Fachhochschule Hannover — Klausur Physik II — 05.01.2011
Fachbereich Maschinenbau — Zeit: 90 min
zum Fach Physik II im WS1011 — Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

---

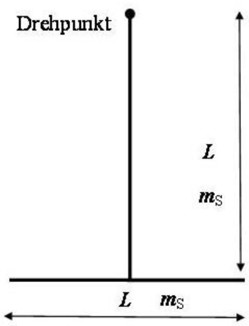
1. Eine kugelförmige Unterwasserforschungsstation mit Außendurchmesser D = 6 m soll mit einem Seil am Meeresbodenverankert werden. Voll besetzt hat die Forschungstauchglocke eine Masse von 75 t. Welche Zugkraft wirkt an dem Seil?

2. Welcher Volumenanteil eines Werkstücks aus Stahl taucht unter, wenn man es in Quecksilber schwimmen lässt?

3a. Schätzen Sie die Gesamtmasse der Erdatmosphäre auf der Basis des Standarddrucks $p_0 = 1013{,}25\,hPa$ und der mittleren Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$.

b. Verkehrsflugzeuge fliegen typischerweise in Höhen von 11 km. Wie viel Prozent der Atmosphärenmassen befinden sich unterhalb, wie viel oberhalb des Flugzeugs?

4. Es soll ein Pendel aus zwei (dünnen) Stangen mit jeweils Länge L und Masse m_S betrachtet werden (siehe Abb.) ($L = 1\,m$, $m_S = 1\,kg$).



a. Ersetzen Sie zunächst das reale Pendel durch ein mathematisches Pendel der Länge L und berechnen Sie die Schwingungsdauer für ungedämpfte Schwingungen.

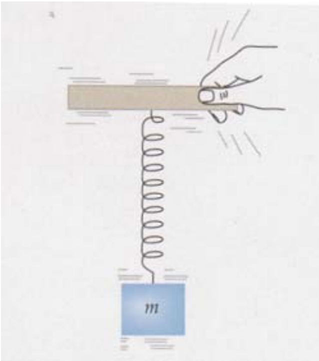
b. Behandeln Sie das gezeigte Pendel als physikalischen Pendels und berechnen Sie dessen Schwingungsdauer für den Fall einer ungedämpften Schwingung.

c. Eine Messung der Schwingungsdauer des physikalischen Pendels ergibt, dass die Amplitude nach fünf Schwingungsdauern ($5\cdot T_e$) auf 20% der ursprünglichen Amplitude abgenommen hat. Berechnen Sie die Abklingkonstante für die gedämpfte Schwingung.

d. Wie groß ist die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung T_e?

e. Das gezeigte physikalische Pendel soll zum Zeitpunkt t = 0 mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\dot{\varphi}_0 = 10\,s^{-1}$ aus der Ruhelage ausgelenkt werden. Berechnen Sie den Auslenkungswinkel zum Zeitpunkt $t = 20\,s$.

5. Hängt man eine Masse von 200 g an eine Feder, so verlängert sie sich um 5 cm.



a. Wie groß ist die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung, wenn man ein Federpendel mit einer Masse von 100 g und die oben beschriebene Feder verwendet?

b. Eine sehr genaue Messung der Schwingungsdauer ergibt den Wert von 0,32 s. Wie groß ist die Abklingkonstante β?

c. Mit welcher Frequenz ω_R muss die Aufhängung periodisch bewegt werden, um das Resonanzmaximum zu erhalten?

d. Wie groß muss das Maximum der periodisch erregenden Kraft sein, die bei der Resonanzfrequenz ω_R eine Resonanzamplitude von 20 cm erzeugt??

Dichtewerte unter Standardbedingungen: $\rho_{Meerwasser} = 1{,}03\,g\,cm^{-3}$, $\rho_{Stahl} = 7{,}85\,g\,cm^{-3}$, $\rho_{Hg} = 13{,}595\,g\,cm^{-3}$, $\rho_{Luft} = 1{,}293\,kg\,m^{-3}$. Mittlerer Erdradius: $\overline{R}_{Erde} = 6371\,km$.

