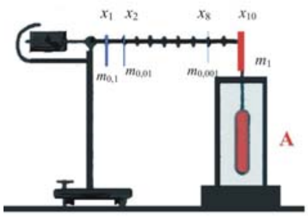
1. Die Dichte von Flüssigkeiten kann mit der Mohrsche Waage bestimmt werden. Der Auftriebskörper (**A**) taucht vollständig in die zu untersuchende Flüssigkeit ein. Zunächst wird die Waage mit dest. Wasser ($\rho_W = 0{,}9975\, g\, cm^{-3}$ bei $T = 23°C$) austariert. Dazu ist erforderlich, die Masse m_1 im Abstand $x_{10} = 10$ Teilstrichen vom Drehpunkt aufzuhängen.



a. Dann wird eine unbekannte Flüssigkeit untersucht: Um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen, müssen <u>zusätzlich</u> drei Massen: $m_{0,1} = 0{,}1 \cdot m_1$ am Teilstrich x_1, $m_{0,01} = 0{,}01 \cdot m_1$ am Teilstrich x_2 und $m_{0,001} = 0{,}001 \cdot m_1$ am Teilstrich x_8 aufgehängt werden. Wie groß ist die Dichte der Flüssigkeit? (Begründung!)

b. Wo müssen die Massen m_1, $m_{0,1}$, $m_{0,01}$ und $m_{0,001}$ aufgehängt werden, damit bei der Dichtebestimmung von Benzin ($\rho_3 = 0{,}723\, g\, cm^{-3}$) die Waage ins Gleichgewicht gebracht wird?

2. Um wissenschaftliche Geräte lange Zeit in große Höhen zu bringen, verwendet man <u>Überdruckballone</u> mit Durchmesser von beispielsweise $D = 10\, m$ aus gasdichtem Material. Als Auftriebsgas dient Helium. Für den Startort gilt: Höhe = 100 m, Luftdruck: 1000 hPa, Temperatur 28°C. Die Masse des Ballons, ohne Gas aber einschließlich Nutzlast betrage 50 kg.

($\rho_0^{He} = 0{,}1785\, kg\, m^{-3}$, $\rho_0^{Luft} = 1{,}293\, kg\, m^{-3}$ bei $p_0 = 1013\, hPa$ und $T_0 = 0°C$)

a. Welche Masse Helium muss eingefüllt werden, um den Ballon mit einer Beschleunigung von $a = 5\, m\, s^{-2}$ am Boden starten zu können?

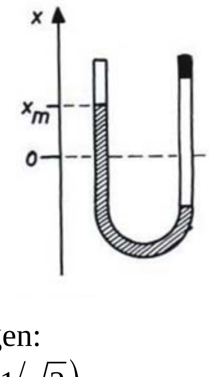
b. Welche maximale Höhe erreicht er?

3. In einem U-Rohr befindet sich Glycerin mit einer Säulenlänge von $l = 40\, cm$. Eine Seite des Rohres ist offen, die andere verschlossen. Durch Überdruck in dem verschlossenen Teil wird die Flüssigkeitssäulen um $x_m = 8\, cm$ aus der Ruhelage bei $x_0 = 0$ ausgelenkt.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Verschluss des U-Rohres geöffnet und die Flüssigkeitssäule beginnt zu schwingen.

Die Beobachtung zeigt, dass die Amplitude nach 5 Schwingungsperioden auf 5% der Ausgangsamplitude x_m abgeklungen ist.

a. Stellen Sie die Bewegungsgleichung der ungedämpften Schwingung auf und leiten Sie die Formel für die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 ab.



b. Wie lautet die Funktion für die Amplitude der gedämpften Schwingung? Wie groß sind die Abklingkonstante β und die Eigenkreisfrequenz ω_e der gedämpften Schwingung ω_e?

c. Welche maximale Geschwindigkeit hat die Flüssigkeitssäule?

d. Wie groß ist die Beschleunigung a_0 zum Zeitpunkt $t = 0$?

4. Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:

a. Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$

b. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung!

c. Skizzieren Sie den Winkel δ der Phasenverschiebung als Funktion von ω_a/ω_0.

d. Bei welchem Wert der Abklingkonstante β (in Einheiten von ω_0) erreicht die Resonanzüberhöhung der Maximalamplitude den Wert 5?

