Fachhochschule Hannover 20.01.2010
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0910 (Prof. Dr. U. J. Schrewe) Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Bei Präzisionswägungen werden Gewichtskräfte mit hoher Genauigkeit gemessen und dann auf die Masse zurückgerechnet**.** Es soll die Masse eines Al-Körpers (Dichte $\rho_{Al} = 2{,}691\,g\,cm^{-3}$) bestimmt werden. Eine Kraftmesseinrichtung liefert einen Messwert von 9,8045 *N*. Die Erdbeschleunigung am Messort beträgt $g = 9{,}80685\,m\,s^{-2}$. Die Auftriebskraft in Luft muss berücksichtigt werden. Die Temperatur beträgt 18°C und der Luftdruck $p_L = 987\,hPa$. Bestimmen Sie die genaue Masse des Al-Körpers. ?…..…(10) Dichte der Luft bei 0°C und 1013,25 hPa: 1,293 kg m^{-3}.
In Aufgabe 1 nicht die Näherung g = 10 ms^{-2} verwenden.

2. Ein senkrecht stehendes pneumatisches Stellglied (siehe Abb. 1, Höhe des Innenvolumens $h = 15\,cm$, Querschnitt $A = 300\,cm^2$) soll eine Masse von $m_0 = 20\,kg$ auf konstanter Höhe halten. Der Kolben, die Kolbenstange und der Tragetisch haben eine Masse von $m_1 = 1\,kg$. Der Umgebungsdruck beträgt $p_{Luft} = 995\,hPa$.

a. Wie groß ist der absolute Innendruck, der auf den Kolben wirkt?…..…(10)

b. Um die Masse um *2 cm* anzuheben, wird dem Stellglied aus einem externen Druckluftspeicher (absoluter Innendruck $p_{abs,SP} = 25\,bar$) Druckluft zugeführt. Welches Druckluftvolumen muss dem Druckspeicher entnommen werden?…………………………………..…(10)

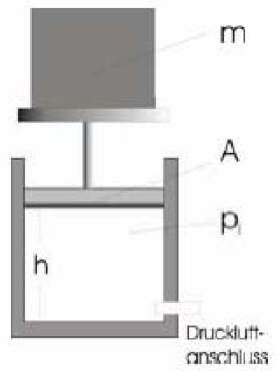


Abb. 1

3. Drei gleiche, dünne, homogene Stäbe ($l = 50\,cm$ und $m_{Stab} = 0{,}5\,kg$ mit den Schwerpunkten S_1, S_2 und S_3) werden in der in Abb. 2 gezeigten Weise angeordnet und schwingen als Pendel um den Drehpunkt D.

a. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_{ges} des abgebildeten Pendels bezüglich einer Drehachse durch den Drehpunkt D.……………………….(10)

b. Berechnen Sie die Schwingungsdauer T_0 des Pendels für den Fall einer ungedämpften Schwingungen mit kleiner Winkelamplitude (z. B. < 5°).(15)

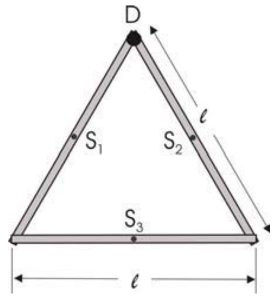


Abb. 2

4. Ein homogener Zylinder mit Radius $R = 253{,}3\,mm$, Höhe $H = 506{,}6\,mm$ und Dichte $\rho_{Zyl} = 0{,}5 \cdot \rho_{Fl}$ schwimmt in einer Flüssigkeit mit der Dichte ρ_{Fl}.

a. Welche Eintauchtiefe hat der schwimmende Zylinder in der Gleichgewichtslage?…...………(10)

b. Der Zylinder wird durch eine äußere Kraft bis zu seiner Oberkante in die Flüssigkeit getaucht und dann losgelassen. Mit welcher Schwingungsdauer T_0 würde der Zylinder schwingen, wenn man die Reibungseinflüsse durch die Flüssigkeit vernachlässigt? ……...…………………..……(15)

c. Eine sehr genaue Messung ergibt eine Schwingungsdauer von $T_e = 1{,}01\,s$. Wie groß ist die Abklingkonstante β der gedämpften Schwingung? ……....……………………………………..…..(5)

d. Nach welcher Zeit ist die Maximalamplitude auf einen Wert kleiner als 1% des ursprünglichen Wertes abgesunken? ……...…………………………………………………...…………………..…..(5)

e. Wie groß ist die Resonanz(kreis)frequenz ω_R und wie groß ist die Amplitudenüberhöhung $A/A_0 = x_R^{\max}(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta) / x_0^{\max}(\omega_a = 0, \omega_0, \beta)$ im Resonanzfall? ……..……………………..….(10)

f. Beschreiben Sie qualitativ die Eigenschaften erzwungener Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen: Skizzieren Sie dazu die Resonanzkurven und die Phasenverschiebungen für mindestens vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung! ……………………………………...………(8)

