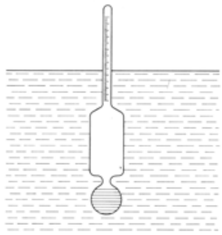
1. Ein Dichtemessgerät für Flüssigkeiten (Aräometer) besteht aus einem Schwimmkörper mit einem Volumen von 8 cm^3 und einer aufgesetzten Säule (r = 0,25 cm und Länge l = 12 cm). Beide Teile bestehen aus Glas und haben insgesamt eine Leermasse von 6 g. Der Körper wird mit Bleikügelchen gefüllt und schwimmt deshalb aufrecht in der zu untersuchenden Flüssigkeit.



a. Wie viel Blei muss eingefüllt werden, damit bei einer Dichte von 0,9978 g/cm^3 (Wasser bei 22°C) die Säule bis zur Mitte eintaucht?

b. Welche kleinste und welche größte Dichte kann man jetzt mit dem Aräometer messen?

2. Ein schwarzer dünner Spezialkunststoffschlauch (Zylinder) mit Länge 3 m und Radius 30 cm wird als Solarballon verwendet. Dazu füllt man den Ballon vor dem Start zu 85% mit Umgebungsluft, verschließt ihn und wartet. Durch die Sonnenbestrahlung wird die Luft im Inneren erwärmt, so dass die Ballonhülle nach einer gewissen Zeit prall gefüllt ist. Am Startort des Ballons herrschen ein Luftdruck von 930 hPa und eine Lufttemperatur von 10°C.

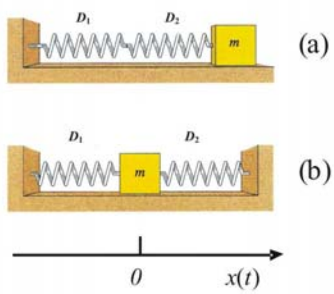
a. Der Ballon wird zunächst mit einer Schnur am Boden fest gehalten. Welche Temperatur muss die Luft im Inneren besitzen, damit der Ballon durch Ausdehnung des vorher eingefüllten Luftvolumens prall gefüllt werden kann.

Dichte der Luft bei 0°C und 1013 hPa: 1,293 kg m^{-3}.

b. Der pralle Ballon wird losgelassen. Man beobachtet, dass er auf eine Höhe von 800 m steigt. Welche Masse hat die Ballonhülle? Verwenden Sie hier g = 9,81 m s^{-2}

c. Welche Beschleunigung hatte der Ballon beim Start?

3. Eine Masse m wird in unterschiedlichen Anordnungen (a) und (b) mit zwei Federn verbunden, die die Federkonstanten $D_1 = D$ und $D_2 = 4 \cdot D$ besitzen.



a. Welches Verhältnis haben die Schwingungsdauern T_a / T_b ?

b. Welche Werte ergeben sich für T_a und T_b, wenn $m = 1kg$ und $D = 100\,N\,m^{-1}$.

c. Betrachten Sie die **Anordnung (b)** mit den Daten von **3b**.: Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Auslenkung $x(t=0) = +10\ cm$ betragen und die Geschwindigkeit $v(t=0) = 0$ sein. Berechnen Sie die Auslenkung und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1s$.

4. Zunächst wird die Masse $m = 1kg$ an eine Feder gehängt. Durch das Gewicht der Masse verlängert sich die Feder um $x_g = 8cm$. Anschließend wird die Masse um $x_0 = 12\,cm$ ausgelenkt und die Schwingung untersucht.

a. Bestimme die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung?

b. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse im Nulldurchgang ?

c. In Kombination mit Dämpfungselementen beobachtet man, dass die Auslenkung nach drei Schwingungen nur noch 2% der ursprünglichen Auslenkung beträgt. Wie groß ist die Abklingkonstante β? Wie groß ist die Schwingungsdauer T_e der gedämpften Schwingung?

d. Welchen Wert hat die Resonanzkreisfrequenz ω_R?

e. Wie groß ist für die in **5c**. beschriebene Dämpfung die Amplitudenüberhöhung im Resonanzfall?

