Fachhochschule Hannover — 30.06.2009
Fachbereich Maschinenbau — Zeit: 90 min
Fach: Physik II im SS09 — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Zur Bestimmung der Dichte werden zwei metallische Probekörper jeweils in Luft (L) und in Wasser (W) gewogen. Das Verhältnis der Waagenanzeigen A_L / A_W ergibt für Probe 1 $(A_L / A_W)_1 = 1{,}281$ und für Probe 2 $(A_L / A_W)_2 = 1{,}054$.

a. Bestimmen Sie die Dichten ρ_1 und ρ_2. Aus welchen Elementen bestehen die Probekörper?

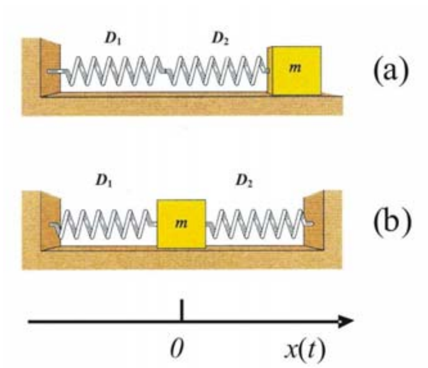
2. Ein schwarzer dünner Spezialkunststoffschlauch (Zylinder) mit Länge 2 m, Radius 25 cm und Masse $m_B = 50\,g$ kann als Solarballon dienen, wenn bei Sonnenbestrahlung die Luft im Inneren erwärmt wird. Um aufsteigen zu können, darf der Ballon im kalten Zustand nicht mit der maximal möglichen Luftmenge gefüllt werden. Am Startort des Ballons herrschen ein Luftdruck von 970 hPa und eine Lufttemperatur von 15°C.

a. Welches Luftvolumen $V_{\max}$ darf höchstens eingefüllt werden und auf welche Temperatur muss die Luft im Inneren dann durch die Sonnenbestrahlung erwärmt werden, damit der Ballon schwebt?

Dichte der Luft bei 0°C und 1013 hPa: 1,293 kg m^{-3}.

b. Man nehme an, dass 90% des maximal möglichen Luftvolumens beim Start eingefüllt werden. Welche Höhe kann der Ballon erreichen.

3. Eine Masse m wird in unterschiedlichen Anordnungen (a) und (b) mit zwei Federn verbunden, die unterschiedliche Federkonstanten D_1 und D_2 besitzen.



a. Das Verhältnis der Schwingungsdauern beträgt $T_{0,a} : T_{0,b} = 5:2$. Welches Verhältnis $D_1 : D_2$ besitzen die Federkonstanten?

b. Welche Werte ergeben sich für $T_{0,a}$ und $T_{0,b}$, wenn $m = 1\,kg$ und $D_1 = 160\,N\,m^{-1}$ beträgt.

c. Betrachten Sie die Anordnung (a) mit den Daten von **3a**.: Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Auslenkung $x(t=0) = 15\,cm$ betragen und die Geschwindigkeit $v(t=0) = 0$ sein. Berechnen Sie die Auslenkung und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2\,s$.

4. Auf einer senkrecht stehenden Drehachse (Masse vernachlässigbar) ist eine homogene Kreisscheibe der Masse der Scheibe $m_S = 1{,}0\,kg$ und Radius $R_S = 0{,}08\,m$ befestigt. Die Achse verläuft senkrecht zur Scheibenebene durch den Schwerpunkt. Mit einer Spiralfeder der Winkelrichtgröße $D^* = 0{,}2\,N\,m$ wird die Anordnung zu einem Drehpendel das durch ein periodisches Drehmoment $M(t) = M_0 \cdot \sin(\omega_a t)$ mit $M_0 = 0{,}08\,Nm$ angeregt werden soll. Das Resonanzmaximum liegt bei der Kreisfrequenz $\omega_a = \omega_R = 7\,s^{-1}$.

a. Wie groß ist die Eigen(kreis-)frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung und wie groß ist die Abklingkonstante β?

b. Wie groß ist das Amplitudenmaximum bei der Resonanzbedingung?

c. Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:
Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$
Was passiert, wenn für die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ gilt? Begründung!
Skizzieren Sie den Winkel δ der Phasenverschiebung als Funktion von ω_a / ω_0.

