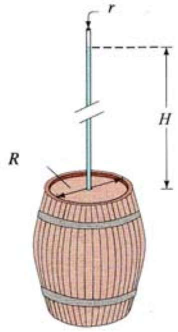
1. Blaise Pascal zeigte im 17. Jahrhundert physikalische Experimente auf Jahrmärkten. Er versah ein Weinfass mit einem dünnen langen Schlauch (Radius $r = 1,5\,mm$). Nach Einfüllen einer geringen Wassermenge in den Schlauch barst das Fass. Dies geschah z. B. bei einer Füllhöhe von $H = 11,5\,m$.

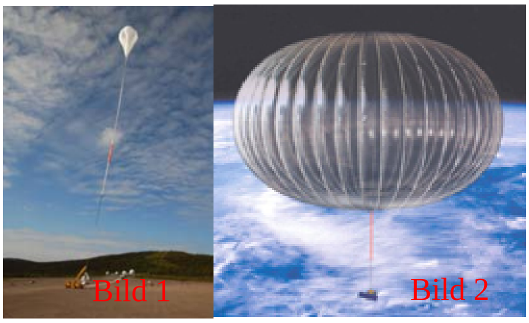


a. Welche Kraft wirkte auf den Fassboden (Radius $R = 25\,cm$, Fasshöhe $h = 0,8\,m$)?

b. Welche Wassermenge musste dazu in den vorher leeren Schlauch gefüllt werden.

2. Zur Bestimmung der Dichte werden zwei metallische Probekörper jeweils in Luft (*L*) und in Wasser (*W*) gewogen. Das Verhältnis der Waagenanzeigen A_L / A_W ergibt für Probe 1 $(A_L / A_W)_1 = 1,126$ und für Probe 2 $(A_L / A_W)_2 = 1,587$. ($\rho_W = 1,00\,g\,cm^{-3}$, $\rho_L = 1,293\,kg\,m^{-3}$)

a. Bestimmen Sie die Dichten ρ_1 und ρ_2 der Probekörper?



3. Neue Höhenballone ULDB (Ultra Long Duration Balloon) können einige Tonnen Nutzlast viele Wochen lang auf große Höhen bringen. ULDBs sind geschlossene, mit leichtem Überdruck gefüllte Ballone, die weitgehend unabhängig von Einflüssen durch Sonnenbestrahlung eine feste Höhe halten können. Beim Start wird nur ein kleiner Teil des verfügbaren Volumens mit Helium gefüllt (Bild 1). In großer Höhe (Prallhöhe) füllt das He-Gas den Ballon dann prall aus (Bild 2).

(Bei $T_0 = 0°C$ und $p_0 = 1013\,hPa$: $\rho_0^{Luft} = 1,293\,kg\,m^{-3}$ und $\rho_0^{He} = 0,1785\,kg\,m^{-3}$.)

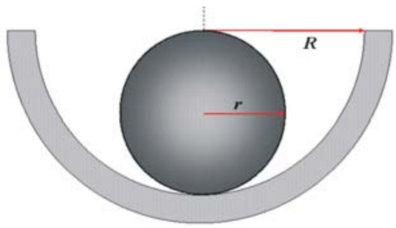
a. Betrachten Sie einen ULDB mit einer Masse von 2155 kg, dessen Prallhöhe bei 34 000 m liegen soll und der ein maximales Volumen von 520.483 m^3 besitzt. Am Startort betrage der Luftdruck $p_S^{Luft} = 1000\,hPa$ und die Lufttemperatur $T_S^{Luft} = 10°C$. Welches Heliumvolumen muss am Startort eingefüllt werden?

b. Welche Nutzlast hat der Ballon tragen, wenn die Beschleunigung beim Start $a = 2\,m\,s^{-2}$ beträgt?

c. Welche Maximalhöhe erreicht der Ballon?

d. Welchen Überdruck hat das Heliumgas im Ballon in der Maximalhöhe?

