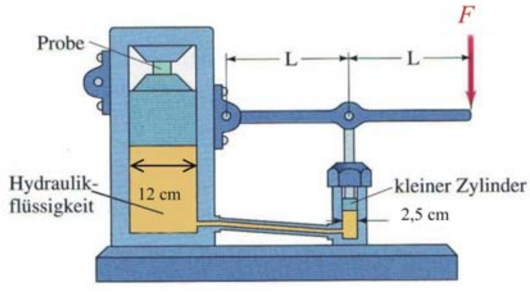
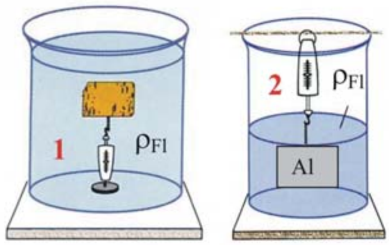
Fachhochschule Hannover | 09.03.2007
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0607 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

---

1. Betrachten Sie die rechts dargestellte Hydraulikpresse zum Pressen von Pulverproben (Durchmesser des großen Zylinders: 12 cm, Durchmesser des kleinen Zylinders: 2,5 cm). Die Probe habe eine Fläche von 2,25 cm^2. Wie groß muss die Kraft F sein, die auf den Hebelarm wirkt, um Proben mit einem Druck von 1000 bar pressen zu können? (15)



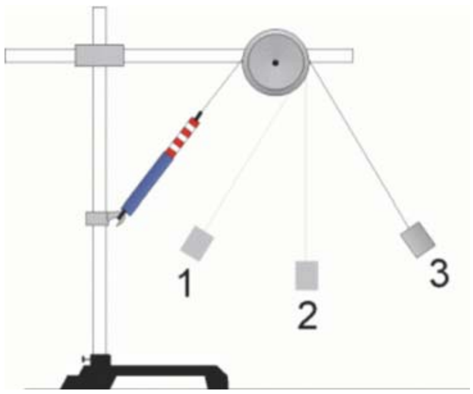
2. Zur Bestimmung der Dichte einer unbekannten Flüssigkeit mit Dichte ρ_{Fl} soll das Verhalten von einem Stück Kork (**1**) (Dichte Kork: $\rho_{Kork} = 250\,kg\,m^{-3}$) und einem Gewichtsstück aus Aluminium (**2**) (Dichte Aluminium: $\rho_{Al} = 2{,}70\,g\,cm^{-3}$) verglichen werden. Die Volumina der beiden Auftriebskörper sind gleich. Die Federwaage (**1**) zeigt eine Kraft von $2{,}31\,N$, die Federwaage (**2**) $7{,}50\,N$.



a. Wie groß ist das Volumen der Probekörper? (15)

b. Welche Dichte ρ_{Fl} hat die Flüssigkeit? (5)

3. An dem rechts gezeigten Fadenpendel mit der als punktförmig angenommen Masse $m = 1\,kg$ und der Fadenlänge $l = 1\,m$ kann die Kraft-Zeit-Funktion gemessen werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Pendel aus Position 1 (Auslenkungswinkel 20°) aus der Ruhe losgelassen. Die Reibung soll vernachlässigt werden.



a. Bestimmen Sie die Kraftkomponente in Fadenrichtung, die in der Position 1 (<u>direkt nach dem Loslassen</u>) auf die Masse wirkt. (5)

b. Bestimmen Sie die Kraftkomponenten in Fadenrichtung, die in der Position 2 (<u>tiefsten Punkt der Bahnkurve</u>) wirkt. (10)

c. Bestimmen Sie die Funktion der Fadenkraft F(t). (15)

4. Eine Kugel mit Durchmesser 50 cm und der Masse 180 kg soll mit einem 75 cm langen Seil an einer Laufkatze hängen. (Das Seil ist am Kugelrand befestigt, seine Masse kann vernachlässigt werden.).

a. Die Laufkatze bewegt die Kugel mit $v_0 = 1{,}2\,m\,s^{-1}$. Nach einem plötzlichen Stopp der Laufkatze beginnt die Kugel zu schwingen. Berechnen Sie den Auslenkungswinkel $\varphi_{\max}$. (15)

b. Berechnen Sie die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 (Annahme: Die Kugel besitzt eine homogene Masseverteilung). (10)

c. Die schwingende Kugel sei bedämpft. <u>Nach vier Schwingung</u> beträgt die Amplitude nur noch 6,25% der Maximalamplitude. Wie groß ist die Abklingkonstante β? (10)

d. Wie groß ist die Eigen(kreis)-frequenz ω_e der gedämpften Schwingung? (5)

e. Welchen Wert hat die Resonanzfrequenz ω_R? (5)

f. Wie groß ist für das Pendel mit der in **4c**. beschriebene Dämpfung die Amplitudenüberhöhung im Resonanzfall? (5)

Sie können zur Vereinfachung bei allen Aufgaben g = 10 m s^{-2} verwenden.

