Fachhochschule Hannover — vorgezogene Wiederholungsklausur — 28.09.2007
Fachbereich Maschinenbau — Zeit: 90 min
Fach: Physik II im SS07 — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. In ein U-Rohr mit zwei offenen Enden wird auf der einen Seite Wasser und auf der anderen Öl eingefüllt (vermischen sich praktisch nicht). Die Gleichgewichtslage ist in Abb. 1 dargestellt. Wie groß ist die Dichte des Öls?

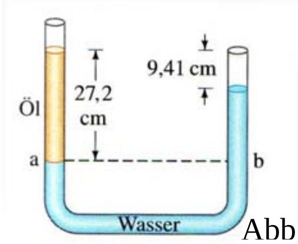


Abb. 1

2. Betrachten Sie die in Abb. 2 dargestellte Hydraulikpresse zum Pressen von Pulverproben (Durchmesser des großen Zylinders: 10 cm, Durchmesser des kleinen Zylinders: 2 cm). Die Probe habe eine Fläche von 4 cm^2. Wie groß ist der Druck und wie groß die Kraft auf die Probe, wenn eine Kraft von 300 N, wie gezeigt, auf den Hebel ausgeübt wird?

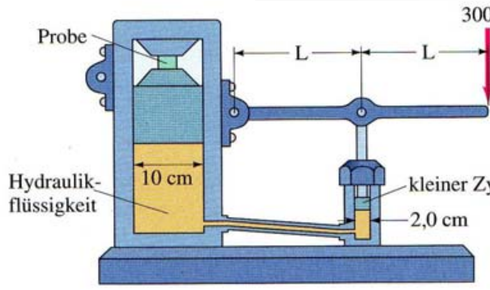


Abb. 2

3. Um wissenschaftliche Geräte lange Zeit in große Höhen zu bringen, verwendet man Ballone mit geschlossenen Hüllen aus gasdichtem Material (Überdruckballone). Betrachten Sie einen Ballon, der im prall gefüllten Zustand einen festen Durchmesser von $D = 12\,m$ besitzen soll (siehe Abb. 3). Als Auftriebsgas soll Helium verwendet werden. Der Startort liegt in einer Höhe von 500 m. Kurz vor dem Start wird eine Lufttemperatur von 12°C und ein Luftdruck von 930 hPa gemessen. Die Masse des Ballons, ohne Gas, aber einschließlich Nutzlast, betrage 60 kg.
($\rho_0^{He} = 0{,}1785\,kg\,m^{-3}$, $\rho_0^{Luft} = 1{,}293\,kg\,m^{-3}$ bei $p_0 = 1013\,hPa$ und $T_0 = 0°C$)

a. Welche Masse Helium muss eingefüllt werden, um den Ballon mit einer Beschleunigung von $a = 4\,m\,s^{-2}$ am Boden starten zu können?
(Hinweis: Der Ballon ist beim Start nicht notwendigerweise prall.)

b. Welche maximale Höhe kann mit dem Ballon erreicht werden?

Abb. 3

4. In einem U-Rohr befindet sich Öl mit einer Säulenlänge von $l = 80\,cm$. Eine Seite des Rohres ist offen, die andere verschlossen. Durch Überdruck in dem verschlossenen Teil wird die Flüssigkeitssäulen um $x_m = 10\,cm$ aus der Ruhelage bei $x_0 = 0$ ausgelenkt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Verschluss des U-Rohres geöffnet und die Flüssigkeitssäule beginnt zu schwingen.

a. Stellen Sie zunächst die Bewegungsgleichung der ungedämpften Schwingung auf und ermitteln Sie die Formel für die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0.

b. Die Beobachtung zeigt, dass die Amplitude nach 6 Schwingungsperioden auf 2 mm abgeklungen ist. Wie lautet die Amplitudenfunktion der gedämpften Schwingung? Wie groß sind die Abklingkonstante β und die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_e?