4. Eine Kugel mit Radius $r = R/2$ befindet sich in einer kugelförmigen Schale mit Radius R. Nach dem Auslenken aus der Ruhelage am tiefsten Punkt rollt die Kugel periodisch hin und her.



a. Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung für $R = 0,2\,m$. (Betrachten Sie kleine Auslenkungswinkel, z. B. $\theta < 5°$).
Hinweis: Für den Auslenkungswinkel θ des Kugelschwerpunktes und den Drehwinkel φ der rollenden Kugel gilt die Verknüpfung: $\varphi = \frac{R-r}{r} \cdot \theta$.

5. Ein horizontal liegendes Federpendel (Masse $m = 1\,kg$ und $D = 100\,N\,m^{-1}$) soll mit einer geschwindigkeitsunabhängigen Reibungskraft $F_{RC} = -\mu_G\,F_N$ und alternativ mit einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft $F_{RS} = -b\,v$ so gedämpft werden, dass die Anfangsamplitude von 5 cm nach drei Perioden kleiner gleich 28% der Ausgangsamplitude ist.

a. Wie groß müssen die Gleitreibungszahl μ_G und die Proportionalitätskonstante b sein?

b. Betrachten Sie den Fall mit der geschwindigkeitsabhängigen Reibung aus 5a. Wie groß ist im Fall periodischer Erregung die Resonanzüberhöhung im Resonanzmaximum?

Verwenden Sie zur Vereinfachung $g = 10\,ms^{-2}$

Lösungen:

1a. Kraft auf den Fassboden: $F_{Boden} = p_{Boden} \cdot A_{Boden}$

mit Druck am Fassdeckel: $p_{Deckel} = \rho \cdot g \cdot (H + h)$

mit $H + h = 11,5\,m + 0,8\,m = 12,3\,m$

Fläche des Deckels: $A_{Boden} = \pi \cdot R^2 = 0,1963\,m^2$

Lösung: $F_{Boden} = \left(\rho \cdot g \cdot (H + h)\right) \cdot \left(\pi \cdot R^2_{Boden}\right) = 24,15\,kN$

1b. Volumen des Wassers im Schlauch: $V_{Schlauch} = \pi \cdot r^2 \cdot H = 81,3\,cm^3 = 0,0813\,l$

2a. Die Anzeige A einer Waage ist proportional zur Differenz aus der Gewichtskraft des Körpers $F_g = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$ und dessen Auftriebskraft $F_A = \rho_U \cdot V_K \cdot g$ im Umgebungsmedium U.

In der Umgebung Luft (*L*) gilt: $F_L = F_{gL} - F_{AL} = \rho_K \cdot V_K \cdot g - \rho_L \cdot V_K \cdot g$

In der Umgebung Wasser (*W*) gilt: $F_W = F_{gW} - F_{AW} = \rho_K \cdot V_K \cdot g - \rho_W \cdot V_K \cdot g$

Definiert man zur Vereinfachung: $R := \dfrac{F_L}{F_W} = \dfrac{\rho_K - \rho_L}{\rho_K - \rho_W}$,

folgt für die Dichte: $\rho_K = \dfrac{R \cdot \rho_W - \rho_L}{R - 1}$

Probekörper 1: $\rho_1 = 2,70\,g\,cm^{-3}$

Beim Probekörper 1 handelt es sich um: Al

Probekörper 2: $\rho_2 = 8,93\,g\,cm^{-3}$

Beim Probekörper 2 handelt es sich um: Cu

3. ---

Bezeichnungen und Vorüberlegungen:

Masse des Ballon: $m_B = 2155\,kg$

Nutzlast: m_N

Ballonvolumen = Volumen in der Prallhöhe $V_B = 520\,483\,m^3$

In der Prallhöhe h_P ist das gesamte Ballonvolumen prall mit He-Gas gefüllt.

Die Maximalhöhe $h_{\max}$ liegt über der Prallhöhe h_P. In dieser Höhe verbleibt der Ballon.

