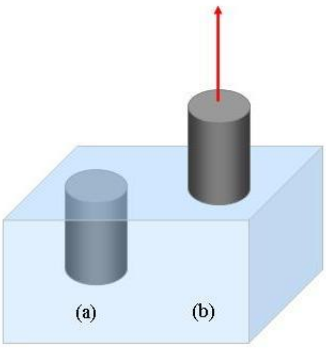
Fachhochschule Hannover | Klausur Physik II | 16.06.2011
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
zum Fach Physik II im SS11 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

---

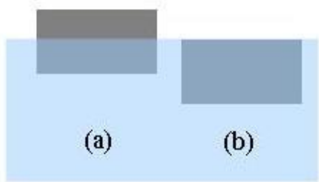
1. Ein zylinderförmiger Schwimmkörper aus $d = 10\,mm$ dickem Stahlblech (Dichte: $\rho_{Stahl} = 7{,}8\,g\,cm^{-3}$) besitzt einen Radius von $R = 1\,m$ und eine Höhe von $H = 4\,m$. Der Schwimmkörper schwimmt in Wasser und soll so weit mit Wasser gefüllt werden, dass er nur noch mit $y = 10\,cm$ aus dem Wasser ragt (Position (a)).
(Dichte Wasser: $\rho_{H_2O} = 1{,}0\,g\,cm^{-3}$)



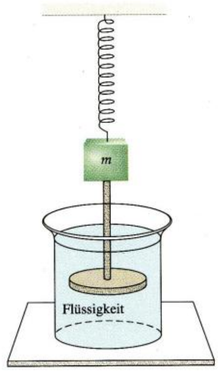
a. Wie viel Prozent des Volumens muss mit Wasser gefüllt werden? (Man kann als Näherung: $V_{innen} \cong V_{außen}$ verwenden).

b. Welche Hubarbeit W ist nötig, um den Zylinder von der Schwimmlage (a) aus dem Wasser in die Position (b) zu heben?

2. Ein homogener Holzquader mit Länge $L = 20\,cm$, Breite $B = 10\,cm$ und Höhe $H = 5{,}066\,cm$ schwimmt in Wasser (Dichte: $\rho_{H2O} = 1{,}0\,g\,cm^{-3}$. In der Ruhelage (a) soll der Quader mit seiner halben Höhe in das Wasser eintauchen. Der Quader wird durch eine äußere Druckkraft bis zur Oberkante eingetaucht (b) und dann losgelassen. Berechnen Sie die Schwingungsdauer T, wobei Reibungskräfte durch die Flüssigkeit vernachlässigt werden können.



3. Betrachten Sie ein Feder-Masse-System mit geschwindigkeitsabhängiger Reibung (Masse: $m = 0{,}1\,kg$, Federkonstante: $D = 6{,}1685\,N\,m^{-1}$)



a. Eine Schwingungsamplitude x_0 geht nach 8 Perioden auf 10% von x_0 zurück. Wie groß ist die Abklingkonstante β? Bestimmen Sie zunächst eine Näherungslösung, indem Sie $T_e \cong T_0$ verwenden.

b. Berechnen Sie die exakte Lösung unter Berücksichtigung, dass tatsächlich $T_e \neq T_0$ gilt.

4. In der Umgebung eines empfindlichen Instruments ($m_{Instr} = 4\,kg$) vibriert der Boden sinusförmig mit einer Frequenz von $20\,Hz$ und einer Amplitude von 0,5 mm. Zur Schwingungsisolierung soll das Instrument auf eine schwere Betonplatte m_B gestellt werden, die auf vier parallel angeordneten Federn mit jeweils $D = 25\,kN/mm$ steht. Die Abklingkonstante des Systems beträgt näherungsweise 10% des Wertes der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Wie groß muss die Masse der Betonplatte sein, wenn die äußere Erregung an der dem System Betonplatte plus Instrument nur noch Amplituden von 0,02 mm erzeugen soll?

5. Beschreiben Sie qualitativ die Eigenschaften erzwungener Schwingungen mit unterschiedlichen Dämpfungen: Skizzieren Sie dazu die Resonanzkurven und die Funktionen der Phasenverschiebung für $0 \le \beta \le \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. Was passiert, wenn $\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ist?

Verwenden Sie zur Vereinfachung den Wert g = 10 m s^{-2}.

Lösungen:

1a. Masse des leeren Schwimmkörpers: $m_{Schwimmkörper} = m_{Boden} + m_{Deckel} + m_{Hohlzylinder}$

Massen von Boden und Deckel: $m_{Boden} = m_{Deckel} = \pi \cdot R^2 \cdot d \cdot \rho_{Stahl}$

Masse Hohlzylinder: $m_{Hohlzylinder} = 2\pi \cdot R \cdot H \cdot d \cdot \rho_{Stahl}$

Teilergebnisse:

	Hohlzyliner	Boden/Deckel	gesamt
Volumen / cm3**	250071	31416	312903
Masse / kg	1950,6	245,0	2440,6

Gesamtmasse: $m_{Schwimmkörper} = 2440,6\,kg$

Schwebebedingung: Auftriebskraft = Gewichtskraft

$$F_A = F_{g,ges}$$

Auftriebskraft: $F_A = \rho_{H_2O} \cdot \left(\pi R^2 \cdot (H - y)\right) \cdot g = 122\,522\,N$