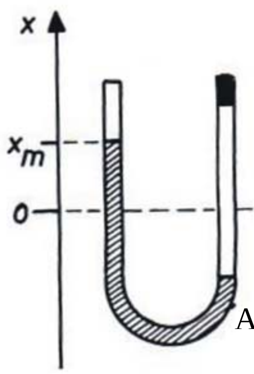


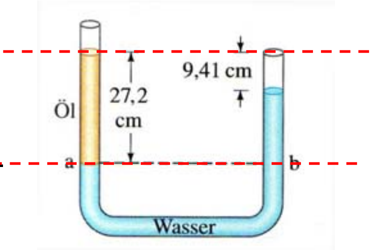
Abb. 4

c. Wie groß ist die Beschleunigung a_0 zum Zeitpunkt $t = 0$?

d. <u>Zusatzfrage:</u> Welche maximale Geschwindigkeit erreicht die Flüssigkeitssäule? (*gibt Zusatzpunkte*)

Verwenden Sie zur Vereinfachung bei allen Aufgaben *g* = 10 m s^{-2}.

Lösungen:



1. Man betrachte die Punkte a und b in den beiden U-Rohrschenkeln. Da der Druck in einer Flüssigkeit nur von der Tiefe abhängt, er im Punkt **a** genau so groß, wie im Punkt **b**. Wie erkennbar ist die Oberkante der Öl-Säule genau sie hoch wie das Ende des rechten U-Rohrs. Die Ölsäule hat eine Höhe von: $h_{Öl} = 27,2\,cm$

Höhe der Wassersäule: $h_{Wasser} = 27,2\,cm - 9,41\,cm = 17,79\,cm$

Da der Tiefendruck in den Punkten a und b gleich ist, gilt:

$$\rho_{Öl} = \rho_{Wasser} \frac{h_{Wasser}}{h_{Öl}} = 1\frac{g}{cm^3} \cdot \frac{17,79}{27,2} = 0,654\frac{g}{cm^3}$$

2. Die Kraft $F_0 = 300\,N$ am Hebelarm der Länge $2L$ erzeugt das

Drehmoment: $M = F_{2L} \cdot 2L$

Das Drehmoment bewirkt eine Kraftübertragung auf den kleinen Zylinder. Der Hebelarm hat die Länge L. Da das Drehmoment konstant ist, gilt:

$$M = F_{1L} \cdot L = F_{2L} \cdot 2L$$

$$F_{1L} \cdot = 2 \cdot F_{2L} = 600N$$

Der Druck in der Hydraulikflüssigkeit kann als konstant betrachtet werden (die Tiefendrücke sind gegenüber den absoluten Drücken vernachlässigbar). Da der Druck p_G auf den großen Zylinder gleich dem Druck $p_K = p_{1L}$ ist der auf den kleinen Zylinder von außen ausgeübt wir, gilt:

$$p_K = \frac{F_K}{A_K} = \frac{F_{1L}}{A_K} = \frac{F_G}{A_G} = P_G$$

Fläche des kleine Zylinders: $A_K = \frac{\pi}{4} \cdot D_K^2$

Fläche des großen Zylinders: $A_G = \frac{\pi}{4} \cdot D_G^2$

Einsetzen $F_G = \frac{A_G}{A_K} F_{1L} = \frac{D_G^2}{D_K^2} \cdot F_{1L} = \frac{10^2}{2^2} 600\,N = 15000N$

Kraft auf die Probe: $F_G = 15000N$

Druck auf die Probe: $p = \frac{F_G}{A_p} = \frac{15\,kN}{4\,cm^2} = \frac{15 \cdot 10^3\,N}{4 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 3,75 \cdot 10^7\,Pa$

3. Benennung der physikalischen Größen:
Index 0 für Standardwerte:

Luftdichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{Luft}

He-Dichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{He}

Index 1 für die aktuellen Werte am Startort:

Luftdichte am Startort: ρ_1^{Luft}

Heliumdichte am Startort: ρ_1^{He}

3a. Berechnung der Gasdichten am Startort:

Die allgemeine Gasgleichung $\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1}$

dient zur Berechnung der aktuellen Dichten von Luft und Helium (ρ_1^{Luft} und ρ_1^{He}) am Startort aus den Standardwerten (ρ_0^{Luft} und ρ_0^{He}):

Luftdichte am Startort: $\rho_1^{Luft} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0} \rho_0^{Luft} = \frac{930 \cdot 273}{285 \cdot 1013} 1,293\frac{kg}{m^3} = 1,137\frac{kg}{m^3}$

Heliumdichte am Startort: $\rho_1^{He} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0} \rho_0^{He} = \frac{930 \cdot 273}{285 \cdot 1013} 0{,}1785 \frac{kg}{m^3} = 0{,}1570 \frac{kg}{m^3}$