Verwenden Sie zur Vereinfachung g = 10 ms^{-2}

Lösungen:

1a. Die Anzeige A einer Waage ist proportional zur Differenz von der Gewichtskraft $F_g = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$ eines Körpers *K* und dessen Auftriebskraft $F_A = \rho_U \cdot V_K \cdot g$ in einem Umgebungsmedium *U*.

In der Umgebung Luft gilt: $F_L = F_{gL} - F_{AL} = \rho_K \cdot V_K \cdot g - \rho_L \cdot V_K \cdot g$

In der Umgebung Wasser gilt: $F_W = F_{gW} - F_{AW} = \rho_K \cdot V_K \cdot g - \rho_W \cdot V_K \cdot g$

Definiert man: $R := \dfrac{F_L}{F_W} = \dfrac{\rho - \rho_L}{\rho - \rho_W}$,

folgt für die Dichte: $\rho = \dfrac{R \cdot \rho_W - \rho_L}{R - 1}$

Probekörper 1: $\rho_1 = 4{,}54\, g\, cm^{-3}$

Beim Probekörper 1 handelt es sich um: Ti

Probekörper 2: $\rho_1 = 19{,}3\, g\, cm^{-3}$

Beim Probekörper 2 handelt es sich um: Au

2a. Volumen des prallen Ballons: $V_{B,p} = \pi R^2 L = 0{,}3927\, m^3$

Es gilt für die Luftdichte am Startort $\rho_1^{Luft} = \rho_0^{Luft} \dfrac{T_0 \cdot p_1}{T_1 \cdot p_0}$

$$\rho_1^{Luft} = 1{,}293\, kg\, m^{-3} \cdot \frac{273 \cdot 970}{288 \cdot 1013} = 1{,}174\, kg\, m^{-3}$$

Schwebebedingung: Auftriebskraft = Gewichtskraft

$$A = \rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g = \left(m_B + m_{Luft}\right) \cdot g = F_g$$

$$\rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g = \left(m_B + \rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft}\right) \cdot g \qquad (*)$$

Wobei der Index 1 die Zustandsgrößen der Luft am Startort beim Einfüllen bezeichnet. Laut Aufgabenstellung soll das eingefüllte Luftvolumen nach Erwärmung beim Erreichen der Schwebebedingungen gerade so dimensioniert sein, dass es den Ballon prall füllt. Deshalb wird in Gl. (*) auf der linken Seite das Prallvolumen des Ballons eingesetzt.

Es folgt: $V_1^{Luft} = \dfrac{\rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p} - m_B}{\rho_1^{Luft}} = V_{B,p} - \dfrac{m_B}{\rho_1^{Luft}}$

$$V_1^{Luft} = 0{,}3927\, m^3 - \frac{0{,}05\, kg}{1{,}174\, kg\, m^3} = 0{,}3501\, m^3$$

Für das Verhältnis der Volumina gilt:

$$\frac{V_1^{Luft}}{V_{B,p}} = \frac{0{,}3501}{0{,}3927} = 89\%$$

Im Schwebefall soll sich das bei Startortbedingungen eingefüllt Gasvolumen $V_1^{Luft} = 0{,}3501 m^3$ infolge der Erwärmung durch die Sonneneinstrahlung auf das Ballonvolumen V_B ausgedehnt haben. Da die Masse des Gases im Ballon konstant ist, gilt:

$$\rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft} = \rho_2^{Luft} \cdot V_{B,p}$$

Es folgt für die Luftdichte im Inneren des Ballons:

$$\rho_2^{Luft} = \rho_1^{Luft} \cdot \frac{V_1^{Luft}}{V_{B,p}}$$

$$\rho_2^{Luft} = 1{,}174\, kg\, m^{-3} \cdot \frac{0{,}3501}{0{,}3927} = 1{,}047\, kg\, m^{-3}$$