Verwenden Sie zur Vereinfachung g = 10 ms^{-2}

Lösungen:

1a. Volumen des Schwimmkörpers, dass sich beim Eintauchen bis zur Mitte der Säule unter Wasser befinden: $V_{ges,1/2} = V_{SK} + V_{S,1/2}$

Volumen des Schwimmkörpers: $V_{SK} = 8\,cm^3$

Volumen der halben Säule: $V_{S,1/2} = \pi\, r^2\, h_{1/2} = \pi \cdot 0,25^2\, cm^2 \cdot 6\,cm = 1,178\,cm^3$

Gesamtvolumen: $V_{ges,1/2} = 8\,cm^3 + 1,178\,cm^3 = 9,178\,cm^3$

Schwebebedingung: Auftriebskraft = Gewichtskraft

$$F_A = \rho_W\, V_{ges,1/2}\, g = m_{ges}\, g = \left(m_{SK} + m_{Pb}\right) g = F_g$$

Lösung für m_{Pb}: $m_{Pb} = \rho_W \cdot V_{ges,1/2} - m_{SK}$

$$m_{Pb} = 0,9978\,g\,cm^{-3} \cdot 9,178\,cm^3 - 6\,g = 3,158\,g$$

1b. Der kleinsten Dichte entspricht das größte Eintauchvolumen:

$$V_{ges,1} = \left(8 + \pi \cdot 0,25^2 \cdot 12\right) cm^3 = 10,356\,cm^3$$

Da die Gesamtmasse des Aräometers konstant bleibt, gilt:

Kleinste Dichte: $\rho_{\min} = \rho_W \cdot \frac{V_{ges,1/2}}{V_{ges,1}}$

$$\rho_{\min} = 0,9978 \cdot \frac{9,178}{10,356}\, g\ cm^{-3} = 0,8843\,g\ cm^{-3}$$

Der größten Dichte entspricht das kleinste Eintauchvolumen:

Größte Dichte: $\rho_{\max} = \rho_W \cdot \frac{V_{ges,1/2}}{V_{ges,0}}$

$$\rho_{\max} = 0,9978 \cdot \frac{9,178}{8}\, g\ cm^3 = 1,145\ g\ cm^3$$

2a. Volumen des prallen Ballons: $V_{B,p} = \pi\, R^2\, L = 0,8482\,m^3$

Es gilt für die Luftdichte am Startort $\rho_1^{Luft} = \rho_0^{Luft}\, \frac{T_0 \cdot p_1}{T_1 \cdot p_0}$

$$\rho_1^{Luft} = 1,293\,kg\,m^{-3} \cdot \frac{273 \cdot 930}{283 \cdot 1013} = 1,145\,kg\,m^{-3}$$

Durch Sonneneinstrahlung wird die Luft im Inneren erwärmt und dehnt sich von einem Ausgangsvolumen V_0 mit 85% des prallen Ballonvolumens $V_{B,p}$, also $V_0 = 0,85 \cdot V_{B,p}$, auf $V_{B,p}$ aus. Da der Ballon verschlossen ist, bleibt die Masse konstant und die Dichte nimmt ab. Im prallen Zustand beträgt die Luftdichte im Inneren $\rho_{1,innen}^{Luft}$:

$$\rho_{1,innen}^{Luft} = \rho_1^{Luft} \cdot \frac{V_0}{V_{B,p}} = 0,85 \cdot \rho_1^{Luft} = 0,85 \cdot 1,145\,kg\,m^{-3}$$

$$\rho_{1,innen}^{Luft} = 0,9733\,kg\,m^{-3}$$

Es gilt: $\rho_{1,innen}^{Luft} = \rho_1^{Luft}\, \frac{T_1 \cdot p_1}{T_2 \cdot p_1} = \rho_1^{Luft}\, \frac{T_1}{T_2}$

da der Druck im Inneren des Ballons gleich dem äußeren Luftdruck ist und dieser konstant bleibt, solange der Ballon am Boden festgehalten wird.

und für T_2 ergibt sich: $T_2 = \frac{\rho_1^{Luft}}{\rho_{1,innen}^{Luft}} \cdot T_1 = \frac{1,145}{0,9733} \cdot 283\,K = 333\,K \mathrel{\hat{=}} 60°C$

2b. Am höchsten Punkt, den der Ballon erreichen kann, gilt die Schwebebedingung:

Auftriebskraft = Gewichtskraft

$$F_A = \rho_2^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g = \left(m_B + m_{Luft}\right) \cdot g = F_g$$

$$\rho_2^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g = \left(m_B + \rho_{1,innen}^{Luft} \cdot V_{B,p}\right) \cdot g \qquad (*)$$

Wobei der Index 1 die Zustandsgrößen am Startort beim Einfüllen und der Index 2 die in der Maximalhöhe bezeichnet.