Luftdichte in der Prallhöhe h_P: ρ_P^{Luft}

Heliumdichte in der Prallhöhe h_P: ρ_P^{Helium}

Luftdichte in der Maximalhöhe $h_{\max}$: $\rho_{\max}^{Luft}$

Heliumdichte in der Maximalhöhe $h_{\max}$: $\rho_{\max}^{Helium}$

Volumen des eingefüllten Heliums in Prallhöhe: $V_P^{He} = V_B = 520\,483\,m^3$

Volumen des eingefüllten Heliums am Startort: V_S^{He}

Luftdichte am Startort: $\rho_S^{Luft} = \dfrac{p_S^{Luft} \cdot T_0^{Luft}}{T_S^{Luft} \cdot p_0^{Luft}} \cdot \rho_0^{Luft}$

$$\rho_S^{Luft} = \frac{1000\,hPa \cdot 273\,K}{283\,K \cdot 1013\,K} \cdot 1,293\,kg\,m^{-3}$$

$$\rho_S^{Luft} = 1,231\,kg\,m^{-3}$$

Heliumdichte am Startort: $\rho_S^{He} = \dfrac{p_S^{He} \cdot T_0^{He}}{T_S^{He} \cdot p_0^{He}} \cdot \rho_0^{He}$

$$\rho_S^{He} = \frac{1000\,hPa \cdot 273\,K}{283\,K \cdot 1013\,K} \cdot 0{,}1785\,kg\,m^{-3}$$

$$\rho_S^{Helium} = 0{,}1670\,kg\,m^{-3}$$

3a. Laut Aufgabenstellung soll die Prallhöhe mit $V_P^{He} = V_B = 520\,483\,m^3$ in 34 000 m liegen. Daraus ergibt sich mit Hilfe der barometrischen Höhenformel das Helium-Volumen V_S^{He}, das am Startort eingefüllt werden muss.

Lösung: $$V_S^{He} = \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot h_p\right) \cdot V_P^{He}$$

$$V_S^{He} = \exp\left(-\frac{34\,000\,m}{7986\,m}\right) \cdot 520\,483\,m^3$$

Ergebnis: $$V_S^{He} = 0{,}01416 \cdot 520\,483\,m^3 = 7370\,m^3$$

3b. Bestimmung der Nutzlast:

Vorüberlegungen:

Auftriebskraft: $$F_A = \rho_S^{Luft} \cdot V_S^{Luft} \cdot g = 1{,}231\frac{kg}{m^3} \cdot 7370\,m^3 \cdot 10\frac{m}{s^2}$$

$$F_A = 90\,725\,N$$

Gewichtskraft: $$F_g = \left(0{,}1670\frac{kg}{m^3} \cdot 7370\,m^3 + m_N + 2155\,kg\right) \cdot 10\frac{m}{s^2}$$

$$F_g = 33\,858\,N + m_N \cdot g$$

Aus Vergleich von Auftriebskraft und Gewichtskraft erkennt man, dass bis zu $m_N = 5857\,kg$ Nutzlast mitgeführt werden könnte. Würde man aber den Maximalwert von $m_N = 5857\,kg$ wählen, hätte man keine Beschleunigungskraft mehr, so dass der Ballon strenggenommen am Startort zwar schweben würde, aber nicht aufsteigen könnte.

3b. **Lösungsansatz:** Auftriebskraft = Gewichtskraft + Beschleunigungskraft

$$F_A = F_g + F_a$$

Bei der Bestimmung der Auftriebskraft wird das Volumen V_S^{He} verwendet, da das Volumen des eingefüllten Heliums V_S^{He} (näherungsweise) dem Auftriebsvolumen entspricht.

$$\rho_S^{Luft} \cdot V_S^{He} \cdot g = \left(\rho_S^{Helium} \cdot V_S^{He} + m_N + m_B\right) \cdot g + \left(\rho_S^{Helium} \cdot V_S^{He} + m_N + m_B\right) \cdot a$$

$$\rho_S^{Luft} \cdot V_S^{He} \cdot g = \left(\rho_S^{He} \cdot V_S^{He} + m_N + m_B\right) \cdot (g + a)$$

Lösung: $$m_N = \frac{\rho_S^{Luft} \cdot V_S^{He} \cdot g}{g + a} - \rho_S^{He} \cdot V_S^{He} - m_B$$

$$m_N = \frac{1{,}231\,kg\,m^{-3} \cdot 7370\,m^3 \cdot 10\,m\,s^{-2}}{12\,m\,s^{-2}} - 0{,}1670\,kg\,m^{-3} \cdot 7370\,m^3 - 2155\,kg$$