Lösungen:

1a. Die Auftriebskraft ist: $F_A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot V \cdot g$

Das Verhältnis der Dichten ρ_1 und ρ_2 zweier Flüssigkeiten ist also gleich dem Verhältnis der Dichten $F_{A,1}$ und $F_{A,2}$:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_{A,1}}{F_{A,2}}$$

Die resultierende Kraft aus Gewichtskraft F_G (nach "unten“ gerichtet) und Auftrieb F_A (nach "oben“ gerichtet) erzeugt ein Drehmoment M_A an der Waage (mit Linksdrehung, wenn $F_A > F_G$). Im Gleichgewicht wird das durch F_A erzeugte Drehmoment durch das F_G erzeugte Drehmoment M_m (Rechtsdrehung) kompensiert. Im Gleichwicht ist die Differenz der Drehmomente gleich Null.

Gleichgewicht: $M_A - M_m = 0$ oder $M_A = M_m$

Bezeichnet man die unterschiedlichen Flüssigkeiten mit dem Index i = 1,2, so gilt für das Verhältnis der Dichten und das Verhältnis der Drehmomente:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_{A,1}}{M_{A,2}} = \frac{M_{m,1}}{M_{m,2}}$$

Für das Drehmoment $M_{m,i}$ der Zusatzgewichte mit Masse m_k im Abstand x_k gilt:

$$M_{m,i} = \left(\sum_k x_k\, m_k\, g\right)_i$$

Für zwei Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Dichten ρ_1 und ρ_2 gilt dann:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(\sum_k x_k\, m_k\, g\right)_1}{\left(\sum_k x_k\, m_k\, g\right)_2}$$

Bei Wasser hängt m_1 am zehnten Teilstrich (x_{10}), bei der unbekannten Flüssigkeit zusätzlich $m_{0,1} = 0,1 \cdot m_1$ am ersten (x_1), $m_{0,01} = 0,01 \cdot m_1$ am zweiten (x_2) und $m_{0,001} = 0,001 \cdot m_1$ am achten (x_8). Es folgt:

$$\frac{\rho_x}{\rho_{Wasser}} = \frac{m_1 \cdot 10 + m_{0,1} \cdot 1 + m_{0,01} \cdot 2 + m_{0,001} \cdot 8}{m_1 \cdot 10}$$

$$\frac{\rho_x}{\rho_{Wasser}} = \frac{1 \cdot 10 + 0,1 \cdot 1 + 0,01 \cdot 2 + 0,001 \cdot 8}{1 \cdot 10} = \frac{10,128}{10,000} = 1,0128$$

$$\rho_x = 1,0128 \cdot 0,9975\, g\, cm^{-3} = 1,0103\, g\, cm^{-3}$$

1b. Für Benzin gilt: $\frac{\rho_{Benzin}}{\rho_{Wasser}} = \frac{0,723}{0,9975} = 0,7248$

Man muss also: die Masse m_1 entfernen,

und:

m_1	an den siebten Teilstrich (x_7)
$m_{0,1}$	an den zweiten Teilstrich (x_2)
$m_{0,01}$	an den fünften Teilstrich (x_4)
$m_{0,001}$	an den fünften Teilstrich (x_8) hängen.

2. Benennung der physikalischen Größen:

Index 0 für Standardwerte:

Luftdichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{Luft}

He-Dichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{He}

Index 1 für die aktuellen Werte am Startort:

Luftdichte am Startort: ρ_1^{Luft}

Heliumdichte am Startort: ρ_1^{He}

2a. Berechnung der Gasdichten am Startort:

Die allgemeine Gasgleichung $$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1}$$

dient zur Berechnung der aktuellen Dichten ρ_1^{Luft} und ρ_1^{He} am Startort aus den Standardwerten ρ_0^{Luft} und ρ_0^{He}:

Luftdichte am Startort: $$\rho_1^{Luft} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0}\rho_0^{Luft} = \frac{1000 \cdot 273}{301 \cdot 1013} 1,293 \frac{kg}{m^3} = 1,158 \frac{kg}{m^3}$$

Heliumdichte am Startort: $$\rho_1^{He} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0}\rho_0^{He} = \frac{1000 \cdot 273}{301 \cdot 1013} 0,1785 \frac{kg}{m^3} = 0,1598 \frac{kg}{m^3}$$

