Fachhochschule Hannover | 01.07.2008
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik II im SS08 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

**1.** Ein Floß besteht aus zehn aneinander gebundenen Baumstämmen. Jeder hat einen Durchmesser von 40 cm und eine Länge von 5,85 m. Wie viele Personen ( $m_P = 70\,kg$ ) kann das Floß aufnehmen ohne dass diese nasse Füße bekommen, wenn das Holz eine Dichte von $\sigma_H = 0,65\,g\,cm^{-3}$ besitzt und

**a.** in einer Meeresbucht betrieben werden soll ( $\rho_{W1} = 1,032\,g\,cm^{-3}$ ).

**b.** Was passiert wenn das Floß mit der in **1a.** bestimmten maximalen Personenzahl in eine Flußmündung mit einer Wasserdichte von $\rho_{W2} = 1,000\,g\,cm^{-3}$ steuert? Begründung!

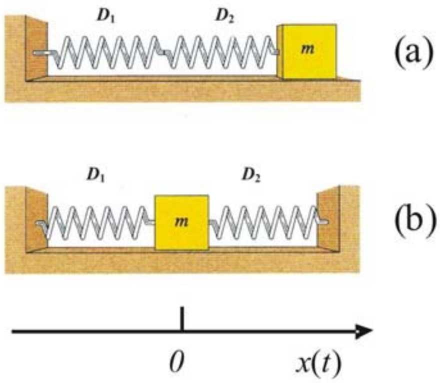
**2.** Die Reifendruckmessgeräte an der Tankstelle messen den Reifendruck relativ zum äußeren Luftdruck. Ein PKW mit einer Leermasse von 1570 kg wird im Normalbetrieb mit einem Reifendruck von 2,1 bar befüllt.

**a.** Wie groß ist die Reifenaufstandfläche (bei einem Fahrzeug mit vier Rädern)?

**b.** Auf einer Urlaubsreise wird der PKW bis zur höchsten zulässigen Gesamtmasse von 2095 kg beladen. Wie muss der Fahrer den Reifendruck anpassen, damit die Reifenaufstandfläche gegenüber dem Normalbetrieb gleich bleibt.

**c.** Bei langen Matsch- oder Sandstrecken soll man im Extremfall den Reifendruck auf 0,5 bar senken. Warum ? Was ändert sich?

**3.** Eine Masse $m$ wird in unterschiedlichen Anordnungen (a) und (b) mit zwei Federn verbunden, die die Federkonstanten $D_1 = D_2 = D$ besitzen.




**a.** Welches Verhältnis haben die Schwingungsdauern $T_a/T_b$ ?

**b.** Welche Werte ergeben sich für $T_a$ und $T_b$ , wenn $m = 1\,kg$ und $D = 200\,N\,m^{-1}$ .

**c.** Betrachten Sie die Anordnung (b) mit den Daten von **3b.**: Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Auslenkung $x(t = 0) = 0\,cm$ betragen und der ruhenden Masse $m$ ein Kraftstoß in +$x$-Richtung (z. B. ein Hammerschlag mit einer mittleren Kraft von $\overline{F} = 400\,N$ während einer Kontaktzeit von $\Delta t = 0,005\,s$ ) versetzt werden. Berechnen Sie die Auslenkung und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2\,s$ .

**4.** Ein dünner Stab der Länge $L = 0,6\;m$ und der Masse $m = 0,8\,kg$ wird um einen Punkt, der von dem einen Ende 20 cm und von dem anderen 40 cm entfernt ist, drehbar aufgehängt.

**a.** Wie groß ist die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung.

**b.** Wie lang müsste ein Faden sein, damit eine daran hängende Masse mit derselben Schwingungsdauer schwingt?

**c.** Das Pendel soll um einen Winkel von 32° ausgelenkt werden und anschließend frei schwingen. Nach 6 Schwingungen ist der maximale Winkelausschlag nur noch 4° beträgt. Wie groß ist die Abklingkonstante?