Ergebnis: $$m_N = 7560\,kg - 1231\,kg - 2155\,kg = 4174\,kg$$

Vergleich der Massen:

Nutzlast: $m_N = 4174\,kg$

Ballonmasse: $m_B = 2155\,kg$

Masse des eingefüllten He: $m_{He} = 1231\,kg$

3c. Gesucht ist die Höhe, in der die Schwebebedingung gilt. Oberhalb der Prallhöhe nimmt zwar die äußere Luftdichte ab, dies gilt bei einem ULDB mit konstantem Maximalvolumen aber nicht für die Dichte des Heliums im Inneren. Diese bleibt oberhalb der Prallhöhe konstant, da das Maximalvolumen der Hülle konstant ist. Deshalb nimmt die Beschleunigungskraft, die vorher zwischen Startort und Prallhöhe konstant ist, oberhalb der Prallhöhe bis zum Wert Null hin ab. Wenn die Beschleunigungskraft gleich Null ist, hat der Ballon die maximale Steighöhe erreicht.

3c. Lösungsansatz: Schwebebedingung in der Maximalhöhe:

Auftriebskraft = Gewichtskraft

$$F_A = F_g$$

$$\rho_{\max}^{Luft} \cdot V_B \cdot g = \left(\rho_S^{He} \cdot V_S^{He} + m_N + m_B\right) \cdot g$$

$$\rho_{\max}^{Luft} \cdot V_B \cdot g = \left(1231\,kg + 2155\,kg + 4174\,kg\right) \cdot g$$

$$\rho_{\max}^{Luft} \cdot V_B \cdot g = 7560\,kg \cdot g$$

Für die Luftdichte gilt:

$$\rho_{\max}^{Luft} = \rho_S^{Luft} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot h_{\max}\right)$$

Einsetzen:

$$h_{\max} = -\frac{p_0^{Luft}}{\rho_0^{Luft} \cdot g} \ln\left(\frac{7560\,kg}{\rho_S^{Luft} \cdot V_B}\right)$$

$$h_{\max} = -7986\,m \cdot \ln\left(\frac{7\,560\,kg}{1,231\frac{kg}{m^3} \cdot 520\,483\,m^3}\right)$$

$$h_{\max} = -7986\,m \cdot \ln\left(\frac{7\,560\,kg}{1,231\frac{kg}{m^3} \cdot 520\,483\,m^3}\right)$$

Lösung:

$$h_{\max} = 35\,455\,m$$

3d. Überdruck ist die Differenz zwischen Innendruck und Außendruck.

Außendruck:

$$p_{\max}^{Luft} = p_S^{Luft} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot h_{\max}\right)$$

$$p_{\max}^{Luft} = 1000\,hPa \cdot \exp\left(-\frac{h_{\max}}{7986\,m}\right)$$

$$p_{\max}^{Luft} = 1000\,hPa \cdot 0,01180 = 11,8\,hPa$$

Innendruck oberhalb der Prallhöhe :

$$p_{\max}^{He} = p_S^{He} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft} \cdot g}{p_0^{Luft}} \cdot h_P\right)$$

$$p_{\max}^{He} = 1000\,hPa \cdot \exp\left(-\frac{h_P}{7986\,m}\right)$$

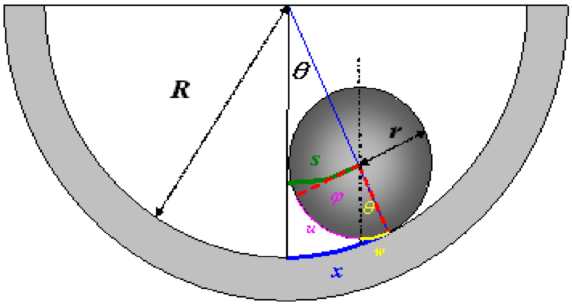
$$p_{\max}^{He} = 1000\,hPa \cdot 0,01416 = 14,1\,hPa$$

Differenzdruck:

$$\Delta p = p_{\max}^{He} - p_{\max}^{Luft} = 14,1\,hPa - 11,8\,hPa = 2,3\,hPa$$