Für die beschleunigte Bewegung des Ballon gilt das D'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0$$

$$\left(F_A - F_G\right) - m_{ges}\, a = 0$$

mit F_A Auftriebskraft: $F_A = V_1^{He}\, \rho_1^{Luft}\, g$

und F_G Gewichtskraft: $F_G = m_{ges}\, g = \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g$

und m_{ges} Gesamtmasse: $m_{ges} = m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}$

wobei V_1^{He} das am Boden eingefüllte Heliumvolumen, $V_1^{He} \cdot \rho_1^{He} = m_{He}$ die Masse des eingefüllten Gases, ρ_1^{Luft} die Luftdichte am Startort, m_R die Rüstmasse und m_N die Masse der Nutzlast bedeuten.

Es ist: $m_R + m_N = 50\,kg$

Es folgt:

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft}\, g - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) a = 0$$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right)\frac{a}{g} = 0$$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0$$

nach Aufgabenstellung gilt: $\frac{a}{g} = \frac{1}{2}$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - \frac{3}{2} V_1^{He}\, \rho_1^{He} - \frac{3}{2}\left(m_R + m_N\right) = 0$$

$$V_1^{He}\left(\rho_1^{Luft} - \frac{3}{2}\rho_1^{He}\right) = \frac{3}{2}\left(m_R + m_N\right)$$

$$V_1^{He} = \frac{\frac{3}{2}\left(m_R + m_N\right)}{\rho_1^{Luft} - \frac{3}{2}\rho_1^{He}} = \frac{1,5 \cdot 50\,kg}{\left(1,158 - 1,5 \cdot 0,1598\right) kg\, m^{-3}}$$

$$V_1^{He} = \frac{75}{0,9183} m^3 = 81,67\, m^3$$

2b. Mit steigender Höhe wird die Luftdichte geringer. Zunächst dehnt sich das He-Gas im Ballon aus, bis der gesamte Ballon prall gefüllt ist (dies wird in der vorliegenden Aufgabe nicht näher betrachtet). Danach bleibt das Auftriebsvolumen konstant. Es ist gleich dem Ballonvolumen V_B. Wenn man ein konstantes Auftriebsvolumen hat, wird mit steigender Höhe der Auftrieb geringer.

Das Ballonvolumen ist: $V_B = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} = 523,6\,m^3$

In der Maximalhöhe gilt: $F_A = V_B\, \rho^{Luft}(H_{\max})\, g = \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g = F_G$

Die Luftdichte $\rho^{Luft}(H_{\max})$ in der Höhe $H_{\max}$ ergibt sich nach der barometrischen Höhenformel: $\rho^{Luft}(H_{\max}) = \rho_1^{Luft} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot H_{\max}\right)$

mit: $\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} = \frac{1,293\,kg\,m^{-3}\; 9,81\,m\,s^{-2}}{1013\,hPa} = \frac{1}{7986\,m}$

$$V_B\, \rho_1^{Luft} \cdot \exp\left(-\frac{H_{\max}}{7986\,m}\right) g = \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g$$

$$\exp\left(-\frac{H_{\max}}{7986\,m}\right) = \frac{m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}}{V_B\, \rho_1^{Luft}}$$

$$H_{\max} = 7,986\,m \cdot \ln \frac{V_B\, \rho_1^{Luft}}{m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}}$$

$$H_{\max} = 7,986\,m \cdot \ln \frac{523,6 \cdot 1,158}{50 + 81,67 \cdot 0,1598}$$

$$H_{\max} = 7,986\,m \cdot \ln \frac{606,32}{63,05} = 7,986\,m \cdot 2,2635$$

$$H_{\max} = 18076\,m$$

3a. Die Differenz der beiden Flüssigkeitssäulen entspricht einer Säulenhöhe von $2 \cdot x$. Der Schweredruck am Boden der Säule ist:

$$p_S = \rho_{Fl} \cdot g \cdot 2 \cdot x$$

Querschnittsfläche der Säule: A

Rückstellende Kraft: $F_{Rück} = -p_S \cdot A = -2\,\rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot x$

