = 2830\, m$$

3. Die Scheibe ist kräftefrei, wenn die Gewichtskraft $F_G = m\,g$ gleich der Differenz der Druckkräfte unterhalb und oberhalb der Scheibe ist. p_0 sei der äußere Luftdruck (der zur Vereinfachung unabhängig von der Eintauchtiefe h sein soll). Der Druck in der Wassertiefe h ist $p_W(h) = p_0 + \rho_W\, g\, h$.

Die Fläche der Kupferplatte ist: $A_P = d_2^2$

die Querschnittsfläche des Rohres: $A_R = \frac{\pi}{4} d_1^2$

Gewichtskraft: $F_G = m\,g = \rho_{Cu} V\, g = \rho_{Cu}\, g\, A_P\, s = \rho_{Cu}\, g\, d_2^2\, s$

Druckkraft unterhalb der Scheibe: $F_U = \left(p_0 + p_W(h)\right)\cdot A_P = p_0 \cdot d_2^2 + \rho_W\, g\, h \cdot d_2^2$

Druckkraft oberhalb der Scheibe: $F_O = \left(p_0 + p_W(h-s)\right)\cdot\left(A_P - A_R\right) + p_0 A_R$

$$F_O = p_0 A_P - p_0 A_R + p_0 A_R + p_W(h-s)\cdot\left(A_P - A_R\right)$$

$$F_O = p_0 \cdot d_2^2 + \rho_W\, g \cdot (h-s)\cdot\left(d_2^2 - \frac{\pi}{4} d_1^2\right)$$

Differenz der Druckkräfte: $F_U - F_O = \rho_W\, g \cdot \left(h \cdot d_2^2 - (h-s)\cdot\left(d_2^2 - \frac{\pi}{4} d_1^2\right)\right)$

$$F_U - F_O = \rho_W\, g \left(\frac{\pi}{4} h\, d_1^2 + s\, d_2^2 - \frac{\pi}{4} s\, d_1^2\right)$$

Gleichgewichtsbedingung: $F_G = F_U - F_O$

$$\rho_{Cu} s\, d_2^2\, g = \rho_W\, g \left(\frac{\pi}{4} h\, d_1^2 + s\, d_2^2 - \frac{\pi}{4} s\, d_1^2\right)$$

$$h = s \cdot \left(\frac{4}{\pi}\frac{d_2^2}{d_1^2}\cdot\left(\frac{\rho_{Cu}}{\rho_W} - 1\right) + 1\right)$$

$$h = 0{,}01\,m \cdot \left(\frac{4}{\pi}\frac{150^2}{100^2}\cdot\left(\frac{8{,}95}{1{,}00} - 1\right) + 1\right) = 0{,}238\,m$$

4a. Federkonstante: $D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{0{,}3\,kg \cdot 9{,}81\,m}{0{,}06\,m\,s^2} = 49{,}05\,N\,m^{-1}$

Eigen(kreis)frequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{49{,}05\,kg\,m}{0{,}15\,s^2\,kg\,m}} = 18{,}0831\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}347461\,s$$

4b. Gemessene Schwingungsdauer: $T_e = 0{,}3500\,s$

Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung: $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 17{,}9520\,s^{-1}$

Abklingkonstante: $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_e^2}$

$$\beta = \sqrt{18,0831^2 - 17,9520^2}\ s^{-1} = 2,1735\ s^{-1}$$

4c. Resonanzfrequenz:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{18,0831^2 - 2\cdot 2,1735^2}\ s^{-1}$$

$$\omega_R = 17,8199\, s^{-1}$$

Schwingungsdauer der Erregung:

$$T_R = \frac{2\pi}{\omega_R} = 0,3526\, s$$

4d. Resonanzamplitude:

$$x_R^{\max} = x_R\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)$$

$$x_R^{\max} = \frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

$$x_R^{\max} = \frac{F_{err}^{\max} / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

Maximale Kraft des Erregers

$$F_{err}^{\max} = m \cdot x_R^{\max} \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_R\right)^2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,15\, kg \cdot 0,25\, m \sqrt{\left(18,0831^2 - 17,8199^2\right)^2 + \left(2\cdot 2,1735 \cdot 17,8199\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,15\, kg \cdot 0,25\, m \sqrt{\left(326,9985 - 317,5488\right)^2 + \left(77,4631\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,15\, kg \cdot 0,25\, m \sqrt{\left(9,4497\right)^2 + \left(77,4631\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,15\, kg \cdot 0,25\, m \cdot 78,0374\ s^{-2} = 2,9264\, N$$

$$F_{Err}^{\max} = 2,93\ N$$

4e. Gesucht ist ein Stangenpendel (entspricht einem physikalischen Pendel) mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 18,0831\, s^{-1}$.

Physikalisches Pendel:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\, g\, d}{J_{ges}}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{m\, g\, d}{J_{ges}}$$

$$J_{ges}\, \omega_0^2 = m\, g\, d$$

Trägheitsmoment dünne Stange:

$$J_{ges} = m\, d^2 + \frac{1}{12} m\, L^2$$

$$m\, d^2 + \frac{1}{12} m\, L^2 = \frac{m\, g\, d}{\omega_0^2}$$

$$d^2 - 2\frac{g}{2\,\omega_0^2} d = -\frac{1}{12} L^2$$

$$d_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{g^2}{4\,\omega_0^4} - \frac{L^2}{12}} + \frac{g}{2\,\omega_0^2}$$

Es ist: $\frac{g^2}{2\omega_0^4} = \frac{9,81^2}{4 \cdot 18,0831^4} m^2 = 0,000225 m^2$

und $\frac{1}{12} L^2 = \frac{0,05^2}{12} m^2 = 0,000225 m^2$

und somit ist der Wert der Wurzel gleich Null.

Lösung (eindeutig): $d_1 = d_2 = d = \frac{g}{2\omega_0^2} = \frac{9,81}{2 \cdot 18,0831} m = 0,015 m = 1,5 cm$

5a. Siehe Vorlesung

5b. Wenn: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$

folgt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$

Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.

5c. siehe Vorlesung