4. ---

Herleitung der Nebenbedingung: $\varphi = \frac{R-r}{r}\cdot\theta$ (dies war aber nicht Teil der Aufgabenstellung)



Bei der Rollbewegung einer Kugel mit Radius r in einer Kugelschale mit dem Radius R bewegt sich der Schwerpunkt der Kugel auf einem Kreis mit Radius $(R-r)$. Einer Auslenkung des Schwerpunktes um den Winkel θ entspricht eine Bewegung des Schwerpunktes entlang des Kreissegments $s=(R-r)\cdot\theta$. Beim Rollen bewegt sich der Kontaktpunkt von Kugel und Kugelschale vom Nullpunkt entlang des Weges $x = R\cdot\theta$ auf der Kugelschale. Das entsprechende Kreissegment x auf der Kugel kann besteht aus den zwei Anteilen u und w. Das Kreissegment u entspricht der Strecke, die der Kugelschwerpunkt beim Abrollen um den Drehwinkel φ auf einer horizontalen Fläche zurücklegen würde. Das Kreissegment w entspricht der Verschiebung des Kontaktpunktes, die sich wegen der gekrümmten Form der Rollfläche ergibt.

Es gilt: $x = r\cdot(\varphi+\theta)$

und andererseits: $x = R\cdot\theta$

Daraus folgt: $R\cdot\theta = r\cdot(\varphi+\theta) = r\cdot\varphi + r\cdot\theta$

und schließlich: $\varphi = \frac{R-r}{r}\cdot\theta$

(Diese Beziehung konnte in der Klausur ohne Herleitung verwendet werden.)

----

4. Verwendung des D'Alembertschen Prinzips:

Man betrachte die Kugel nach einer (kleinen) Auslenkung des Kugelschwerpunktes um den Winkel θ.

Das D'Alembertsche Prinzip für die Translationsbewegung lautet:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = 0$$

$$\left(F_t - \frac{M}{r}\right) - m\,a = 0$$

mit F_t = Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_g und M = Drehmoment zur Erzeugung der Drehung für die Rollbewegung.

Es ist: $F_t = F_g\cdot\sin\theta = m\,g\sin\theta$

Die Beschleunigung ist: $a = (R-r)\cdot\ddot{\theta}$

Einsetzen von F_t und a: $-mg\sin\theta - \frac{M}{r} - m\cdot(R-r)\cdot\ddot{\theta} = 0$ (*)

Das D'Alembertsche Prinzip für die Rotationsbewegung lautet:

$$\sum_i \vec{M}_i - J\,\vec{a} = 0$$

Es folgt: $M - J\alpha = 0$

Mit $J = \frac{2}{5}m\,r^2$ und $\alpha = \ddot{\varphi}$ folgt: $M = \frac{2}{5}m\,r^2\ddot{\varphi} = 0$ (**)

Mit $\varphi =$ Winkel um den die Kugel gerollt ist.

Einsetzen von Gl. (**) in Gl. (*): $-mg\sin\theta - \frac{\frac{2}{5}m\,r^2\ddot{\varphi}}{r} - m(R-r)\ddot{\theta} = 0$

Es gilt laut Hinweis in der Aufgabenstellung:

$$\varphi = \frac{R-r}{r} \cdot \theta$$

Es folgt für die zweite Ableitung: $\ddot{\varphi} = \frac{R-r}{r} \cdot \ddot{\theta}$

Einsetzen: $-mg\sin\theta - \frac{\frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{R-r}{r} \cdot \ddot{\theta}}{r} - m(R-r)\ddot{\theta} = 0$

Für kleine Winkel kann die Näherung $\sin\theta \approx \theta$ verwendet werden.