Laut allgemeiner Gasgleichung gilt: $\dfrac{p_1}{\rho_1 \cdot T_1} = \dfrac{p_2}{\rho_2 \cdot T_2}$

Da $p_1 = p_2$ ist, folgt: $T_2 = T_1 \cdot \dfrac{\rho_1^{Luft}}{\rho_2^{Luft}} = 288\,K \cdot \dfrac{1{,}174}{1{,}047} = 323\,K \approx 50°C$

Dies entspricht einer Erwärmung durch die Sonneneinstrahlung von 15°Cauf 50°C.

2b. Wenn beim Start weniger Luftvolumen eingefüllt wird, verringert sich die Masse des Ballons. Um den Ballon prall zu füllen, muss die Temperatur des Gases im Inneren höher sein, als in Aufg. 2a. Die Maximalhöhe ergibt sich wieder aus der Schwebebedingung.

Es gilt: $\rho_2^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g = \left(m_B + 0{,}9 \cdot \rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft}\right) \cdot g$

wobei ρ_2^{Luft} die Dichte der Luft in der Maximalhöhe $h_{\max}$ über der Startstelle darstellt. Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel folgt:

$$\rho_2^{Luft}\left(h_{\max}\right) = \rho_1^{Luft} \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h_{\max}}$$

Es folgt:

$$\rho_1^{Luft} \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h_{\max}} \cdot V_{B,p} = \left(m_B + 0{,}9 \cdot \rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft}\right)$$

$$e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h_{\max}} = \frac{m_B + 0{,}9 \cdot \rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft}}{\rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p}}$$

$$h_{\max} = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} \ln \frac{\rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p}}{m_B + 0{,}9 \cdot \rho_1^{Luft} \cdot V_1^{Luft}}$$

$$h_{\max} = \frac{1013\,h\,Pa}{1{,}293\,kgm^{-3} \cdot 10\,ms^{-2}} \ln \frac{1{,}174 \cdot 0{,}3927}{0{,}05 + 0{,}9 \cdot 1{,}174 \cdot 0{,}3501}$$

$$h_{\max} = 7834\,m \cdot \ln \frac{0{,}4610}{0{,}4199}$$

$$h_{\max} = 7834\,m \cdot 0{,}09334$$

Maximalhöhe: $h_{\max} = 732\,m$ mit $g = 10\,m\,s^{-2}$

Maximalhöhe mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$: $h_{\max} = 7986\,m \cdot \ln \dfrac{0{,}4610}{0{,}4199}$

$h_{\max} = 745\,m$ mit $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

3a. Anordnung (a):

Wenn zwei Federn entsprechend Abb. (a) in Reihe angeordnet werden, ist die Kraft an beiden Federn gleich: $F_1 = F_2 = F$

Der Federweg für beide Federn in Reihe x_{ges} ist die Summe der Federwege der Einzelfedern:

$$x_{ges} = x_1 + x_2$$

Es gilt: $F_1 = D_1 \cdot x_1$ und $F_2 = D_2 \cdot x_2$

woraus folgt: $F = D_1 \cdot x_1$ und $F = D_2 \cdot x_2$

Einsetzen: $x_{ges} = \dfrac{F}{D_1} + \dfrac{F}{D_2}$

$$F = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right)^{-1} \cdot x_{ges}$$

mit: $D_{ges,a} = \left(\dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{D_2}\right)^{-1} = \dfrac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}$

Für die Eigenkreisfrequenz des Federpendels der Abb. (a) gilt:

$$\omega_{0,a} = \sqrt{\frac{D_{ges,a}}{m}} = \frac{2\pi}{T_{0,a}}$$

Es folgt für Anordnung (a): $$\boxed{T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \frac{m \cdot (D_1 + D_2)}{D_1 \cdot D_2}} \qquad (*)$$

Anordnung (b):

Herleitung der Schwingungsdauer für (b): Auf die Masse *m* wirkt die Summe der Zugkraft der Feder (1) und der Druckkraft der Feder (2) (oder umgekehrt). Die Zugkraft der einen Feder wirkt immer in gleiche Richtung wie die Druckkraft der anderen.