Aus der barometrischen Höhenformel folgt:

$$\rho_2^{Luft} = \rho_1^{Luft} \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h_{\max}}$$

Mit $h_{\max} = 800\,m$ folgt: $\rho_2^{Luft} = 1{,}145\,kg\,m^{-3} \cdot e^{-\frac{1{,}293 \cdot 9{,}81}{1013 \cdot 100} \cdot 800} = 1{,}145\,kg\,m^{-3} \cdot 0{,}9047$

$$\rho_2^{Luft} = 1{,}036\,kg\,m^{-3}$$

Für die Ballonmasse gilt nach (*): $m_B = \rho_2^{Luft} \cdot V_{B,p} - \rho_{1,innen}^{Luft} \cdot V_{B,p} = \left(\rho_2^{Luft} - \rho_{1,innen}^{Luft}\right) \cdot V_{B,p}$

Lösung: $m_B = \left(1{,}036 - 0{,}9733\right) kg\,m^{-3} \cdot 0{,}8482\,m^3 = 0{,}053\,kg = 53\,g$

2c. Beim Start muss die Auftriebskraft größer sein als die Gewichtskraft, denn sonst würde kein Aufstieg möglich sein. Die Differenz von Auftriebs- F_A und Gewichtskraft F_g ist gleich der Beschleunigungskraft.

D'Alembertsches Prinzip: $\sum_i \vec{F}_i - m_{ges}\,\vec{a} = 0$

$$\left(F_A - F_g\right) - m_{ges}\,a = 0$$

<u>Auftriebskraft:</u> $F_A = \rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g$

Man beachte, dass hier die Dichte der Außenluft am Startort $\rho_1^{Luft} = 1{,}145\,kg\,m^{-3}$ und das Volumen des prallen Ballons $V_{B,p} = 0{,}8482\,m^3$ eingesetzt werden muss.

<u>Gewichtskraft:</u> $F_g = \left(m_B + m_{Luft}\right) \cdot g = \left(m_B + \rho_{1,innen}^{Luft} \cdot V_{B,p}\right) \cdot g$

Bei der Berechnung der Masse der Luft im Inneren des Ballons muss stattdessen die geringere Dichte der aufgeheizten Luft im Inneren verwendet werden, während das Ballonvolumen gleich $V_{B,p} = 0{,}8482\,m^3$ bleibt.

Es folgt: $\left(\rho_1^{Luft} \cdot V_{B,p} \cdot g - \left(m_B + \rho_{1,innen}^{Luft} \cdot V_{B,p}\right) \cdot g\right) - \left(m_B + \rho_{1,innen}^{Luft} \cdot V_{B,p}\right) \cdot a = 0$

Lösung:

$$a = \frac{\left(\rho_1^{Luft} - \frac{m_B}{V_{B,p}} - \rho_{1,innen}^{Luft}\right)}{\left(\frac{m_B}{V_{B,p}} + \rho_{1,innen}^{Luft}\right)} \cdot g$$

$$a = \frac{(1{,}145 - 0{,}063 - 0{,}9733)}{(0{,}063 + 0{,}9733)} \cdot g = \frac{0{,}1087}{1{,}036} = 0{,}1049 \cdot g$$

Lösung: $a = 1{,}05\,m\,s^{-2}$

3a. **Anordnung (a):**

Wenn zwei Federn entsprechend Abb. (a) in Reihe angeordnet werden, ist die Kraft an beiden Federn gleich: $F_1 = F_2 = F$