Verwenden Sie zur Vereinfachung *g* = 10 ms^{-2}

Lösungen:

1. Die Kraftmesseinrichtung zeigt die Differenz aus Gewichtskraft F_g und Auftriebskraft F_A an.

Für die Anzeige *A* gilt: $A = F_g - F_A$

mit: $F_g = m\,g$

und: $F_A = \rho_{Luft}\, V\, g = \rho_{Luft} \dfrac{m}{\rho_{Al}} g$

Es folgt: $A = F_g - F_A = m\,g - \dfrac{\rho_{Luft}}{\rho_{Al}} \cdot m\,g = \left(1 - \dfrac{\rho_{Luft}}{\rho_{Al}}\right) \cdot m\,g$

Lösung für *m*: $m = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\rho_{Luft}}{\rho_{Al}}} \cdot \dfrac{A}{g}$

Da die Messung bei einer Lufttemperatur von $T_1 = 18°C = 291{,}15\,K$ und einem Luftdruck von $p_1 = 987\,hPa$ durchgeführt wird, gilt für die Luftdichte $\rho_{Luft,1}$:

$$\frac{p_1}{\rho_{Luft,1} \cdot T_1} = \frac{p_0}{\rho_{Luft,0} \cdot T_0}$$

Werte mit Index 0 bezeichnen die Standardbedingungen.

$$\rho_{Luft,1} = \frac{p_1 \cdot T_0}{p_0 \cdot T_1} \cdot \rho_{Luft,0} = \frac{987 \cdot 273{,}15}{1013{,}25 \cdot 291{,}15} 1{,}293\,kg\,m^{-3}$$

$$\rho_{Luft,1} = 0{,}91387 \cdot 1{,}293\,kg\,m^{-3} = 1{,}1816\,kg\,m^{-3}$$

Lösung: $m = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\rho_{Luft}}{\rho_{Al}}} \cdot \dfrac{A}{g} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1{,}1816}{2{,}691 \cdot 10^3}} \cdot \dfrac{9{,}8045\,kg\,m\,s^{-2}}{9{,}80685\,m\,s^{-2}} = 1{,}0002\,kg$

2a. Für den absoluten Druck im Zylinder gilt $p_{abs,Zyl} = \Delta p + p_{Luft}$, wobei Δp den Differenzdruck zwischen dem Zylinder- und dem äußeren Luftdruck p_{Luft} bezeichnet.

Für Δp gilt: $\Delta p = \dfrac{F_g}{A} = \dfrac{(m_0 + m_1)\,g}{A} = \dfrac{(20+1)\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{300 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 70\,hPa$

Für p_{abs} gilt: $p_{abs,Zyl} = \Delta p + p_{Luft} = (70 + 995)\,hPa = 1065\,hPa$

2b. Um das Massestück zu heben, muss man das Zylindervolumen um ΔV_1 vergrößern.

$$\Delta V_{Zyl} = A \cdot \Delta h \text{ mit } \Delta h = 2\,cm$$

$$\Delta V_{Zyl} = A \cdot \Delta h = 300\,cm^2 \cdot 2\,cm = 600\,cm^3$$

Der Index 1 bezeichnet dabei den Gaszustand im Zylinder, also $p_{abs,Zyl} = 1065\,hPa$ und Umgebungstemperatur.

Das Gas wird einem externen Druckluftspeicher entnommen. Da keine Angaben zur Temperatur gemacht werden, kann man annehmen, dass die Temperaturen im Druckspeicher und im Zylinder gleich sind. Es gilt also das Boyle-Mariottesche Gesetz:

$$P_{abs,Zyl} \cdot \Delta V_{Zyl} = P_{abs,SP} \cdot \Delta V_{SP}$$

$$\Delta V_{SP} = \frac{P_{abs,Zyl}}{P_{abs,SP}} \cdot \Delta V_{Zyl} = \frac{1065\,hPa}{25\,bar} \cdot 600\,cm^3$$

Lösung: $\Delta V_{SP} = \dfrac{1065\,hPa}{25 \cdot 10^3\,hPa} \cdot 600\,cm^3 = 25{,}6\,cm^3$

3a. Zur Berechnung des gesamten Massenträgheitsmoments J_{ges} berechne man die Massenträgheitsmomente der drei Stäbe einzeln mit Hilfe des Steinerschen Satzes.