D'Alembertsches Prinzip: $$(-D_1\,x - D_2\,x) - m\,\ddot{x} = 0$$

$$(-D_1 - D_2)\,x - m\,\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{D_1 + D_2}{m}\,x = 0$$

Es folgt: $$\omega_{0,b} = \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{2\,\pi}{T_{0,b}}$$

Es folgt für Anordnung (a): $$\boxed{T_{0,b}^2 = 4\,\pi^2 \frac{m}{D_1 + D_2}} \qquad (**)$$

Aus Gleichung (*) und (**) kann man für das Verhältnis der Quadrate der Schwingungsdauer folgende Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{T_{0,a}}{T_{0,b}}\right)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot (D_1 + D_2)^2}{4\pi^2 \cdot m \cdot D_1 \cdot D_2} = \frac{(D_1 + D_2)^2}{D_1 \cdot D_2}$$

Es folgt: $$\left(\frac{T_{0,a}}{T_{0,b}}\right)^2 = \frac{D_1^2 + 2\,D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 \cdot D_2} = \frac{D_1}{D_2} + 2 + \frac{D_2}{D_1}$$

An dieser Stelle kann bereits durch Einsetzen und „raten“ das Ergebnis finden.

Mit $\frac{T_{0a}}{T_{0b}} = \frac{5}{2}$ folgt: $$\frac{25}{4} = \frac{D_1}{D_2} + 2 + \frac{D_2}{D_1}$$

Es folgt: $$\frac{17}{4} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{D_1}{D_2} + \frac{1}{D_1/D_2}$$

Ein Vergleich ergibt, dass entweder $\frac{D_1}{D_2} = 4$ oder $\frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{4}$ Lösung sein muss.

Exakte Lösung:

Zur Vereinfachung der folgenden Umformungen setze man:

$$\alpha = \frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} \text{ und } \beta = \frac{D_1}{D_2}$$

Es folgt: $$\alpha^2 = \beta + 2 + \frac{1}{\beta}$$

$$\beta^2 + 2\beta \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\beta^2 + 2\beta \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 = \left(1 - 2\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4}\right) - 1$$

$$\left(\beta + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)^2 = \frac{\alpha^4}{4} - \alpha^2$$

$$\beta_\pm = \pm\sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^2} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

Mit $\alpha = \frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} = \frac{5}{2}$ folgt: $\beta_+ = \frac{D_1}{D_2} = 4$

und $\beta_- = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{4}$

Die negative Lösung entspricht der positiven Lösung dann, wenn man die beiden Federn in Anordnung (a) und (b) vertauscht.

3b. Die Federkonstante der Feder Nr. 1 beträgt nach Aufgabenstellung $D_1 = 160 Nm^{-1}$.

Nach Lösung von 3a. gilt: $D_2 = \frac{1}{4} D_1 = 40 N\, m^{-1}$

Schwingungsdauer für (a): $T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \frac{1kg \cdot \left(160\, N\, m^{-1} + 40\, N\, m^{-1}\right)}{160 \cdot 40\, N^2 m^{-2}}$

$T_{0,a} = 1{,}1107\, s \cong 1{,}11\, s$

Schwingungsdauer für (b): $T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \frac{1kg \cdot m}{(160 + 40)\, N}$

$T_{0,b} = 0{,}4443\, s \cong 0{,}44\, s$

Probe: $\alpha = \frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} = 2{,}4999 \cong \frac{5}{2}$

3c. Die allgemeine Lösung eines ungedämpft schwingenden Systems lautet (siehe Formelsammlung):

Amplitude: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$

Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$

Anfangsbedingung Nr.1: $x(t=0) = x_0 = 0{,}15\, m$ (*)

Anfangsbedingung Nr.2: $v(t=0) = 0$ (**)

Aus (**) folgt: $v(t=0) = 0 = \dot{x}_0(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\delta)$