Für die beschleunigte Bewegung des Ballon gilt das D'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0$$

$$\left(F_A - F_G\right) - m_{ges}\, a = 0 \qquad (*)$$

mit F_A Auftriebskraft: $F_A = V_1^{He}\, \rho_1^{Luft}\, g$

und F_G Gewichtskraft: $F_G = m_{ges}\, g = \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g$

und m_{ges} Gesamtmasse: $m_{ges} = m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}$

wobei V_1^{He} das am Boden eingefüllte Heliumvolumen, $V_1^{He} \cdot \rho_1^{He} = m_{He}$ die Masse des eingefüllten Gases, ρ_1^{Luft} die Luftdichte am Startort, m_R die Rüstmasse und m_N die Masse der Nutzlast bedeuten.

Es ist: $m_R + m_N = 60\,kg$

Es folgt aus Gl. (*): $\left(\left(V_1^{He}\, \rho_1^{Luft}\, g\right) - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g\right) - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) a = 0$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right)\frac{a}{g} = 0$$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0$$

nach Aufgabenstellung ist: $\frac{a}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$$V_1^{He}\, \rho_1^{Luft} - 1{,}4 \cdot V_1^{He}\, \rho_1^{He} - 1{,}4 \cdot \left(m_R + m_N\right) = 0$$

$$V_1^{He}\left(\rho_1^{Luft} - 1{,}4\, \rho_1^{He}\right) = 1{,}4 \cdot \left(m_R + m_N\right)$$

$$V_1^{He} = \frac{1{,}4\left(m_R + m_N\right)}{\rho_1^{Luft} - 1{,}4\, \rho_1^{He}} = \frac{1{,}4 \cdot 60\,kg}{\left(1{,}137 - 1{,}4 \cdot 0{,}1570\right) kg\, m^{-3}}$$

$$V_1^{He} = \frac{84}{0{,}9172}\, m^3 = 91{,}58\, m^3$$

$$m_1^{He} = V_1^{He} \cdot \rho_1^{He} = 91{,}58\, m^3 \cdot 0{,}1570\, kg\, m^{-3} = 14{,}38\, kg$$

Vergleich: $V_B = \frac{4}{3} \pi R^3 = 904{,}78\, m^3$ das Prallvolumen des Ballon ist also erheblich größer. Der Ballon wird beim Start also nur etwa zu 10% mit Helium gefüllt.

3b. Mit steigender Höhe wird die Luftdichte geringer. Zunächst dehnt sich das He-Gas im Ballon aus, bis der gesamte Ballon prall gefüllt ist (dies wird in der vorliegenden Aufgabe nicht näher betrachtet). Danach bleibt das Auftriebsvolumen konstant. Es ist gleich dem Ballonvolumen V_B. Wenn man ein konstantes Auftriebsvolumen hat, wird mit steigender Höhe der Auftrieb geringer.

In der Maximalhöhe gilt: $F_A = V_B\, \rho^{Luft}\left(H_{\max}\right) g = \left(m_R + m_N + V_1^{He}\, \rho_1^{He}\right) g = F_G$

Die Luftdichte $\rho^{Luft}(H_{\max})$ in der Höhe $H_{\max}$ ergibt sich nach der barometrischen Höhenformel:

$$\rho^{Luft}(H_{\max}) = \rho_1^{Luft} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot H_{\max}\right)$$

mit: $\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} = \frac{1{,}293\, kg\, m^{-3}\; 9{,}81\, m\, s^{-2}}{1013\, hPa} = \frac{1}{7986\, m}$

Einsetzen: $$V_B\,\rho_1^{Luft}\cdot\exp\left(-\frac{H_{\max}}{7986\,m}\right)g=\left(m_R+m_N+V_1^{He}\,\rho_1^{He}\right)g$$

$$\exp\left(-\frac{H_{\max}}{7986\,m}\right)=\frac{m_R+m_N+V_1^{He}\,\rho_1^{He}}{V_B\,\rho_1^{Luft}}$$

$$H_{\max}=7{,}986\,km\cdot\ln\frac{V_B\,\rho_1^{Luft}}{m_R+m_N+V_1^{He}\,\rho_1^{He}}$$

$$H_{\max}=7{,}986\,km\cdot\ln\frac{904{,}78\cdot 1{,}137}{60+91{,}58\cdot 0{,}1570}$$

$$H_{\max}=7{,}986\,km\cdot\ln\frac{1028{,}73}{74{,}38}=7{,}986\,km\cdot 2{,}6269$$

$$H_{\max}=20{,}978\,km$$

Da der Ballon nur sehr wenig He-Gas verliert, kann er sehr lange in etwa dieser Höhe verbleiben.

