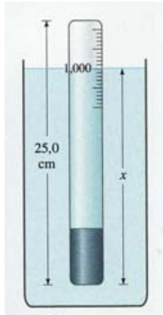
Fachhochschule Hannover — 08.01.2007
Fachbereich Maschinenbau — Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0607 — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

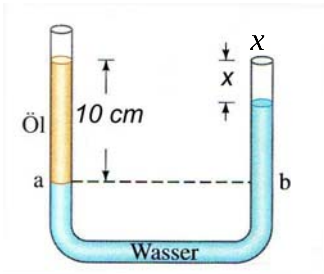
1. Ein Aräometer dient als einfaches Instrument zur Dichtbestimmung von Flüssigkeiten. Das gezeigte Instrument besteht aus einem Glasrohr (Länge 25 cm, Radius 0,8 cm), das mit Metallkügelchen beschwert worden ist. Die Gesamtmasse beträgt 42,5 g.



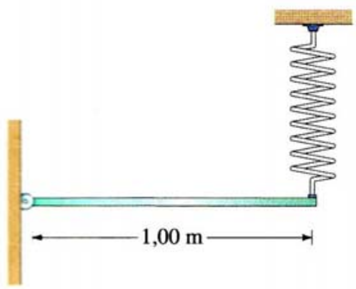
a. Wie groß ist die Strecke *x* vom unteren Ende bis zur 1,000 Markierung, wenn das Gerät in Wasser eintaucht (Hinweis: Die Anzeige 1,000 soll einer Wasserdichte von $\rho_W = 0{,}998\,g\,cm^{-3}$ bei 20°C entsprechen).

b. Wie groß wäre *x*, wenn das Aräometer in Salpetersäure mit einer Dichte von $\rho_S = 1{,}512\,g\,cm^{-3}$ eintauchen würde?

2. In ein U-Rohr mit zwei offenen Enden wird auf der einen Seite Wasser mit $\rho_W = 1{,}0\,g\,cm^{-3}$ und auf der anderen Öl $\rho_{Öl} = 0{,}7\,g\,cm^{-3}$ eingefüllt (vermischen sich praktisch nicht). Die Gleichgewichtslage ist in der Abbildung rechts dargestellt. Wie groß ist *x*?



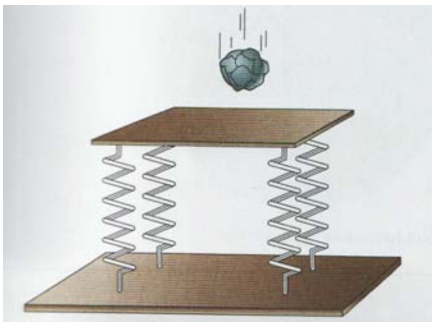
3. Eine dünne Stange mit der Masse $m = 1\,kg$ und der Länge $l = 1\,m$ ist an einem Ende drehbar gelagert und am anderen Ende an einer Feder mit der Federkonstanten D befestigt. Die Ruhelage (siehe Skizze) entspricht einer Federdehnung von $x_0 = 10\,cm$.



a. Stellen Sie zunächst die Differentialgleichung für eine ungedämpfte Schwingung mit kleinen Winkelausschlägen φ auf. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_0.

b. Durch eine genaue Messung wird die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung ermittelt. Das Ergebnis T_e ist 5% größer als der Wert von T_0 aus Aufgabe **3a**. Wie groß ist die Abklingkonstante?