Verwenden Sie zur Vereinfachung mit Ausnahme von Aufgabe 3 den Wert g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1. Auf die Unterwasserforschungsstation wirken drei Kräfte: Die Auftriebskraft F_A, die Gewichtskraft F_g und die Seilkraft F_S. Voraussetzung ist, dass die Auftriebskraft größer ist als die entgegengesetzt gerichtete Gewichtskraft, so dass deren Differenz die Seilkraft ergibt.

Es gilt: $F_g + F_S = F_A$

mit: $F_A = \rho_{Wasser} \cdot V \cdot g$

mit: $F_g = m \cdot g$

Es folgt:

$$F_S = F_A - F_g = \rho_{Wasser} \cdot V \cdot g - m \cdot g$$

$$F_S = \left(\rho_{Wasser} \cdot V - m\right) \cdot g$$

$$F_S = \left(1,03 \cdot 10^3\, kg\, m^{-3} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 - 75000\, kg\right) \cdot 10\, ms^{-2}$$

$$F_S = \left(1,03 \cdot 10^3\, kg\, m^{-3} \cdot 113,09 m^3 - 75000\, kg\right) \cdot 10\, ms^{-2}$$

$$F_S = \left(116490\, kg - 75000\, kg\right) \cdot 10\, ms^{-2}$$

Ergebnis: $F_S = 414,9\, kN$

2. Ein an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwimmender Körper verdrängt ein Volumen, dessen Gewichtskraft gleich der Gewichtskraft des Körpers ist.

Es gilt:

$$\rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{eingetaucht} \cdot g = m_{Körper} \cdot g$$

$$\rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{eingetaucht} \cdot g = \rho_{Körper} \cdot V_{Körper} \cdot g$$

Es folgt:

$$\frac{V_{eingetaucht}}{V_{Körper}} = \frac{\rho_{Körper}}{\rho_{Flüssigkeit}} = \frac{\rho_{Stahl}}{\rho_{Hg}} = \frac{7,85}{13,595} = 0,5774$$

Es tauchen als 57,74% des Volumens unter und 42,26% ragen heraus.

3a. Der Luftdruck von $p_0 = 1013,25\, hPa$ entspricht der Gewichtskraft einer Luftsäule mit einer Höhe bis zum Atmosphärenrand bezogen auf eine Fläche von 1 m^2. Setzt man die Bezugsfläche gleich der Erdoberfläche A_{Erde}, so erhält man die Gesamtmasse der Luft m_{Luft}.

$$p_0 = \frac{F_{g,Luft}}{A_{Erde}} = \frac{m_{Luft} \cdot g}{A_{Erde}}$$

mit:

$$A_{Erde} = 4\pi \cdot R_{Erde}^2 = 4\pi \cdot \left(6,371 \cdot 10^6\right)^2 m^2$$

$$A_{Erde} = 5,1005 \cdot 10^{14}\, m^2$$

Masse der Luft:

$$m_{Luft} = \frac{p_0 \cdot A_{Erde}}{g}$$

$$m_{Luft} = \frac{1013,25 \cdot 10^2\, kg\, m^{-1}\, s^{-2} \cdot 5,1006 \cdot 10^{14}\, m^2}{9,81\, m\, s^{-2}}$$

$$m_{Luft} = 5,268 \cdot 10^{18}\, kg$$

3b. Der Standarddruck p_0 am Boden entsteht durch die Gewichtskraft der gesamten Luftsäule oberhalb der Bezugsfläche:

$$p_0 = \frac{m_{ges,Luft} \cdot g}{A}$$

Der Luftdruck in der Flughöhe h entsteht durch die Gewichtskraft der Luftsäule die sich oberhalb der Höhe *h* befindet.

$$p_h = \frac{m_{h,Luft} \cdot g}{A}$$

Mit der barometrischen Höhenformel kann der Druck in der Höhe *h* berechnet werden.