Lösungen:

1. Die Kraft $F = F_{2L}$ am Hebelarm der Länge $2L$ erzeugt das

Drehmoment: $M = F_{2L} \cdot 2L$

Das Drehmoment bewirkt eine Kraftübertragung auf den Kolben des kleinen Zylinders. Der Hebelarm hat die Länge $1 \cdot L$. Da das Drehmoment konstant ist, gilt:

$$M = F_{2L} \cdot 2L = F_{1L} \cdot L$$

Es folgt: $F_{1L} \cdot = 2 \cdot F_{2L}$ (1)

Der Druck in der Hydraulikflüssigkeit kann als konstant betrachtet werden (die Tiefendrücke sind gegenüber den absoluten Drücken vernachlässigbar). Der Druck p_{gZ} im großen Zylinder ist gleich dem Druck p_{kZ} im kleinen Zylinder. Der Druck i kleinen Zylinder wird durch die Kraft F_{1L} erzeugt, die auf den Kolben des kleinen Zylinders wirkt.

Es gilt: $p_{kZ} = \dfrac{F_{1L}}{A_{kZ}} = \dfrac{F_{gZ}}{A_{gZ}} = P_{gZ}$ (2)

Der Druck im großen Zylinder wirkt auf den Kolben des großen Zylinders und erzeugt eine Kraft F_{gZ}. Diese Kraft F_{gZ} bewirkt in der Pulverprobe mit der Querschnittsfläche A_P den

Druck p_P: $p_P = \dfrac{F_{gZ}}{A_P} = 1000\,bar = 10^8\ N\,m^2$ (3)

Aus (2) folgt: $F_{gZ} = \dfrac{A_{gZ}}{A_{kZ}} F_{1L}$

Einsetzen in (3) $p_P = \dfrac{A_{gZ}}{A_P \cdot A_{kZ}} \cdot F_{1L}$

Einsetzen von (1) $p_P = \dfrac{A_{gZ}}{A_P \cdot A_{kZ}} \cdot 2 \cdot F_{2L} = \dfrac{A_{gZ}}{A_P \cdot A_{kZ}} \cdot 2 \cdot F$

$$F = \frac{p_P \cdot A_P \cdot A_{kZ}}{2 \cdot A_{gZ}} = \frac{10^8\,N\,m^{-2} \cdot 2,25\,cm^2 \cdot 2,5^2}{2 \cdot 12^2}$$

Ergebnis: $F = \dfrac{10^8 \cdot 10^{-4} \cdot 2,25 \cdot 2,5^2}{2 \cdot 12^2} N = 488\,N$

2a. (1) Auftriebskraft ist größer als Gewichtskraft. Die resultierende Kraft F_1 zeigt nach oben.

Für den Betrag gilt: Kraftanzeige (1) $F_1 = \rho_{Fl} \cdot V_{Kork} \cdot g - \rho_{Kork} \cdot V_{Kork} \cdot g$

$F_1 = \left(\rho_{Fl} - \rho_{Kork}\right) \cdot V_{Kork} \cdot g$ (1)

(2) Auftriebskraft ist kleiner als Gewichtskraft. Die resultierende Kraft F_2 zeigt nach unten.