Stab Nr. 1 $$J_1 = m_{Stab} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} m_{Stab} \cdot l^2 = \frac{1}{3} m_{Stab}\, l^2 = 0{,}04167\, kg\, m^2$$

Stab Nr. 2 $$J_2 = m_{Stab} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} m_{Stab} \cdot l^2 = \frac{1}{3} m_{Stab}\, l^2 = 0{,}04167\, kg\, m^2$$

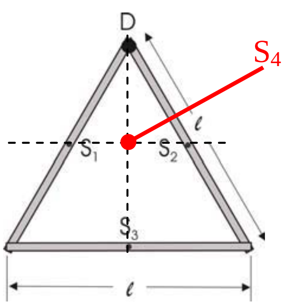
Stab Nr.3 $$J_3 = m_{Stab} \cdot \left[l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] + \frac{1}{12} m_{Stab} \cdot l^2 = \frac{10}{12} m_{Stab}\, l^2 = 0{,}10417\, kg\, m^2$$

Massenträgheitsmoment gesamt: $J_{ges} = J_1 + J_2 + J_3 = m_{Stab}\, l^2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{10}{12}\right)$

Lösung: $$J_{ges} = \frac{18}{12} m_{Stab}\, l^2 = \frac{3}{2} m_{Stab}\, l^2$$
$$J_{ges} = \frac{3}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2\, kg\, m^2 = 0{,}18750\, kg\, m^2$$

3b. Es handelt sich um ein physikalisches Pendel, das mit einer kleinen Winkelamplitude schwingt.

Eigenkreisfrequenz: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{ges}\, g\, d}{J_{ges}}}$$



Wobei d den Abstand von Drehpunkt und Schwerpunkt bezeichnet. Der gemeinsame Schwerpunkt von S_1 und S_2 soll mit S_4 bezeichnet werden. S_4 liegt auf der Verbindungslinie von D und S_3. Der Abstand zwischen D und S_4 beträgt:

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} l\,.$$

Auch der gemeinsame Schwerpunkt aller drei Stäbe S_{gem} liegt auf der Verbindungslinie von D und S_3. Zur Berechnung des Abstand d vom Drehpunkt D zum gemeinsamen Schwerpunkt S_{gem} aus S_4 und S_3 dient der Mittelwert der Drehmomente $\left(\sum_{i=3,4} F_{g,i}\right) \cdot d = \sum_{i=3,4} x_i \cdot F_{g,i}$

Es folgt: $$d = \sum_{i=3,4} x_i \cdot F_{g,i} \Big/ \sum_{i=3,4} F_{g,i}$$

Wobei x_i den Abstand vom Drehpunkt D zum jeweiligen Schwerpunkt S_i (i = 3,4), und $F_{g,i}$ und die jeweilige Gewichtskraft bezeichnet. Es ist $F_{g,3} = m_{Stab}\, g$ mit $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ und $F_{g,4} = 2 \cdot m_{Stab}\, g$ mit $x_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} l$.

Es folgt: $$d = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} l = \frac{1}{\sqrt{3}} l$$

Einsetzen: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{ges}\, g\, d}{J_{ges}}} = \sqrt{\frac{3 m_{Stab} \cdot \left(l/\sqrt{3}\right) \cdot g}{(3/2) m_{Stab}\, l^2}}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\sqrt{3} \cdot l}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{10\, m\, s^{-2}}{0{,}5\, m}} = 4{,}8056\, s^{-1}$$

Lösung: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4{,}8056} s = 1{,}3075\, s$$

4a. Im Gleichgewicht ist die Auftriebskraft F_A gleich der Gewichtskraft F_g:

$$F_A = \rho_{Fl} V_{x_0} g = \rho_{Zyl} V_{Zyl} g = F_g$$

mit: $$V_{x_0} = \pi R^2 x_0$$

und $$V_{Zyl} = \pi R^2 H ,$$

wobei x_0 der Eintauchtiefe des Zylinders im Wasser entspricht.

Einsetzen von V_{Zyl} und V_{x_0}: $$\rho_{Fl} \pi R^2 x_0 g = \frac{\rho_{Fl}}{2} \pi R^2 H g \qquad (*)$$

Lösung für x_0: $$x_0 = \frac{H}{2} = \frac{506{,}6\,mm}{2} = 253{,}3\,mm$$

4b. Die Auslenkung des Schwerpunktes des Zylinders aus der Gleichgewichtslage soll durch die Koordinate $x \in [-x_0, +x_0]$ beschrieben werden. Wird der Schwerpunkt nach unten gedrückt, ist $x < 0$, und die Differenz von Auftriebs- und Gewichtskraft nach oben gerichtet, also positiv. Wird der Schwerpunkt hingegen nach oben gezogen, ist $x > 0$, und die Differenz von Auftriebs- und Gewichtskraft ist nach unten gerichtet, also negativ. Daraus ergibt sich die entsprechende Beziehung für die Rückstellkraft $F_{rück}$:

Rückstellkraft: $$F_{rück} = F_A - F_g = \rho_{Fl} \pi R^2 (x_0 - x) g - \frac{\rho_{Fl}}{2} \pi R^2 H g$$

$$F_{rück} = \rho_{Fl} \pi R^2 x_0 g - \rho_{Fl} \pi R^2 x g - \frac{\rho_{Fl}}{2} \pi R^2 H g$$

Aus (*) folgt: $$F_{rück} = -\rho_{Fl} \pi R^2 x g$$

D'Alembertsches Prinzip: $$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = 0$$

$$F_{rück} - ma = 0$$

Einsetzen: $$-\rho_{Fl} \pi R^2 x g - \frac{\rho_{Fl}}{2} \pi R^2 H \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2g}{H} x = 0$$

Die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung lautet:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,m\,s^{-2}}{0{,}5066\,m}} = 6{,}2832\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

Lösung: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \cong 1{,}00\,s$$

4c. Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung:

$$T_e = 1{,}01\,s$$

Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung:

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 6{,}2209\,s^{-1}$$

Abklingkonstante: $$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_e^2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_e^2}}$$

Lösung: $$\beta = 0{,}8820\,s^{-1}$$

4d. Die Maximalamplitude einer gedämpften Schwingung wird durch die Funktion bestimmt:

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \cdot e^{-\beta t}$$

Es gilt: $$\ln\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} = -\beta \cdot t$$

Nach der Zeit $t_{1\%}$ soll das Verhältnis der Maximalamplituden 1% betragen.

$$\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} = 0,01$$

Lösung: $$t_{1\%} = -\frac{1}{\beta}\cdot\ln\left(0,01\right) = \frac{4,60517}{0,8820}\,s \cong 5,22\,s$$

4e. Resonanzfrequenz: $$\omega_R = \sqrt{6,2832^2 - 2\cdot 0,8820^2}\;s = 6,1581\,s$$

Resonanzüberhöhung A/A_0: $$\frac{A}{A_0} = \frac{x_R^{\max}\left(\omega_a = \omega_R, \omega_0, \beta\right)}{x_0^{\max}\left(\omega_a = 0, \omega_0, \beta\right)} = \frac{\dfrac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_R\right)^2}}}{\dfrac{f_a}{\sqrt{\left(\left(\omega_0^2\right)^2\right)}}}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

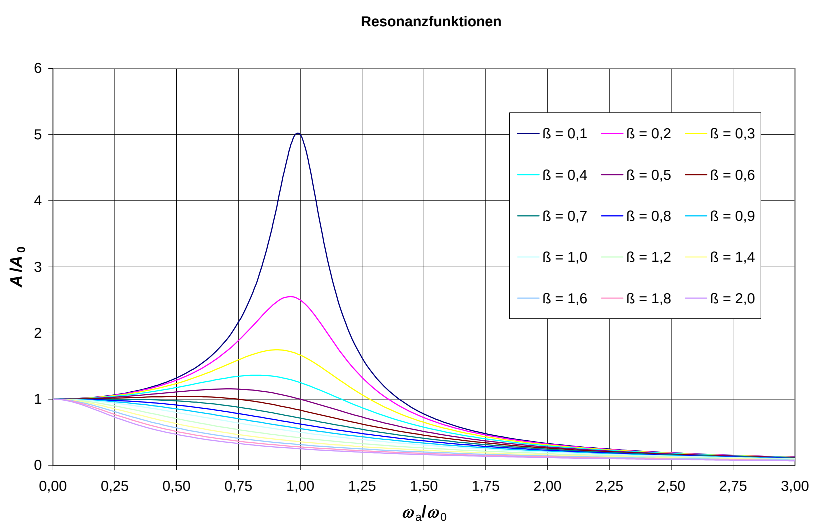
$$\frac{A}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)^2}}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^4}}$$

mit: $$\frac{\beta}{\omega_0} = \frac{0,8820}{6,2832} = 0,1404$$

folgt: $$\frac{A}{A_0} = \frac{0,5}{\sqrt{0,1404^2 + 0,1404^4}} = 3,53$$

4f. Resonanzkurven: Amplitudenverhältnis A/A_0 als Funktion des Frequenzverhältnisses ω_a/ω_0 für verschiedene Werte von $\beta/\omega_0 \in \left[0,1....1,8\right]$. (Phasenverschiebung: siehe Vorlesung.)



Wenn $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\cdot\omega_0$ ist, ist $\omega_R = 0$, h. h. es gibt keine Resonanzüberhöhung.