**d.** Welche Energie hat das Pendel bei der Auslenkung von $\varphi(t = 0) = 32°$ ?

**e.** Welche Energie hat es nach einer Schwingungsdauer?

**5.** Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:

**a.** Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten $\beta$ mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$

**b.** Was passiert, wenn für die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ gilt? Begründung!

**c.** Skizzieren Sie den Winkel $\delta$ der Phasenverschiebung als Funktion von $\omega_a/\omega_0$ .

**Verwenden Sie zur Vereinfachung $g$ = 10 ms$^{-2}$**

**Lösungen:**

**1a.** Wenn die auf dem Floß bedindlichen Personen keine nassen Füsse bekommen sollen, muss gelten:

$$Auftriebskraft \geq Gewichtskraft$$

$$\rho_{W1} \cdot V_{Holz} \cdot g \geq \left(m_{Holz} + m_{Menschen}\right) \cdot g$$

$$m_{Menschen} \leq \left(\rho_W \cdot V_{Holz} - m_{Holz}\right) = \left(\rho_W \cdot V_{Holz} - \rho_{Holz} \cdot V_{Holz}\right)$$

$$m_{Menschen} \leq \left(\left(\rho_W - \rho_{Holz}\right) \cdot n \cdot \left(\pi \frac{D^2}{4}\right) \cdot L\right)$$

$$m_{Menschen} \leq \left(\left(1,032 - 0,65\right) g\, cm^{-3} \cdot 10 \cdot \left(\pi \frac{40^2\, cm^2}{4}\right) \cdot 600\, cm\right)$$

$$m_{Menschen} \leq 2808\, kg$$

Maximale Zahl der Personen ist 40: $m_{Menschen} = 40 \cdot 70\, kg = 2800\, kg \leq 2808\, kg$

**1b.** Vergleich von Auftriebskraft und Gewichtskraft.

Auftriebskraft: $F_A = \rho_{W2} \cdot V_{Holz} \cdot g$

$$F_A = 10^{-3}\, kg\, cm^{-3} \cdot 10 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2\, cm^2}{4} 585\, cm \cdot 10\, m\, s^{-2}$$

$$F_A = 73,51\, kN$$

Gewichtskraft: $F_g = \left(m_{Menschen} + m_{Holz}\right) g = \left(m_{Menschen} + \rho_H \cdot V_{Holz}\right) g$

$$F_g = \left(40 \cdot 70\, kg + 0,65 \cdot 10^{-3}\, g\, cm^{-3} \cdot 10 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 40^2\, cm^2}{4}\right) \cdot 585\, cm\right) g$$

$$F_g = \left(2800\, kg + 4778\, kg\right) g = 7578\, kg \cdot g$$

$$F_g = 75,78\, kN$$

Da die Auftriebskraft kleiner als die Gewichtskraft ist, sinkt das Floß.

**2a.** Reifendruck: $p_R = 2,1 bar = 2,1 \cdot 10^5\, Pa = \frac{F_R}{A_R}$

wobei: $F_R$ - Gewichtskraft des PKW pro Reifen

$A_R$ - Reifenaufstandsfläche

Lösung: $A_R = \frac{F_R}{p_R} = \frac{F_g/4}{p_R} = \frac{1570 \cdot 10\, N/4}{2,1\, 10^5\, N\, m^{-2}} = 1,87 \cdot 10^{-2}\, m^2$

mit $F_g$ - Gewichtskraft des PKW

$$A_R = 1,87 \cdot 10^{-2}\, m^2 = 187 cm^2$$

**2b.** Umstellen nach Reifendruck: $p_R = \frac{F_g/4}{A_R} = \frac{2095\, kg \cdot 10 ms^{-2} \cdot 0,25}{1,87 10^{-2} m^{-2}} = 2,80 \cdot 10^5\, Pa$

$$p_R = 2,8\, bar$$

**2c.** Ein niedriger Reifendruck vergrößert die Kontaktfläche von Reifen und Untergrund. Da Druck und Kontaktfläche umgekehrt proportional sind, erreicht man $p_R = 0,5\, bar$ eine Kontaktfläche von:

$$A_R\left(p_R = 0,5\, bar\right) = \frac{2,1 bar}{0,5\, bar} \cdot 187\, cm^2 = 785 cm^2$$