Der Federweg für beide Federn in Reihe x_{ges} ist die Summe der Federwege der Einzelfedern:

$$x_{ges} = x_1 + x_2$$

Es gilt: $F_1 = D_1 \cdot x_1$ und $F_2 = D_2 \cdot x_2$

und es folgt: $F = D_1 \cdot x_1$ und $F = D_2 \cdot x_2$

Einsetzen: $$x_{ges} = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$$

$$F = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right)^{-1} \cdot x_{ges}$$

mit: $$D_{ges,a} = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right)^{-1} = \frac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}$$

Für die Eigenkreisfrequenz des Federpendels der Abb. (a) gilt:

$$\omega_{0,a} = \sqrt{\frac{D_{ges,a}}{m}} = \frac{2\pi}{T_{0,a}}$$

$$T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \frac{m \cdot (D_1 + D_2)}{D_1 \cdot D_2} = 4\pi^2 \frac{m \cdot (D + 4 \cdot D)}{4 \cdot D \cdot D}$$

$$T_{0,a}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{m}{D} \qquad (*)$$

Anordnung (b):

Herleitung der Schwingungsdauer: Auf die Masse m wirkt die Summe der Zugkraft der Feder (1) und der Druckkraft der Feder (2) (oder umgekehrt). Die Zugkraft der einen Feder wirkt immer in gleiche Richtung wie die Druckkraft der anderen.

D'Alembertsches Prinzip: $$(-D_1\, x - D_2\, x) - m\,\ddot{x} = 0$$

$$(-D_1 - D_2)\, x - m\,\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{D_1 + D_2}{m} x = 0$$

Es folgt: $$\omega_{0,b} = \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}} = \frac{2\pi}{T_{0,b}}$$

$$T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{D_1 + D_2} = 4\pi^2 \frac{m}{D + 4 \cdot D}$$

$$T_{0,b}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{m}{D} \qquad (**)$$

Für das Verhältnis der Schwingungsdauer soll gelten:

$$\left(\frac{T_{0,a}}{T_{0,b}}\right)^2 = \frac{5/4}{1/5} = \frac{25}{4}$$

Lösung: $$\frac{T_{0,a}}{T_{0,b}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

3b. Anordnung (a): $$T_{0,a} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{4}\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\,kg}{400\,Nm^{-1}}} = 0{,}702\,s$$

Anordnung (b): $$T_{0,b} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{5}\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\,kg}{500\,Nm}} = 0{,}281\,s$$

3c. Die allgemeine Lösung eines ungedämpft schwingenden Systems lautet (siehe Formelsammlung):

Amplitude: $$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0\, t + \delta)$$

Geschwindigkeit: $$v(t) = \dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0\, t + \delta)$$

Anfangsbedingung Nr.1: $$x(t = 0) = x_0 = +0{,}1m \qquad (*)$$

Anfangsbedingung Nr.2: $v(t=0)=0$ (**)

Aus (**) folgt: $v(t=0)=0=\dot{x}_0(t)=A\cdot\omega_0\cdot\cos(\delta)$

Da $A\neq 0$ und $\omega_0\neq 0$ folgt: $\delta=\frac{\pi}{2}$

Einsetzen in (*) $x(t=0)=x_0=0{,}15\,m=A\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Lösung für A: $A=x_0=0{,}1\,m$

Eigenkreisfunktion: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_{0b}}=\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{m}{D}}}=\sqrt{\frac{5D}{m}}=\sqrt{\frac{500\,Nm^{-1}}{1kg}}=22{,}36\,s^{-1}$

Amplitudenfunktion: $x(t)=A\cdot\sin(\omega_0\,t+\frac{\pi}{2})$

$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0\,t)=(0{,}1m)\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$

im Bogenmaß $x(t=1s)=(0{,}1m)\cdot\cos(22{,}36\,s^{-1}\cdot 1s)$

im Gradmaß $x(t=1s)=(0{,}1m)\cdot\cos(\frac{22{,}36\cdot 180°}{\pi})$

$x(t=1s)=(0{,}1m)\cdot(-0{,}9327)=-9{,}32\,cm$

Geschwindigkeitsfunktion: $\dot{x}_0(t)=-A\cdot\omega_0\cdot\sin(\omega_0\,t)$

im Bogenmaß $\dot{x}(t=1s)=-(2{,}236\,m\,s^{-1})\cdot\sin(22{,}36\,s^{-1}\cdot 1s)$

im Gradmaß $\dot{x}(t=1s)=-(2{,}236\,m\,s^{-1})\cdot\sin(\frac{22{,}36\cdot 180°}{\pi})$