4a. Die Differenz der Flüssigkeitssäulen im linken und rechten Teil des U-Rohrs entspricht einer Flüssigkeitssäule der Höhe $2\,x$. Der Schweredruck am Boden einer Flüssigkeitssäule mit der Höhe $2x$ gegeben durch:

$$p_S=\rho_{Fl}\cdot g\cdot 2\,x$$

Druck multipliziert mit der Querschnittsfläche A der Säule ergibt die rückstellende Kraft:

$$F_{Rück}=-p_S\cdot A=-2\,\rho_{Fl}\cdot g\cdot A\cdot x$$

Gesamtmasse der Säule: $m=\rho_{Fl}\cdot V=\rho_{Fl}\cdot A\cdot l$

(Dies ist eine Näherung: Man betrachtet dazu statt der U-förmigen Flüssigkeitssäule eine zylinderförmige Säule der Länge l und der Querschnittsfläche A)

D'Alembertsches Prinzip: $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)-m\,\ddot{\vec{x}}=0$ hier: $F_{Rück}-m\,\ddot{x}=0$

Einsetzen: $-2\,\rho_{Fl}\cdot g\cdot A\cdot x-\rho_{Fl}\cdot A\cdot l\cdot\ddot{x}=0$

Es folgt: $l\cdot\ddot{x}+2\cdot g\cdot x=0$

Standardform der DGL: $\ddot{x}+\frac{2\,g}{l}\cdot x=0=\ddot{x}+\omega_0^2\cdot x$

mit: $\omega_0=\sqrt{\frac{2\,g}{l}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\,m\,s^{-2}}{0{,}8\,m}}=5{,}0\,s^{-1}$

Schwingungsdauer: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{2\,g}}=\frac{2\pi}{5}s=1{,}257\,s$

Lösung für $x(t)$: $x(t)=x_m\cdot\cos\left(\omega_0\,t\right)$

4b. In der Vorlesung wurde die Lösung für eine gedämpfte Schwingung mit den Anfangsbedingungen $x\left(t=0\right)=x_m$ und $v_0=\dot{x}(t=0)=0$ abgeleitet (Siehe Formelsammlung):

$$x(t)=x_m\cdot e^{-\beta t}\cdot\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e t)+\cos(\omega_e t)\right)$$

Setzt man $t_n=n\cdot T_e$,

so folgt: $x(t_n=n\cdot T_e)=x_m\cdot e^{-\beta n T_e}$

Für n = 6 soll nach Aufgabenstellung **4b.** gelten:

$$x(6\cdot T_e)=0{,}2\,cm=10\,cm\cdot e^{-\beta\cdot 6\cdot T_e}$$

Es folgt: $\ln\frac{1}{50}=-\beta\cdot 6T_e$

Lösung für β: $\beta=\frac{\ln 50}{6T_e}=\frac{\ln 50\cdot\omega_e}{6\cdot 2\pi}=\frac{\ln 50\cdot\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}{6\cdot 2\pi}$

$$\beta^2=\left(\frac{\ln 50}{12\pi}\right)^2\left(\omega_0^2-\beta^2\right)$$

$$\beta^2\left(1+\left(\frac{\ln 50}{12\pi}\right)^2\right)=\left(\frac{\ln 50}{12\pi}\right)^2\omega_0^2$$

$$\beta=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{12\pi}{\ln 50}\right)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Exakte Lösung: $\beta=0{,}1032\cdot\omega_0=0{,}5161\,s^{-1}$

(Bem: In diesem Fall wäre auch die Näherung:

$$\beta=\frac{\ln 50}{12\pi}\omega_e\cong\frac{\ln 50}{12\pi}\omega_0=0{,}1038\cdot 5\,s^{-1}=0{,}5188\,s^{-1}$$

akzeptabel.)