**3a.** **Anordnung (a):**

Wenn zwei Federn entsprechend Abb. (a) in Reihe angeordnet werden, ist die Kraft an beiden Federn gleich: $F_1 = F_2 = F$

Der Federweg für beide Federn in Reihe $x_{ges}$ ist die Summe der Federwege der Einzelfedern:

$x_{ges} = x_1 + x_2$

Es gilt: $F_1 = D_1 \cdot x_1$ und $F_2 = D_2 \cdot x_2$

und es folgt: $F = D_1 \cdot x_1$ und $F = D_2 \cdot x_2$

Einsetzen: $x_{ges} = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$

$$F = \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)^{-1} \cdot x_{ges}$$

mit: $D_{ges,a} = \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)^{-1} = \frac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}$

Für die Eigenkreisfrequenz des Federpendels der Abb. (a) gilt:

$$\omega_{0,a} = \sqrt{\frac{D_{ges,a}}{m}} = \frac{2\pi}{T_{0,a}}$$

$$T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \frac{m \cdot (D_1 + D_2)}{D_1 \cdot D_2} = 4\pi^2 \frac{m \cdot (D + D)}{D \cdot D}$$

$$T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \cdot 2 \cdot \frac{m}{D} \qquad (*)$$

**Anordnung (b):**

Herleitung der Schwingungsdauer: Auf die Masse *m* wirkt die Summe der Zugkraft der Feder (1) und der Druckkraft der Feder (2) (oder umgekehrt). Die Zugkraft der einen Feder wirkt immer in gleiche Richtung wie die Druckkraft der anderen.

D'Alembertsches Prinzip: $(-D_1 x - D_2 x) - m\ddot{x} = 0$

$$(-D_1 - D_2)x - m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{D_1 + D_2}{m} x = 0$$

Es folgt: $\omega_{0,b} = \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{2\pi}{T_{0,b}}$

$$T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{D_1 + D_2} = 4\pi^2 \frac{m}{D + D}$$

$$T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{D} \qquad (**)$$

Für das Verhältnis der Schwingungsdauer soll gelten:

$$\left( \frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} \right)^2 = \frac{2}{0,5} = 4$$

Lösung: $\frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} = 2$

**3b.** Anordnung (a): $T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \cdot 2 \cdot \frac{1\,kg}{200\,N\,m^{-1}} = 0,3948\,s^2$

$$T_{0,a} = 0,6283\,s$$

Anordung (b): $T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1\,kg}{200\,N\,m^{-1}} = 0,0987\,s^2$

$$T_{0,b} = 0,3142\,s$$

**3c.** Es gilt: **Kraftstoß = Impulsänderung**

$$\int F(t)\,dt \cong \overline{F} \cdot \Delta t = \Delta p = m \cdot \Delta v_0 = m(v_0 - 0) = m v_0$$

Für $v_0$ ergibt sich: $$v(t=0)=v_0=\frac{\bar{F}\cdot\Delta t}{m}=\frac{400N\cdot 0{,}005s}{1kg}=2ms^{-1}$$

Allgemeine Lösung eines ungedämpften schwingenden System (siehe Formelsammlung):

$$x(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t+\delta)$$

Es folgt für die Geschwindigkeit: $$v(t)=\dot{x}(t)=A\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t+\delta)$$

**Anfangsbedingung Nr.1:** $$x(t=0)=0$$

$$x(t=0)=0=A\cdot\sin(\omega_0\cdot 0+\delta)=A\cdot\sin(\delta)$$

Nicht-triviale Lösung: $\sin(\delta)=0$ also $\delta=0$

**Anfangsbedingung Nr.2:** $$v(t=0)=v_0=\dot{x}_0(t)=A\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0\cdot 0+\delta)$$

Da $\delta=0$ folgt: $$v(t=0)=v_0=\dot{x}_0(t)=A\cdot\omega_0\cdot 1=A\cdot\omega_0$$