Für den Betrag gilt: Kraftanzeige (2) $F_2 = \rho_{Al} \cdot V_{Al} \cdot g - \rho_{Fl} \cdot V_{Al} \cdot g$ (2)

$F_2 = \left(\rho_{Al} - \rho_{Fl}\right) \cdot V_{Al} \cdot g$

Umstellen von (1) nach ρ_{Fl}: $\rho_{Fl} = \dfrac{F_1}{V_{Kork} \cdot g} + \rho_{Kork}$ (3)

Umstellen von (2) nach ρ_{Fl} $\rho_{Fl} = \rho_{Al} - \dfrac{F_2}{V_{Al} \cdot g}$ (4)

Einsetzen: $\dfrac{F_1}{V_{Kork} \cdot g} + \rho_{Kork} = \rho_{Al} - \dfrac{F_2}{V_{Al} \cdot g}$

Da die Volumina gleich sind, gilt: $V_{Al} = V_{Kork} = V$

Einsetzen: $\frac{F_1}{V \cdot g} + \rho_{Kork} = \rho_{Al} - \frac{F_2}{V \cdot g}$

$$\frac{F_1}{V \cdot g} + \frac{F_2}{V \cdot g} = \frac{1}{V \cdot g}\left(F_1 + F_2\right) = \rho_{Al} - \rho_{Kork}$$

$$V = \frac{F_1 + F_2}{g\left(\rho_{Al} - \rho_K\right)} = \frac{9{,}81\,N}{10\,m\,s^{-2} \cdot 2{,}45\,g\,cm^{-3}}$$

$$V = \frac{9810\,g\,m\,s^{-2}}{10\,m\,s^{-2} \cdot 2{,}45\,g\,cm^{-3}} = 400{,}41\,cm^3$$

2b. Einsetzen in (3): $\rho_{Fl} = \frac{F_1}{V_{Kork} \cdot g} + \rho_{Kork}$

$$\rho_{Fl} = \frac{2{,}31\,kg\,m\,s^{-2}}{400{,}41\,cm^3 \cdot 10\,m\,s^{-2}} + 0{,}250\,g\,cm^{-3}$$

Ergebnis: $\rho_{Fl} = \frac{2310\,g}{400{,}41\,cm^3 \cdot 10} + 0{,}250\,g\,cm^{-3} = 0{,}8269\,g\,cm^{-3}$

Kontrolle: Einsetzen in (4): $\rho_{Fl} = \rho_{Al} - \frac{F_2}{V_{Al} \cdot g} = 2{,}7\,g\,cm^{-3} - \frac{7{,}5\,N}{400{,}41\,cm^3 \cdot 10\,m\,s^{-2}}$

$$\rho_{Fl} = 2{,}7\,g\,cm^{-3} - \frac{7500\,g\,m\,s^{-2}}{400{,}41\,cm^3 \cdot 10\,m\,s^{-2}}$$

$$\rho_{Fl} = 0{,}8269\,g\,cm^{-3}$$

3a. Beim Loslassen der Masse (Zeitpunkt $t = 0$) hat die Masse noch keine Geschwindigkeit, $v(t=0) = 0$

sondern maximale Beschleunigung: $a(t=0) = a_{\max}$

Ursache der Beschleunigung ist die Komponente F_t der Gewichtskraft F_g, die tangential zur Bahnkurve gerichtet ist. Die Komponente der Gewichtskraft senkrecht zur Tangentialkomponente ist die Normalkomponente F_n. Sie ist parallel zur Richtung des Fadenrichtung.

Tangentialkraft in Pos 1: $F_{t,1} = F_g \cdot \sin\varphi$

oder: $F_{t,1} \approx F_g \cdot \varphi$

als Näherung für kleine Winkel.

Normalkraft in Pos 1: $F_{n,1} = F_g \cdot \cos\varphi$

Die gesuchte Kraft in Richtung in Fadenrichtung wäre dann die Gegennormalkraft:

$$F'_{n,1} = -F_g \cdot \cos\varphi = -10\,N \cdot 0{,}9296 = 9{,}396\,N$$

3b. In der Position 2 ist der Winkel: $\varphi = 0$ und deshalb $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$.

Tangentialkraft in Pos 2: $F_{t,2} = 0$

Normalkraft in Pos2: $F_{n,2} = F_g$

Wenn die Masse in der Position 2 in Ruhe wäre, würde ausschließlich die Gewichtskraft und als Gegennormalkraft die Fadenkraft wirken. Da die Pendel aber schwingt, bewegt sich die Masse (näherungsweise) auf einer Kreisbahn und besitzt eine nicht-konstante Bahngeschwindigkeit $v_B(\varphi)$

und es wirkt die Zentrifugalkraft: $F_{Zf} = m\frac{v_B^2}{R} = m\frac{v_B^2}{l}$ mit $R = l$ = Pendellänge

In der Vorlesung wurden Schwerependel behandelt (mathematisches und physikalisches Pendel). Gemeinsam ist diesen beiden Pendelarten, dass eine harmonische Lösung nur dann gefunden werden kann, wenn man sie für kleine Winkel betrachtet, und die Näherung $F_t = F_g \cdot \sin\varphi \approx F_g \cdot \varphi$ verwendet.