$$p_h = p\left(h = 11km\right) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}$$

Es folgt: $$\frac{m_{h,Luft}}{m_{ges,Luft}} = \frac{p_h}{p_0} = \frac{p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}$$

Lösung: $$\frac{m_{h,Luft}}{m_{ges,Luft}} = e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} = e^{-\frac{1,293 kg\, m^{-3} \cdot 9,81 m\, s^{-2}}{1013,25 kg\, m^{-1} s^{-2}} \cdot 11000 m}$$

$$\frac{m_{h,Luft}}{m_{ges,Luft}} = e^{-\frac{1,293 kg\, m^{-3} \cdot 9,81 m\, s^{-2}}{1013,25 \cdot 10^2\, kg\, m^{-1} s^{-2}} \cdot 11000 m} = e^{-1,37703} = 0,2523$$

Es befinden sich also 25,23% der Luftmasse oberhalb und 74,76% unterhalb des Flugzeugs.

4. Beim mathematischen Pendel verwendet man gilt für die Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10\, m\, s^{-2}}{1 m}} = 3,162\, s^{-1}$$

Lösung: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,987\, s$$

4b. Physikalisches Pendel: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{ges} \cdot g \cdot d}{J_{ges}}}$$

mit *d* = Abstand Dreh- zum Schwerpunkt.

Es gilt: $$d = \frac{m_S \cdot L/2 + m_S \cdot L}{m_S + m_S} = \frac{\frac{3}{2} \cdot m_S \cdot L}{2 m_S} = \frac{3}{4} L$$

$$d = \frac{3}{4} \cdot 1m = 0,75 m$$

$$J_{ges} = J_{S,1} + J_{S,2}$$

Massenträgheitsmoment Stange 1 ("dünne Stange mit Drehpunkt am Ende"):

$$J_{S,1} = \frac{1}{3} \cdot m_S \cdot L^2 = \frac{1}{3} \cdot 1kg \cdot 1^2 m^2 = \frac{1}{3} kg\, m^2$$

Massenträgheitsmoment Stange 2 ("dünne Stange mit Drehpunkt in der Mitte" plus Steinerscher Anteil)

$$J_{S,2} = \frac{1}{12} \cdot m_S \cdot L^2 + m_S \cdot L^2$$

$$J_{S,2} = \frac{1}{12} \cdot 1kg \cdot 1^2\, m^2 + 1kg \cdot 1^2\, m^2$$

$$J_{S,2} = \frac{13}{12} kg\, m^2$$

$$J_{ges} = J_{S,1} + J_{S,2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{13}{12}\right) kg\, m^2 = \frac{17}{12} kg\, m^2$$

Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 0,75\,m}{\frac{17}{12} kg\, m^2}} = \sqrt{\frac{240 \cdot 0,75\,s^{-2}}{17}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{180\,s^{-2}}{17}} = 3,254\,s^{-1}$$

Lösung:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,931\,s$$

4c. Für den Auslenkungswinkel nach $5 \cdot T_e$ gilt:

$$\frac{\varphi(5 \cdot T_e)}{\varphi_0} = 0,2 = e^{-\beta \cdot 5T_e}$$

Näherungslösung:

$$\beta = -\frac{\ln 0,2}{5T_e} \cong \frac{-(\ln 0,2) \cdot \omega_0}{5 \cdot 2\pi} = \frac{-(-1,60943)}{5 \cdot 2\pi} \cdot \omega_0$$

$$\beta_{Näherung} = 0,05123 \cdot \omega_0 = 0,05123 \cdot 3,254\,s^{-1}$$

Ergebnis:

$$\beta_{Näherung} = 0,1667\,s^{-1}$$

Exakte Lösung:

$$\beta = -\frac{\ln 0,2}{5T_e} = \frac{\ln 0,2 \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{5 \cdot 2\pi}$$

$$\beta^2 = \frac{(\ln 0,2)^2 \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)}{100\pi^2}$$

$$100\pi^2 \beta^2 = (\ln 0,2)^2 \cdot \omega_0^2 - (\ln 0,2)^2 \cdot \beta^2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(\ln 0,2)^2 \cdot \omega_0^2}{100\pi^2 + (\ln 0,2)^2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{100\pi^2}{(\ln 0,2)^2}}}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{100\pi^2}{(\ln 0,2)^2}}} = \frac{\omega_0}{19,5454} = 0,05116 \cdot \omega_0$$