Einsetzen und kürzen: $\ddot{\theta}\left(\frac{2}{5}(R-r) + (R-r)\right) + g\,\theta = 0$

Zusammenfassen und Umstellen: $\ddot{\theta} + \frac{g}{\frac{7}{5}(R-r)}\theta = 0$ (Harmonische DGL)

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}\cdot(R-r)}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}\cdot\left(R-\frac{R}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{10\cdot g}{7\cdot R}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10\cdot g}{7\cdot R}} = \sqrt{\frac{10\cdot 10\,m\,s^{-2}}{7\cdot 0{,}2\,m}} = 8{,}4525\,s^{-1}$$

Periodendauer: $T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot(R-r)}{g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot\left(R-\frac{R}{2}\right)}{g}}$

$$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{7\cdot R}{10\,g}} = 0{,}7434\,s$$

---

4. Alternativer Ansatz unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes:

$$E_{ges} = E_{kin,trans} + E_{kin,rot} + E_{pot}$$

$$m\,g\,h_0 = \frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + m\,g\,h(\theta) \qquad (***)$$

Die Höhe des Schwerpunktes ergibt sich aus geometrischen Betrachtungen.

Ergebnis: $h(\theta) = (R-r)\cdot(1-\cos\theta)$

Für kleine Winkel gilt die Näherung: $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$

Es folgt: $h(\theta) \approx (R-r)\cdot\frac{1}{2}\theta^2$

Einsetzen in Gl. (***): $m\,g\,h_0 = \frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m\,g\,(R-r)\theta^2$

Es gilt laut Hinweis in der Aufgabenstellung:

$$\varphi = \frac{R-r}{r} \cdot \theta$$

Es folgt für die erste Ableitung: $\dot{\varphi} = \omega = \frac{R-r}{r} \cdot \dot{\theta}$

Schwerpunktgeschwindigkeit ist: $v = \dot{s} = (R-r)\cdot\dot{\theta}$

Massenträgheitsmoment: $J = \frac{2}{5} m r^2$

Einsetzen: $$m\,g\,h_0 = \frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\,r^2\frac{\left(R-r\right)^2}{r^2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,g\left(R-r\right)\theta^2$$

Zusammenfassen und Umstellen: $$\frac{m\,g\,h_0}{m\left(R-r\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\left(R-r\right)\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\,\theta^2 = konst.$$

Ableitung $\frac{d}{dt}$ ergibt: $$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\left(R-r\right)\right)2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}g\,2\,\theta\,\dot{\theta}$$

Kürzen: $$0 = \left(\frac{7}{5}\left(R-r\right)\right)\ddot{\theta} + g\ \theta$$

Lösung: $$\ddot{\theta} + \frac{g}{\frac{7}{5}\left(R-r\right)}\ \theta = 0$$ (Harmonische DGL)

Eigenkreisfrequenz: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}\cdot\left(R-r\right)}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}\cdot\left(R-\frac{R}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{10\cdot g}{7\cdot R}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10\cdot g}{7\cdot R}} = \sqrt{\frac{10\cdot 10\,m\,s^{-2}}{7\cdot 0{,}2\,m}} = 8{,}4525\,s^{-1}$$

Periodendauer: $$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot\left(R-r\right)}{g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot\left(R-\frac{R}{2}\right)}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{7\cdot R}{10\,g}} = 0{,}7434\,s$$

---

4. Einige Studierende haben folgenden einfachen und sehr kurzen Lösungsweg benutzt. Er führt zum richtigen Ergebnis und wurde auch akzeptiert.
Lösungsansatz: Man betrachtet die Kugel mit Radius r als physikalisches Pendel. Man kann die in der Vorlesung abgeleitete Formel für ω_0 verwenden:

Eigenkreisfrequenz: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J_{ges}}}$$

mit
$m =$ Masse der Kugel
$g =$ Erdbeschluenigung
$d = r$ Abstand zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt
$J_{ges} =$ gesamtes Massenträgheitsmoment der Kugel bezüglich der Drehachse, die im Mittelpunkt des Kreises mit Radius R liegt.