Es ist: $$\omega_{0,b}=\sqrt{\frac{D_1+D_2}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 200\,N\,m^{-1}}{1kg}}=20\,s^{-1}$$ (siehe **3b.**)

$$A=\frac{v_0}{\omega_0}=\frac{2ms^{-1}}{20s^{-1}}=0{,}1\,m$$

Funktion der Auslenkung: $$x(t)=(0{,}1m)\cdot\sin\left(\left(20s^{-1}\right)\cdot t\right)$$

Funktion der Geschwindigkeit: $$v(t)=(0{,}1m)\cdot\left(20s^{-1}\right)\cdot\cos\left(\left(20s^{-1}\right)\cdot t\right)$$

Lösung für Auslenkung: $$x(t=2s)=(0{,}1m)\cdot\sin\left(\left(20s^{-1}\right)\cdot 2s\right)$$

$$x(t=2s)=0{,}0745m=7{,}45cm$$

Lösung für Geschwindigkeit: $$v(t=2s)=(0{,}1m)\cdot\left(20s^{-1}\right)\cdot\cos\left(\left(20s^{-1}\right)\cdot 2s\right)$$

$$v(t=2s)=-1{,}33ms^{-1}$$

**4a.** Der drehende Stab mit Länge $L$ stellt ein physikalisches Pendel dar. Nach Steinerschem Satz gilt für das Trägheitsmoment: $$J_{ges}=\frac{1}{12}mL^2+md^2$$

wobei $h$ der Abstand zwischen Dreh und Schwerpunkt ist.

Es gilt: $$d=10cm$$

$$J_{ges}=\frac{1}{12}\cdot 0{,}8kg\cdot 0{,}6^2m^2+0{,}8kg\cdot 0{,}1^2m^2$$

$$J_{ges}=0{,}032\,kg\,m^2$$

Eigenfrequenz: $$\omega_0=\sqrt{\frac{mgd}{J}}=\sqrt{\frac{0{,}8kg\cdot 10m\cdot 0{,}1m}{0{,}032\,kg\,m^2\,s^2}}=5{,}0000\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer: $$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=1{,}2566\,s$$

**4b.** Mathematisches Pendel: $$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Pendellänge: $$l=\frac{g}{\omega_0^2}=\frac{10ms^{-2}}{5^2s^{-2}}=0{,}4m$$

**4c.** Laut Formelsammlung gilt für die Auslenkung einer gedämpften Schwingung für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)=\varphi_0=32°$ und $\dot{\varphi}(t=0)=0$.

$$\varphi(t)=\varphi_0\,e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_e t)+\cos(\omega_e t)\right)$$

Umrechnung ins Bogenmaß: $\varphi(t=0)=\varphi_0=\frac{32°}{180°}\cdot\pi=0,5585$

mit: $\omega_e^2=\omega_0^2-\beta^2$

Für $t=6T_e$ gilt laut Aufgabenstellung: $\varphi(6T_e)=4°$

Umrechnung ins Bogenmaß: $\varphi(6T_e)=\frac{4°}{180°}\cdot\pi=0,0698$

$$\varphi(6T_e)=4°=\frac{4°}{180°}\cdot\pi=0,0698$$

Es gilt: $\varphi(6T_e)=\varphi_0\, e^{-\beta 6T_e}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_e\, 6T_e)+\cos(\omega_e\, 6T_e)\right)$

Es ist: $\sin(\omega_e\, 6T_e)=\sin\left(\omega_e\, 6\frac{2\pi}{\omega_e}\right)=\sin(\,6\cdot 2\pi\,)=0$

und: $\cos(\omega_e\, 6T_e)=\cos\left(\omega_e\, 6\frac{2\pi}{\omega_e}\right)=\cos(\,6\cdot 2\pi\,)=1$

Es folgt: $\varphi(6T_e)=\varphi_0\, e^{-\beta 6T_e}$

$$\frac{\varphi(6T_e)}{\varphi_0}=e^{-\beta 6T_e}$$

$$\beta=\frac{1}{6T_e}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(6T_e)}$$