Ergebnis:

$$\beta_{exakt} = 0,05116 \cdot 3,254\,s^{-1} = 0,1665\,s^{-1}$$

Näherungslösung und exakte Lösung weichen ca. 0,12% voneinander ab.

4d. Es gilt:

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{3,254^2\,s^2 - 0,1665^2\,s^2} = 3,250\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung:

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3,254^2\,s^2 - 0,1665^2\,s^2}}$$

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{3,254^2\,s^2 - 0,1665^2\,s^2}} = 1,928\,s$$

4e. Für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)$ und $\dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0$ gilt nach Formelsammlung die allgemeine Lösung:

$$\varphi(t)=\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_e}\cdot e^{-\beta t}\cdot\sin(\omega_e t)$$

Einsetzen:

$$\varphi(t=20\,s)=\frac{10\,s^{-1}}{3,250\,s^{-1}}\cdot e^{-0,1665\,s^{-1}\cdot 20\,s}\cdot\sin\left(3,250\,s^{-1}\cdot 20\,s\right)$$

$$\varphi(t=20\,s)=3,0769\cdot 0,03579\cdot 0,8268$$

Lösung im Bogenmaß: $\varphi(t=20\,s)=0,09106$

Lösung im Winkelmaß: $\varphi(t=20\,s)=0,09106\cdot\frac{180°}{\pi}=5,2°$

5a. Federkonstante: $D=\frac{\Delta F}{\Delta s}=\frac{0,2\,kg\cdot 10\,m\,s^{-2}}{0,05\,m}=40\;N\,m^{-1}$

Eigen(kreis)frequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{40\,kg\,s^{-2}}{0,1\,s^2\,kg}}=20\;s^{-1}$$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{20\,s^{-1}}=\frac{\pi}{10}s=0,31415\,s$$

5b. Gemessene Schwingungsdauer: $T_e=0,32\,s$

Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung: $\omega_e=\frac{2\pi}{T_e}=\frac{2\pi}{0,32\,s}=19,635\,s^{-1}$

Abklingkonstante: $\beta=\sqrt{\omega_0^2-\omega_e^2}$

$$\beta=\sqrt{20^2-19,635^2}\;s^{-1}=3,8037\;s^{-1}$$

5c. Resonanzfrequenz: $\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{20^2-2\cdot 3,8037^2}\;s^{-1}$

$$\omega_R=19,2630\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer des Erregers: $T_R=\frac{2\pi}{\omega_R}=0,3262\,s$

5d. Resonanzamplitude: $x_R^{\max}=x_R\left(\omega_a=\omega_R,\omega_0,\beta\right)$

$$x_R^{\max}=\frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

$$x_R^{\max}=\frac{F_{err}^{\max}/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\left(2\beta\omega_R\right)^2}}$$

Maximale Kraft des Erregers $F_{err}^{\max}=m\cdot x_R^{\max}\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\left(2\beta\omega_R\right)^2}$

$$F_{err}^{\max} = 0,1\,kg \cdot 0,2\,m\sqrt{\left(20^2 - 19,2630^2\right)^2 + \left(2 \cdot 3,8037 \cdot 19,2630\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,02\,kg\,m\sqrt{\left(400 - 371,0632\right)^2 + \left(146,5413\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,02\,kg\,m\sqrt{\left(28,9368\right)^2 + \left(146,5413\right)^2}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 0,02\,kg\,m\sqrt{837,3384 + 21474,3526}\ s^{-2}$$

$$F_{err}^{\max} = 2,9874\,N \cong 2,99\,N$$