4. Ein Tisch der Masse $m_T = 2\,kg$ wird von vier gleichen Federn getragen. Lässt man die Knetmasse $m_K = 200\,g$ aus einer Höhe von 50 cm auf den Tisch fallen, so bleibt diese <u>fest auf dem Tisch haften</u> und versetzt ihn in Schwingungen. Nach einer langen Zeit kommt der Tisch $5\,cm$ unter seiner ursprünglichen Position zur Ruhe.



a. Mit welcher Anfangsamplitude x_0 und welcher Schwingungsdauer T_0 schwingt der Tisch?

b. Die Schwingung ist gedämpft. Die Abklingkonstante beträgt $\beta = 0{,}2 \cdot \omega_0$. Um wie viel Prozent unterscheidet sich die Schwingungsdauer T_e von T_0?

c. Wie groß ist die Resonanz(kreis)frequenz ω_R und wie groß ist die Amplitudenüberhöhung im Resonanzfall?

5. Beschreiben Sie qualitativ erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:

a. Skizzieren Sie die Resonanzkurven und die Phasenverschiebungen für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$

b. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung!

Lösungen:

1a. Gewichtskraft: $F_G = m\,g$

Auftriebskraft: $F_A = \rho_W\,V\,g = \rho_W\left(\pi\,R^2\,x_W\right)\,g$

Gleichgewichtsbedingung: $F_G = m\,g = \rho_W\,V\,g = \rho_W\left(\pi\,R^2\,x_W\right)\,g = F_A$

Es folgt für Wasser $m = \rho_W\,\pi\,R^2\,x_W$

Lösung für Wasser $x_W = \dfrac{m}{\rho_W\,\pi\,R^2} = \dfrac{42{,}5\,g}{0{,}998\,g\,cm^{-3}\cdot\pi\cdot 0{,}8^2\,cm^2} = 21{,}18\,cm$

1b. Lösung für Salpetersäure: $x_S = \dfrac{m}{\rho_S\,\pi\,R^2} = \dfrac{42{,}5\,g}{1{,}512\,g\,cm^{-3}\cdot\pi\cdot 0{,}8^2\,cm^2} = 13{,}98\,cm$

2. Setze Länge der Ölsäule $h_Ö$: $h_Ö = 10\,cm$

Tiefendruck auf der Linie a-b: $\rho_Ö\,g\,h_Ö = \rho_W\,g\left(h_Ö - x\right)$

Lösung: $x = h_Ö - \dfrac{\rho_Ö\,g\,h_Ö}{\rho_W\,g} = h_Ö\left(1-\dfrac{\rho_Ö}{\rho_W}\right) = 3\,cm$

3a. **Differentialgleichung:** Die Feder erzeugt ein Rückstelldrehmoment:

$$M = F\cdot l = -D\,l\,x\,,$$

wobei x der lineare Federweg ist.

Das Stabende bewegt sich auf einem Kreis. Bei einem Winkelausschlag φ ist der Weg des Stabendes auf dem Kreis: $s = l\cdot\varphi\,.$

Bei kleinen Winkelausschlägen ist: $x \cong s = l\cdot\varphi$

Und es gilt: $M = F\cdot l = -D\,l^2\,\varphi$

D'Alembertsches Prinzip: $\left(\sum_i M_i\right) - J\,\ddot{\varphi} = 0$

$$-D\,l^2\,\varphi - J\,\ddot{\varphi} = 0$$

mit: $J = \dfrac{1}{3}m\,l^2$

$$\frac{1}{3}m\,l^2\ddot{\varphi} + D\,l^2\,\varphi = 0$$

Standardform der DGL: $\ddot{\varphi} + \dfrac{3D}{m}\varphi = 0 = \ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi$

Lösung für ω_0 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3D}{m}}$

Lösung für T_0: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3D}}$

Zur Berechnung von T_0 benötigt man die Masse m und die Federkonstante D.