Gesamtmasse der Säule: $m = \rho_{Fl} \cdot V = \rho_{Fl} \cdot A \cdot l$

(Näherung: Man betrachte statt der U-förmigen Flüssigkeitssäule einen Zylinder der Länge l und Querschnittsfläche A)

D'Alembertsches Prinzip: $\left(\sum_i \vec{F}_i\right) - m\,\ddot{\vec{x}} = 0$ hier: $F_{Rück} - m\,\ddot{x} = 0$

Einsetzen: $-2\,\rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot x - \rho_{Fl} \cdot A \cdot l \cdot \ddot{x} = 0$

Es folgt: $l \cdot \ddot{x} + 2 \cdot g \cdot x = 0$

Standardform der DGL: $\ddot{x} + \frac{2\,g}{l} \cdot x = 0 = \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x$

mit: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\,g}{l}} = 7,071\,s^{-1}$

Schwingungsdauer: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = 0{,}8886\,s$

Lösung für $x(t)$: $x(t) = x_m \cdot \cos\left(\omega_0\, t\right)$

3b. In der Vorlesung wurde die Lösung für eine gedämpfte Schwingung mit den Anfangsbedingungen $x\left(t=0\right) = x_m$ und $v_0 = \dot{x}(t=0) = 0$ abgeleitet (Siehe Formelsammlung):

$$x(t) = x_m \cdot e^{-\beta t} \cdot \left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin\left(\omega_e t\right) + \cos\left(\omega_e\, t\right)\right)$$

Setze: $t_n = n \cdot T_e$

Dann folgt: $x(t_n = n \cdot T_e) = x_m \cdot e^{-\beta n T_e}$

Für n = 5 soll nach Aufgabenstellung gelten:

$$x(5 \cdot T_e) = \frac{x_m}{20} = x_m \cdot e^{-\beta 5 T_e}$$

Es folgt: $\ln\frac{1}{20} = -\beta \cdot 5 T_e$

Lösung für β: $\beta = \frac{\ln 20}{5 T_e} = \frac{\ln 20 \cdot \omega_e}{5 \cdot 2\pi} = \frac{\ln 20 \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{5 \cdot 2\pi}$

$$\beta^2 = \left(\frac{\ln 20}{10\pi}\right)^2 \left(\omega_0^2 - \beta^2\right)$$

$$\beta^2 \left(1 + \left(\frac{\ln 20}{10\pi}\right)^2\right) = \left(\frac{\ln 20}{10\pi}\right)^2 \omega_0^2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{10\pi}{\ln 20}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$$\beta = 0{,}094927 \cdot \omega_0 = 0{,}67123\, s^{-1}$$

(Bem: In diesem Fall wäre auch die Näherung:

$\beta = \frac{\ln 20}{10\pi}\omega_e \cong \frac{\ln 20}{10\pi}\omega_0 = 0{,}095357 \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}}$ ausreichend.)

Die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist:

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{10\pi}{\ln 20}\right)^2}} = 0{,}995484 \cdot \omega_0$$

3c. In der Vorlesung wurde die Lösung für die Geschwindigkeit einer gedämpften Schwingung mit den Anfangsbedingungen $x(t=0)=x_m$ und $v_0=\dot{x}(t=0)=0$ abgeleitet (Siehe Formelsammlung):

$$\dot{x}(t)=x_m\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta t}\cdot\sin(\omega_e t)$$

Die Maxima der Geschwindigkeit entsprechen Nullstellen der Beschleunigungsfunktion:

$$\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\left(e^{-\beta t}\cdot(-\beta)\cdot\sin(\omega_e t)+e^{-\beta t}\omega_e\cos(\omega_e t)\right)$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\cdot e^{-\beta t}\left(\omega_e\cos(\omega_e t)-\beta\sin(\omega_e t)\right)$$

Für die Nullstelle bei $t=T_{\max}$ gilt: $\omega_e\cos(\omega_e T_{\max})=\beta\sin(\omega_e T_{\max})$

$$\tan(\omega_e T_{\max})=\frac{\omega_e}{\beta}=\frac{0,995484\cdot\omega_0}{0,094927\cdot\omega_0}=10,4868$$

Es folgt: $\omega_e T_{\max}=0,469738\cdot\pi=0,939476\cdot\frac{\pi}{2}$

$$T_{\max}=0,939476\cdot\frac{1}{0,995484\cdot\omega_0}\frac{\pi}{2}$$

$$T_{\max}=0,943738\cdot\frac{T_0}{2\pi}\frac{\pi}{2}=0,943738\cdot\frac{T_0}{4}$$

<u>Kommentar:</u> Eine ungedämpfte Schwingung hat das Geschwindigkeitsmaximum bei $\frac{T_0}{4}$. Bei der vorliegenden gedämpften Schwingung wird das Geschwindigkeitsmaximum ~5,6% früher erreicht.