Die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist:

$$\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\omega_0\cdot\sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{12\pi}{\ln 50}\right)^2}}$$

$$\omega_e=0{,}9947\cdot\omega_0=4{,}9735\,s^{-1}$$

4c. In der Vorlesung wurde die Lösung für die Geschwindigkeit einer gedämpften Schwingung mit den Anfangsbedingungen $x(t=0)=x_m$ und $v_0=\dot{x}(t=0)=0$ abgeleitet

(Siehe Formelsammlung): $\dot{x}(t)=x_m\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta t}\cdot\sin(\omega_e t)$

Ableitung von $\dot{x}(t)$: $\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\left(e^{-\beta t}\cdot(-\beta)\cdot\sin(\omega_e t)+e^{-\beta t}\omega_e\cos(\omega_e t)\right)$

Beschleunigung: $$\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\cdot e^{-\beta t}\left(\omega_e\cos\left(\omega_e t\right)-\beta\sin\left(\omega_e t\right)\right)$$

Für $t=0$ gilt: $$\ddot{x}_0=\ddot{x}(t=0)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\cdot 1\cdot\left(\omega_e\cdot 1-\beta\cdot 0\right)=x_m\cdot\omega_0^2$$

$$\ddot{x}_0=0{,}1\cdot 5{,}0^2\,\frac{m}{s^2}=2{,}5\frac{m}{s^2}$$

4d. Zusatzaufgabe: Die Maxima und Minima der Geschwindigkeit entsprechen den Nullstellen der Beschleunigungsfunktion: $$\ddot{x}(t)=\frac{x_m\cdot\omega_0^2}{\omega_e}\cdot e^{-\beta t}\left(\omega_e\cos\left(\omega_e t\right)-\beta\sin\left(\omega_e t\right)\right)$$

Die Beschleunigung ist also genau dann bei $t=T_{\max}$ gleich Null,

wenn $$\omega_e\cos\left(\omega_e T_{\max}\right)-\beta\sin\left(\omega_e T_{\max}\right)=0$$

$$\omega_e\cos\left(\omega_e T_{\max}\right)=\beta\sin\left(\omega_e T_{\max}\right)$$

$$\tan\left(\omega_e T_{\max}\right)=\frac{\omega_e}{\beta}=\frac{0{,}9947\cdot\omega_0}{0{,}1038\cdot\omega_0}=9{,}5829$$

Es folgt: $$\omega_e T_{\max}=0{,}4669\cdot\pi=0{,}9338\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$T_{\max}=0{,}9338\cdot\frac{1}{0{,}9947\cdot\omega_0}\frac{\pi}{2}$$

$$T_{\max}=0{,}9388\cdot\frac{T_0}{2\pi}\frac{\pi}{2}=0{,}9388\cdot\frac{T_0}{4}$$

Kommentar: Eine ungedämpfte Schwingung hat das Geschwindigkeitsmaximum bei $\frac{T_0}{4}$. Bei der gedämpften Schwingung wird das Geschwindigkeitsmaximum früher erreicht, im Beispiel beträgt die Abweichung ~6,1%.

Max. Geschwindigkeit: $$\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta\cdot 0{,}9388\frac{T_0}{4}}\cdot\sin\left(0{,}9947\ \omega_0\cdot 0{,}9388\,\frac{T_0}{4}\right)$$

mit $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ $$\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0^2}{\omega_e}e^{-\beta\cdot 0{,}9388\frac{T_0}{4}}\cdot\sin\left(0{,}9338\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{x}(t)=\frac{x_m\ \omega_0}{0{,}9947}e^{-\beta\cdot 0{,}9388\frac{T_0}{4}}\cdot 0{,}9946=0.9999\cdot x_m\ \omega_0\ e^{-\beta\cdot 0{,}9388\frac{T_0}{4}}$$

$$\dot{x}(t)=x_m\ \omega_0\cdot e^{-0{,}1038\frac{2\pi}{T_0}\cdot 0{,}9388\frac{T_0}{4}}=x_m\ \omega_0\cdot e^{-0{,}0974\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{x}(t)=x_m\ \omega_0\cdot 0{,}8581$$

$$\dot{x}(t)=0{,}10\,m\cdot 5{,}0\ s^{-1}\cdot 0{,}8581=0{,}4290\,\frac{m}{s}$$