Die Gesamtkraft, die in der Position 2 auf die Masse nach außen gerichtet wirkt, ist die Summe aus der Gewichtskraft F_g und der Zentrifugalkraft F_{Zf}.

Gesamtkraft: $F_{ges} = F_g + F_{Zf} = m\,g + m\frac{v_B^2}{l} = m\left(g + \frac{v_B^2}{l}\right)$

Für die Winkelamplitude $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit gilt (Lösung der harmonischen Differentialgleichung): $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0\, t)$

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = -\varphi_0\,\omega_0 \cdot \sin(\omega_0\, t)$

Die Position 2 wird zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega_0}$ erreicht

Winkelgeschwindigkeit in Pos 2: $\omega(t_2) = -\varphi_0\,\omega_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Geschwindigkeit in Pos 2: $v(t_2) = \omega(t_2)\cdot l$

$$v(t_2) = -\varphi_0\,\omega_0\, l \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\varphi_0\,\omega_0\, l$$

Gesamtkraft in Pos 2: $F_{ges} = m\left(g + \frac{\varphi_0^2\,\omega_0^2\, l^2}{l}\right)$

Verwendet man die Näherung eines mathematischen Pendels, so folgt aus: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$F_{ges} = m\left(g + \frac{\varphi_0^2 \frac{g}{l} l^2}{l}\right) = m\,g\left(1 + \varphi_0^2\right)$$

Für $\varphi_0 = 20° = \frac{20°}{180°}\pi = 0,349$ $F_{ges} = 1{,}1218 \cdot F_g = 11{,}22\,N$

3c. Die Funktion der Fadenkraft wurde bereits in der Lösung 3b. gefunden.

$$F_{ges}(t) = m\,g \cdot \cos(\varphi(t)) + m\frac{v_B^2(t)}{l}$$

$$F_{ges}(t) = m\,g \cdot \cos(\varphi(t)) + m\frac{\left(-\varphi_0\,\omega_0\, l \cdot \sin(\omega_0\, t)\right)^2}{l}$$

$$F_{ges}(t) = m\,g \cdot \cos(\varphi(t)) + m\,g\,\varphi_0^2 \sin^2(\omega_0\, t)$$

$$F_{ges}(t) = m\,g \cdot \left(\cos(\varphi(t)) + \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0\, t)\right)$$

Aus der Winkelbeziehung: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

folgt: $\cos(\varphi(t)) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi(t))}$

In der hier verwendeten Näherung für kleine Winkel gilt: $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$

Es folgt: $\cos(\varphi(t)) = \sqrt{1 - (\varphi(t))^2}$

$$\cos(\varphi(t)) = \sqrt{1 - \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0\, t)}$$

Ergebnis: $F_{ges}(t) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1 - \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0\, t)} + \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0\, t)\right)$

Überprüfung für Pos. 1 $F_{ges}(t=0) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1 - \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0 \cdot 0)} + \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 \cdot 0)\right)$

$$F_{ges}(t=0) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1 - \varphi_0^2 \cdot 1} + \varphi_0^2 \cdot 0\right)$$

$$F_{ges}(t=0) = m\,g \cdot \sqrt{1-\varphi_0^2} = 10\,N \cdot \sqrt{1-\left(\frac{20°}{180°}\pi\right)^2}$$

Näherungslösung: $$F_{ges}(t=0) = m\,g \cdot \sqrt{1-\varphi_0^2} = 10\,N \cdot 0,9371 = 9,371\,N$$

Exakte Lösung: $$F_{ges}(t=0) = F_g \cdot \cos\varphi_0 = 10\,N \cdot 0,9396 = 9,396\,N$$

Überprüfung für Pos. 2 $$F_{ges}\left(t=\frac{T_0}{4}\right) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1-\varphi_0^2 \cos^2\left(\omega_0 \cdot \frac{T_0}{4}\right)} + \varphi_0^2 \sin^2\left(\omega_0 \cdot \frac{T_0}{4}\right)\right)$$

$$F_{ges}\left(t=\frac{T_0}{4}\right) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1-\varphi_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \varphi_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi_0}{2}\right)\right)$$

$$F_{ges}\left(t=\frac{T_0}{4}\right) = m\,g \cdot \left(\sqrt{1-\varphi_0^2 \cdot 0} + \varphi_0^2 \cdot 1\right)$$

$$F_{ges}\left(t=\frac{T_0}{4}\right) = m\,g \cdot \left(1+\varphi_0^2\right) = 11,22\,N$$

entspricht der exakten Lösung.