Da $A \neq 0$ und $\omega_0 \neq 0$ folgt: $\delta = \frac{\pi}{2}$

Einsetzen in (*) $x(t=0) = x_0 = 0{,}15\, m = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Lösung für A: $A = x_0 = 0{,}15\, m$

Eigenkreisfunktion: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_{0a}} = \frac{2\pi}{1{,}1107\, s} = 5{,}6570\, s^{-1}$

Amplitudenfunktion: $x(t) = (0{,}15\, m) \cdot \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = (0{,}15\, m) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

$x(t) = (0{,}15\, m) \cdot \cos(5{,}6570\, s^{-1} \cdot t)$

Geschwindigkeitsfunktion: $\dot{x}_0(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

$\dot{x}(t) = \left(0{,}8485\, m\, s^{-1}\right) \cdot \sin(5{,}6570\, s^{-1} \cdot t)$

Bestimmung von Amplitude und Geschwindigkeit für $t = 2\, s$

$x(t = 2\, s) = (0{,}15\, m) \cdot \cos(5{,}6570\, s^{-1} \cdot 2\, s)$

$$x(t=2\,s)=0{,}0469\,m=4{,}69\,cm$$
$$\dot{x}(t=2\,s)=\left(0{,}8485\,m\,s^{-1}\right)\cdot\sin(5{,}6570\,s^{-1}\cdot t)$$
$$\dot{x}(t=2\,s)=-0{,}8058\,m\,s^{-1}$$

4a. Das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe ist:

$$J_S=\frac{1}{2}m_S\,R^2\,.$$
$$J_S=0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}08^2\,kg\,m^2=0{,}0032\,kg\,m^2$$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0=\sqrt{\frac{D^*}{J}}=\sqrt{\frac{D^*}{\frac{1}{2}m_S\,R^2}}$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}08^2}\,s^{-2}}=7{,}9057\,s^{-1}$$

Periodendauer: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0{,}7948\,s$

Für ω_0, ω_R und β gilt die Verknüpfung: $\omega_R^2=\omega_0^2-2\beta^2$

Abklingkonstante β: $\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(7{,}9057^2-7{,}000^2\right)}$

$$\beta=2{,}5981\,s^{-1}$$

4b. Es gilt allgemein: $\varphi_{\max}(\omega_a,\omega_0,\beta)=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_a^2\right)^2+\left(2\beta\omega_a\right)^2}}$

Bei der Resonanzfrequenz gilt: $\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta)=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\left(2\beta\omega_R\right)^2}}$

mit: $\omega_R^2=\omega_0^2-2\beta^2$

$$\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta)=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_0^2+2\beta^2\right)^2+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}$$
$$\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta)=\frac{f_a}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}=\frac{f_a}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Die Eigenkreisfrequenz einer gedämpften Schwingung ist:

$$\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

Es folgt: $\varphi_{\max}(\omega_e,\beta)=\frac{f_a}{2\beta\,\omega_e}$

Winkelbeschleunigung: $f_a=\frac{M_0}{J}=\frac{0{,}08\,Nm}{0{,}0032\,kg\,m^2}=25\,s^{-2}$

$$\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{7{,}9057^2-2{,}5981^2}\;s^{-1}=7{,}4666\,s^{-1}$$
$$\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_e,\beta)=\frac{f_a}{2\beta\,\omega_e}$$

Amplitude im Bogenmaß: $\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_e,\beta)=\frac{25\,s^{-2}}{2\cdot 2{,}5981\cdot 7{,}4666\,s^{-2}}=0{,}6444$

Amplitude im Winkelmaß: $\varphi_{\max}(\omega_a=\omega_R,\omega_e,\beta)=\frac{0{,}6444}{\pi}\cdot 180=36{,}92°\cong 37°$

4c. Beschreibung einer gedämpften Schwingung:

Amplitudenverlauf: Siehe Vorlesung

Wenn: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$

folgt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 0$

Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.

Phasenverlauf: Siehe Vorlesung