In der Ruhelage wirkt das Drehmoment $M_0 = F_g \frac{l}{2} = \frac{m\,g\,l}{2}$

Rückstellkraft der Feder $F_F = -\frac{M_0}{l} = -\frac{m\,g}{2}$

Federkonstante: $D = \frac{|F_F|}{s_0} = \frac{m\,g}{2\,s_0} = \frac{1kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{2 \cdot 0{,}1m} = 50\,\frac{N}{m}$

Schwingungsdauer: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot 2\,s_0}{3 \cdot m\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,s_0}{3\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1}{3 \cdot 10}}\,s = 0{,}513\,s$

3b. Für ω_0, ω_e und β gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

für T_0, T_e und β gilt folglich: $\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \beta^2$

Es folgt: $\beta = 2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_e^2}\right)}$

$$\beta = 2\pi\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{(1{,}05 \cdot T_0)^2}} = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}05^2}}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T_0} \cdot 0{,}3049 = 3{,}7345\,s^{-1}$$

4a. Bestimmung der Federkonstante:

Hooksches Gesetz: $F_{el} = -D\,s_0$

Gleichgewichtsbedingung der neuen Ruheposition (betrachte nur die Beträge):

$$m_K\,g = D\,s_0$$

für D folgt: $D = \frac{m_K\,g}{s_0} = \frac{0{,}2 \cdot 10\,N}{0{,}05\,m} = 40\,N\,m^{-1}$

Geschwindigkeit der Knete beim Aufprall auf dem Tisch:

Energieerhaltungssatz: $E_{pot} = m_K\,g\,h = \frac{1}{2} m_K\,v_{K0}^2 = E_{kin}$

Aufprallgeschwindigkeit: $v_{K0} = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}5}\,m\,s^{-1} = 3{,}16\,m\,s^{-1}$

Anfangsgeschwindigkeit von Tisch + Knete: (Vollkommen unelastischer Stoß)

Impulserhaltungssatz: $m_K\,v_{K0} = (m_T + m_K) \cdot u$

Geschwindigkeit von Tisch + Knete: $u = \frac{m_K}{m_T + m_K} v_{K0} = \frac{0{,}2}{2{,}2} \cdot u = 0{,}287\,m\,s^{-1}$

Anfangsamplitude von Tisch + Knete:

Energieerhaltungssatz: $E_{kin} = \frac{1}{2}(m_T + m_K)u^2 = \frac{1}{2} D\,x_0^2 = E_{pot}$ #

Anfangsamplitude: $x_0 = \sqrt{\frac{m_T + m_K}{D}} \cdot u$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2,2\,kg}{40\,kg\,m\,s^{-2}\,m^{-1}}} \cdot 0,287\,m\,s^{-1} = 0,067\,m$$

Bestimmung der Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_T + m_K}{D}} = 1,474\,s$$

4b. Für ω_0, ω_e und β gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

für T_0, T_e und β gilt folglich: $\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \beta^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - 0,2^2\,\frac{4\pi^2}{T_0^2}$

Es folgt: $\frac{1}{T_e^2} = \frac{1}{T_0^2} - 0,04\frac{1}{T_0^2}$

$$\frac{1}{T_e^2} = \frac{1}{T_0^2}(1 - 0,04)$$

$$T_e = T_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1-0,04}} = T_0 \cdot 1,0206 = 1,504\,s$$

Prozentualer Unterschied: $\frac{T_e - T_0}{T_0} \cdot 100 = 2,06\,\%$

4c. Für ω_0, ω_R und β gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$

für T_0, ω_R und β gilt folglich: $\omega_R^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - 2\cdot\beta^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - 2\cdot 0,2^2\,\frac{4\pi^2}{T_0^2}$

$$\omega_R = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1 - 2\cdot 0,2^2} = \frac{2\pi}{T_0} \cdot 0,95916 = 4,088\,s^{-1}$$

Amplitudenüberhöhung: $\frac{x_0^{\max}}{x_{00}} = \frac{x_0\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)}{x_0\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right)} = \frac{0,5}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$

$$\frac{x_0^{\max}}{x_{00}} = \frac{0,5}{\sqrt{(0,2)^2 - (0,2)^4}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,04 - 0,0016}} = 2,55$$

5a. Siehe Vorlesung

5b. Wenn: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$

folgt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$

Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.