4a. Der Abstand zwischen Drehpunkt und dem Schwerpunkt der Kugel beträgt $L = 1m$. Die Kugel bewegt sich zunächst mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 1,2\,\frac{m}{s}$.

Kinetische Energie der Translation: $$E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m\,v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 180\,kg \cdot 1,44\,\frac{m^2}{s^2} = 129,6\,J\,.$$

Berechnung der Anfangsamplitude mit Hilfe des **Energieerhaltungssatzes.** Die ursprüngliche kinetische Energie wird in potentielle Energie der Lage umgesetzt wird.

Energieerhaltungssatz: $$E_{kin}^{trans} = \frac{1}{2} m\,v_0^2 = m\,g\,h_{\max} = E_{pot}$$

Steighöhe: $$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1,44\,m^2\,s^{-2}}{2 \cdot 10\,m\,s^{-2}} = 0,072\,m$$

Es gilt: $$h_{\max} = L\,(1-\cos\varphi_{\max})$$

und für den Auslenkungswinkel: $$\varphi_{\max} = \arccos\left(1-\frac{h}{l}\right) = \arccos(1-\frac{0,072}{1})$$

$$\varphi_{\max} = 0,3818 = 21,9°$$

4b. Eigen(kreis)frequenz für physikalisches Pendel:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,L}{J_{ges}}}$$

Massenträgheitsmoment: $$J_{ges} = m \cdot L^2 + \frac{2}{5} m\,R^2 = 180\,kg\,m^2 + 4,5\,kg\,m^2$$

$$J_{ges} = 184,50\,kg\,m^2$$

Eigenkreisfrequenz: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,L}{J_{ges}}} = \sqrt{\frac{180\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 1m}{184,5\,kg\,m^2}} = 3,1235\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}01\,s$

4c. Für die Maximalamplituden $\varphi_{\max}(n)$ und das ihrer nachfolgenden Schwingung $\varphi_{\max}(n+1)$ gilt:

$$\frac{\varphi_{\max}(n)}{\varphi_{\max}(n+1)} = e^{-\beta\,T_0}$$

Für die Maximalamplituden $\varphi_{\max}(n)$ und das der vierten nachfolgenden Schwingung

$\varphi_{\max}(n+4)$ gilt: $\dfrac{\varphi_{\max}(n)}{\varphi_{\max}(n+4)} = 0{,}0625 = e^{-\beta 4\cdot T_0}$

Es folgt: $\ln(0{,}0625) = -\beta\,4\cdot T_0$

Abklingkonstante $\beta = -\dfrac{\ln(0{,}0625)}{4\cdot T_0} = -\dfrac{-2{,}7726}{4\cdot 2{,}01s} = 0{,}3448\,s^{-1}$

4d. Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{3{,}1235^2\,s^{-2} - 0{,}3448^2\,s^{-2}} = 3{,}1044\,s^{-1}$$

4d. Resonanzfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\beta^2}$

$$\omega_R = \sqrt{3{,}1235^2\,s^{-2} - 2\cdot 0{,}3448^2\,s^{-2}} = 3{,}0852\,s^{-1}$$

4e. Die Resonanzüberhöhung ist das Verhältnis des Resonanzamplitudenmaximums $\varphi_R^{\max}$ bezogen und der Amplitude φ_{00}, die ein Erreger an dem schwingenden System bei $\omega_a = 0$ erzeugt.

$$\frac{x_0^{\max}}{x_{00}} = \frac{x_0(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta)}{x_0(\omega_a = 0, \omega_0, \beta)} = \frac{0{,}5}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$$

Resonanzüberhöhung $\dfrac{x_0^{\max}}{x_{00}} = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{\left(\dfrac{0{,}3448}{3{,}1235}\right)^2 - \left(\dfrac{0{,}3448}{3{,}1235}\right)^4}} = 4{,}56$