Max. Geschwindigkeit: $\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta\cdot 0,943738\frac{T_0}{4}}\cdot\sin\left(0,995484\ \omega_0\cdot 0,943738\ \frac{T_0}{4}\right)$

$$\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta\cdot 0,943738\frac{T_0}{4}}\cdot\sin\left(0,939476\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0}{0,995484}e^{-\beta\cdot 0,943738\frac{T_0}{4}}\cdot 0,995484=x_m\ \omega_0\ e^{-\beta\cdot 0,943738\frac{T_0}{4}}$$

$$\dot{x}(t)=x_m\ \omega_0\cdot e^{-0,095357\frac{2\pi}{T_0}\cdot 0,943738\frac{T_0}{4}}=x_m\ \omega_0\cdot e^{-0,089992\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{x}(t)=x_m\ \omega_0\cdot 0,868177$$

$$\dot{x}(t)=0,08\,m\cdot 7,071\,s^{-1}\cdot 0,868177=0,491110\,\frac{m}{s}$$

3d. Beschleunigung: $\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\cdot e^{-\beta t}\left(\omega_e\cos(\omega_e t)-\beta\sin(\omega_e t)\right)$

Für $t = 0$ gilt: $\ddot{x}_0 = \ddot{x}(t=0) = \frac{x_m \cdot \omega_0^2}{\omega_e} \cdot 1 \cdot \left(\omega_e \cdot 1 - \beta \cdot 0\right) = x_m \cdot \omega_0^2$

$$\ddot{x}_0 = 0,08 \cdot 7,071^2 \frac{m}{s^2} = 4,0 \frac{m}{s^2}$$

4a. Siehe Vorlesung

4b. Wenn: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$

folgt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$

Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.

4c. siehe Vorlesung

4d. Bei der Resonanzfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

ist die Amplitude: $x_R^{\max} = x_0\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right) = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}}$

Die Amplitude für $\omega_a = 0$ ist: $x_0\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right) = \frac{f_a}{\omega_0^2}$

Resonanzüberhöhung: $\frac{x_R^{\max}\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)}{x_0\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right)} = \frac{f_a \cdot \omega_0^2}{f_a \cdot 2 \cdot \sqrt{\omega_0^2\beta^2 - \beta^4}}$

Nach Aufgabenstellung gilt: $\frac{x_R^{\max}\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)}{x_0\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right)} = 5$

Es folgt: $\frac{x_R^{\max}}{x_0} = 5 = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \sqrt{\omega_0^2\beta^2 - \beta^4}}$

$$25 = \frac{\omega_0^4}{4 \cdot \left(\omega_0^2\beta^2 - \beta^4\right)}$$

$$100 \cdot \left(\omega_0^2\beta^2 - \beta^4\right) = \omega_0^4$$

$$\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4 = 0,01$$

$$\left[\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2\right]^2 - \left[\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2\right] = -0,01$$

Setze: $\theta = \left(\frac{ß}{\omega_0}\right)^2$, dann gilt: $\theta^2 - \theta = -0,01$

$$\theta^2 - 2\frac{1}{2}\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0,01$$

$$\theta = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0,01} + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{0,25 - 0,01} + 0,5$$

$$\theta_1 = 0,98989 \text{ und } \theta_2 = 0,0101$$

Lösung $\theta_1 = 0,98989$ entfällt, da dann $\left(\frac{ß_1}{\omega_0}\right)^2 = 0,98989$ oder $ß_1 = 0,9949 \cdot \omega_0$. Nach 4b.

muss aber gelten: $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 = 0,7071 \cdot \omega_0$

Lösung: $\beta = \beta_2 = \sqrt{0,0101} \cdot \omega_0 = 0,100 \cdot \omega_0$