$\dot{x}(t=1s)=-2{,}236\,m\,s^{-1}\cdot(-0{,}3605)=+0{,}806\,m\,s^{-1}$

4a. Federkonstante: $D=\frac{F_G}{x_g}=\frac{m\,g}{x_g}=\frac{1\cdot 10}{0{,}08}\frac{N}{m}=125\frac{N}{m}$

Eigen(kreis)frequenz: $\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{125\,kg\,m}{1kg\,m\,s^2}}=11{,}2\,s^{-1}$

Schwingungsdauer: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0{,}562\,s$

4b. Energieerhaltungssatz: Die potentielle Energie bei maximaler Auslenkung ist gleich der kinetischen Energie bei Auslenkung Null.

$$\frac{1}{2}m\,v_0^2=\frac{1}{2}D\,x_0^2$$

Geschwindigkeit: $v_0=\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot x_0=\omega_0\cdot x_0=11{,}2\,s^{-1}\cdot 0{,}12\,m=1{,}34\frac{m}{s}$

4c. Amplitudenabnahme: $\frac{A(3\cdot T_0)}{A_0}=0{,}02=e^{-\beta\cdot 3T_0}$

Abklingkonstante: $\beta=-\frac{\ln(0{,}02)}{3T_0}=\frac{\ln(50)}{6\pi}\cdot\omega_0=0{,}2075\cdot\omega_0=2{,}32\,s^{-1}$ (*)

Eigenkreisfrequenz: $\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=10{,}94\,s^{-1}$

Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung:

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 0,574\,s$$

Gleichung (*) ist eine Näherung. Korrekt wäre, T_0 durch T_e zu ersetzen.

Lösung für β:

$$\beta = -\frac{\ln(0,02)}{3T_e} = \frac{-\ln(0,02)\cdot\omega_e}{3\cdot 2\pi} = \frac{\ln(50)\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}{6\pi}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{\ln 50}{6\pi}\right)^2\left(\omega_0^2-\beta^2\right)$$

$$\beta^2\left(1+\left(\frac{\ln 50}{6\pi}\right)^2\right) = \left(\frac{\ln 50}{6\pi}\right)^2\omega_0^2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{6\pi}{\ln 50}\right)^2}}\cdot\omega_0$$

$$\beta = 0,2032\cdot\omega_0 = 0,2032\cdot 11,2 = 2,28\,s^{-1}\,2$$

Abweichung zwischen Näherung und wahrem Wert: 1,8%

4d. Resonanzkreisfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 10,69\,s^{-1}$

4e. Die Resonanzüberhöhung ist das Verhältnis der Resonanzamplitude $A_R^{\max}$ bezogen auf die Amplitude A_0^{err}, die ein Erreger an dem schwingenden System bei $\omega_a = 0$ erzeugt.

Für die Resonanzamplitude gilt: $A_R^{\max} = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}}$

mit der Erregerbeschleunigung: $f_a = \frac{F_a}{m}$

Im statischen Fall gilt für die Amplitude A_0^{err}

$$F_a = D\,A_0^{err}$$

Es folgt: $A_R^{\max} = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{D\,A_0^{err}}{m\cdot\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}}$

Da gilt: $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

folgt für die Resonanzüberhöhung: $\frac{A_R^{\max}}{A_0^{err}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\,ß^4}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2\cdot\sqrt{\frac{1}{\omega_0^4}\left(4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4\right)}}$

Es folgt: $$\frac{A_R^{\max}}{A_0^{err}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$$

Mit: $$\frac{\beta}{\omega_0} = \frac{2,32}{11,2} = 0,2071$$

Lösung: $$\frac{A_R^{\max}}{A_0^{err}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{(0,2075)^2 - (0,2075)^4}} = 2,46$$