Nach dem Steinerschen Satz gilt: $$J_{ges} = m\,r^2 + \frac{2}{5}m\,r^2 = \frac{7}{5}m\,r^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J_{ges}}} = \sqrt{\frac{m\,g\,r}{\frac{7}{5}m\,r^2}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}r}} = \sqrt{\frac{10\cdot g}{7\cdot R}} = 0{,}84525\,s^{-1}$$

Periodendauer: $$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot\left(R-r\right)}{g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cdot\left(R-\frac{R}{2}\right)}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{7\cdot R}{10\,g}} = 0{,}7434\,s$$

5a. Eigenkreisfrequenz des Federpendels ohne Reibung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{100\,kg\,s^{-2}}{1\,kg}} = 10\,s^{-1}$$

Periodendauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,6283\,s$

Bei Coulombscher (geschwindigkeitsunabhängiger) Reibung wir jede Amplitude um eine festen Betrag verringert.

Es gilt: $x_{n+1} - x_n = \Delta x = 4a$

mit: $a = \frac{\mu_G F_N}{D} = \frac{\mu_G m g}{D}$

Nach drei Perioden solle die Ausgangsamplitude $x_0 = 5\,cm$ auf 28%, also auf $x_3 = 1,4\,cm$ abgenommen haben. Dies entspricht einer Abnahme von $\Delta x = 1,2\,cm$ pro Periode.

Für a folgt: $a = \frac{\Delta x}{4} = \frac{1,2\,cm}{4} = 0,3\,cm = 0,003\,m$

Lösung: $\mu_G \geq \frac{a\,D}{m\,g} = \frac{0,003\,m \cdot 100\,kg\,s^{-2}}{1\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2}} = 0,03$

Bei Stokescher (geschwindigkeitsabhängiger) Reibung gilt ein exponentielles Schwächungsgesetz: $x_3 = x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot 3 \cdot T_e)$

mit $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Bei kleiner Dämpfung gilt: $\omega_e \approx \omega_0$ und $T_e \approx T_0$

Näherungslösung: $T_e \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1\,kg}{100\,kg\,s^{-2}}} = 0,6283\,s$

$$\beta = -\frac{\ln \frac{x_3}{x_0}}{3T_e} \approx -\frac{\ln \frac{x_3}{x_0}}{3 \cdot 2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Näherungslösung: $\beta \geq -\frac{\ln \frac{1,4\,cm}{5,0\,cm}}{3T_e} \approx -\frac{\ln \frac{1,4\,cm}{5,0\,cm}}{3 \cdot 2\pi}\sqrt{\frac{100\,kgs^{-2}}{1\,kg}} = 0,6753\,s^{-1}$

Exakte Lösung:

Man kann die Abklingkonstante auch exakt bestimmen:

Es gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\left(\ln \frac{5,0}{1,4}\right)^2}{3^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1 + \frac{\left(\ln \frac{5,0}{1,4}\right)^2}{4\pi^2 3^2}\right) = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_e = \sqrt{1 + \frac{\left(\ln \frac{5,0}{1,4}\right)^2}{4\pi^2 3^2}} \cdot T_0 = \sqrt{1 + 0,00456} \cdot T_0$$

$$T_e = 1,00228 \cdot T_0$$

$$\beta = \frac{\ln\frac{5,0}{1,4}}{3\cdot 1,00228\cdot T_0} = 0,9977\cdot\beta_{Näherung}$$

$$\beta_{exakt} = 0,9977\cdot\beta_{Näherung} = 0,6738\,s^{-1}$$

Der Unterschied ist aber vernachlässigbar. Für diese Lösung gibt es Sonderpunkte.

5b. Für die Resonanzfrequenz gilt: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\cdot\beta^2}$

Für die Amplitudenfunktion gilt: $x_0\left(\omega_a,\omega_0,\beta\right) = \frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_a^2\right)^2+\left(2\beta\omega_a\right)^2}}$

Für $\omega_a = 0$ folgt: $x_0\left(\omega_a=0,\omega_0,\beta\right) = \frac{f_a}{\omega_0^2}$

Die Amplitudenüberhöhung ist: $\frac{A}{A_0} = \frac{x_0\left(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta\right)}{x_0\left(\omega_a=0,\omega_0,\beta\right)} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_a^2\right)^2+\left(2\beta\omega_a\right)^2}}$

Im Resonanzmaximum gilt: $\omega_a^2 = \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\cdot\beta^2$

Einsetzen und Umformen: $\frac{A}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2-4\beta^4}}$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,06738^2+0,06738^4}} = 7,40$$