Exakte Beziehung für $\beta$: $\beta=\frac{1}{6T_e}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(6T_e)}=\frac{1}{6\cdot T_e}\ln\frac{32°}{4°}=\frac{\ln 8}{6\cdot T_e}$

Näherungslösung: Setze $T_e\cong T_0$ $\beta=\frac{1}{6T_0}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(6T_0)}=\frac{\omega_0\cdot\ln 8}{6\cdot 2\pi}$

$$\beta=\frac{5\,s^{-1}\cdot\ln 8}{12\pi}=0,2758\,s^{-1}$$

---

Man kann die Abklingkonstante aber auch exakt bestimmen:

Es gilt: $\omega_e^2=\omega_0^2-\beta^2$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2}=\frac{4\pi^2}{T_0^2}-\frac{(\ln 8)^2}{6^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1+\frac{(\ln 8)^2}{4\pi^2 6^2}\right)=\frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_e=\sqrt{1+\frac{(\ln 8)^2}{4\pi^2 6^2}}\cdot T_0=\sqrt{1+0,003043}\cdot T_0$$

$$T_e=1,00152\cdot T_0$$

$$\beta=\frac{\ln 8}{6\cdot 1,00152\cdot T_0}=0,99848\cdot\beta_{Näherung}$$

$$\beta_{exakt}=0,99848\cdot\beta_{Näherung}=0,2754\,s^{-1}$$

Der Unterschied ist aber vernachlässigbar. Für diese Lösung gibt es Sonderpunkte.

---

**4d.** Die potentielle Energie entspricht der Hubarbeit für den Schwerpunkt:

$$E_{pot} = m_S \; g \; h(32°)$$

mit:

$$\cos 32° = \frac{d - h(32°)}{d} = 1 - \frac{h(20°)}{d}$$

$$h(32°) = d\,(1 - \cos 32°) = 0{,}1\,m\,(1 - 0{,}8480) = 0{,}01520\,m$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = m_S \; g \; h(32°) = 0{,}8\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 0{,}01520\,m$$

$$E_{pot} = m_S \; g \; h(32°) = 0{,}1216\,J$$

**4e.** Beim Schwerependel (mathematisches oder physikalisches Pendel) verwendet man eine lineare Näherung für das Rückstelldrehmoment (bzw. für die Rückstellkraft):

$$M(\varphi) \cong -D^* \varphi$$

Die Schwingungsenergie ist dann proportional zum Quadrat der maximalen Auslenkung:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D^* \varphi^2$$

Es folgt:

$$E_{pot}(t = 1 \cdot T_e) = \frac{1}{2} D^* (\varphi(t))^2 = \frac{1}{2} D^* \left( \varphi_0 \, e^{-\beta \cdot T_e} \left( \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_e T_e) + \cos(\omega_e T_e) \right) \right)^2$$

Da gilt, $\sin(\omega_e \cdot T_e) = 0$ und $\cos(\omega_e \cdot T_e) = 1$ folgt:

$$E_{pot}(T_e) = \frac{1}{2} D^* \varphi_0^2 \cdot e^{-2 \cdot \beta \cdot T_e} = E_{pot}(t = 0) \cdot e^{-2 \cdot \beta \cdot T_e}$$

$$\frac{E_{pot}(T_e)}{E_{pot}(t = 0)} = e^{-2 \cdot \beta \cdot T_e}$$

Es gilt (siehe Aufg. 4c.):

$$\beta \cdot T_e = \frac{\ln 8}{6} = 0{,}3466\,s^{-1}$$

Es folgt:

$$\frac{E_{pot}(T_e)}{E_{pot}(t = 0)} = e^{-2 \cdot 0{,}3466} = 0{,}4999\,(\square \sim 50\%)$$

Lösung:

$$E_{pot}(T_e) = 0{,}4999 \cdot 0{,}1216\,J = 0{,}0608\,J$$

**5a.** Siehe Vorlesung

**5b.** Wenn:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$$

folgt:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$$

**Die Resonanzfrequenz ist also bei** $\omega_a = \omega_R = 0$**, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.**

**5c.** Siehe Vorlesung