Gewichtskraft: $F_{g,ges} = F_{g,SK} + F_{g,WB}$

Gewichtskraft des leeren Schwimmkörpers:

$$F_{g,SK} = m_{Schwimmkörper} \cdot g = 24\,406\,N$$

Gewichtskraft des Wasserballastes: $F_{g,WB} = F_A - F_{g,SK} = 98116\,N$

Volumen des Wasserballastes: $V_{WB} = \frac{F_{g,WB}}{\rho \cdot g} = \frac{98116N}{1g\,cm^{-3} \cdot 10\,ms^{-2}} = 9\,811600\,cm^3$

Volumen des Schwimmkörpers: $V_{SK} = \pi R^2 \cdot H = 12\,566\,371 cm^3$

Prozentualer Anteil des wassergefüllten Volumens:

Ergebnis: $P = \frac{V_{WB}}{V_{SK}} = \frac{9811600}{12\,566\,371} = 78,1\%$

1b. Arbeit zum Heben des Schwimmkörpers:

Hubarbeit: $W_{ges} = \int_{x=y}^{x=H} \left(F_g - F_A(x)\right) dx = W_1 - W_2$

Ohne Auftriebskraft wäre die Arbeit: $W_1 = F_{g,ges} \cdot (H - y) = m_{ges} \cdot g \cdot (H - y)$

Gesamtmasse: $m_{ges} = m_{SK} + m_{WB} = 2450,44\,kg + 9801,769\,kg$

$$m_{ges} = m_{SK} + m_{WB} = 12\,252,209\,kg$$

Gesamte Gewichtskraft: $F_{g,ges} = 12252,209\,kg \cdot 10\,ms^{-2} = 122\,522,09\,N$

Arbeit ohne Auftriebskraft: $W_1 = F_{g,ges} \cdot (H - x) = 122\,522,09\,N \cdot 3,90m$

$$W_1 = F_{g,ges} \cdot (H - x) = 477,836\,kJ$$

Die Auftriebskraft $F_A(x)$ ist eine lineare Funktion in Abhängigkeit von *x*. Für $x = y$ ist die Auftriebskraft maximal und gleich der Gewichtskraft $F_{g,ges} = 122\,522,09\,N$. Für $x = H$ ist die Auftriebskraft Null. Der Gradient (Steigung) der Auftriebskraft ist:

$$\frac{dF_A(x)}{dx} = \frac{\Delta F_A}{\Delta x} = \frac{122\,522,09N}{3,90\,m} = 31415,92\,Nm^{-1}$$

Die Arbeit W_2 gegen die Auftriebskraft $F_A(x)$ ist:

$$W_2 = \int_{x=y}^{x=H} F_A(x)\,dx = \int_{x=y}^{x=H} \left(\frac{dF_A(x)}{dx}\right) \cdot x\,dx$$

$$W_2 = \frac{dF_A(x)}{dx}\int_{x=y}^{x=H} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{dF_A(x)}{dx}\cdot x^2\Big|_y^H$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{dF_A(x)}{dx}\cdot x^2\Big|_y^H = \frac{1}{2}\cdot\frac{dF_A(x)}{dx}\cdot\left(H^2 - y^2\right)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\cdot 31415{,}92\,\frac{N}{m}\cdot\left(4{,}0^2 - 0{,}1^2\right)m^2) = 251170{,}28\,J$$

Ergebnis: $W_{ges} = W_1 - W_2 = 477{,}836kJ - 251{,}170kJ = 226{,}666\,kJ$

2. Man kann die Lösung durch Vergleich des schwingenden Holzquaders mit einem Feder-Masse-System erhalten.
Beim Feder-Masse-System wirkt ein lineares Kraftgesetz (Hooksches Gesetz).
Kraftgesetz: $F = D\cdot x$,
wobei *x* der Auslenkung aus der Ruhelage entspricht.
Auch bei Auslenkung des schwimmenden Holzquaders aus der Ruhelage wirkt ein lineares Kraftgesetz.
Wird der Quader um $x = \frac{H}{2}$ nach oben ausgelenkt, so wirkt als Rückstellkraft die gesamte Gewichtskraft $F_g = m\cdot g$. Bei einer Auslenkung um $x = \frac{H}{2}$ nach unten wirkt als Differenz von Auftriebs- und Gewichtskraft eine genau so große Kraft, die nach oben gerichtet ist.
Dei Federkonstante kann deshalb in folgender Form ausgedrückt werden:

$$D = \frac{F_g}{H/2} = \frac{2\,m\,g}{H}$$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{2\,m\,g}{H}}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{H}}$

Schwingungsdauer: $T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{H}{2g}} = 0{,}3162\,s$

Genauere Herleitung mit Hilfe der Schwingungsgleichung:
(nicht erforderlich in der Klausur)
Die Auslenkung des Schwerpunktes des Quaders aus der Gleichgewichtslage soll durch die Koordinate $x \in [-x_0, +x_0]$ beschrieben werden. Es gilt: $x_0 = \frac{H}{2}$. Wird der Schwerpunkt nach unten gedrückt, ist $x < 0$. Die resultierende Kraft aus Auftriebskraft und Gewichtskraft ist nach oben gerichtet, also positiv. Wird der Schwerpunkt des Quaders hingegen aus dem Wasservolumen nach oben gezogen, ist $x > 0$. Die resultierende Kraft aus Auftriebskraft und Gewichtskraft ist nach unten gerichtet, also negativ.
Für die Rückstellkraft $F_{rück}$ ergibt sich:

Rückstellkraft: $F_{rück} = F_A - F_g$

Auftriebskraft: $F_A = \rho_{H_2O}\cdot\left(L\cdot B\cdot(x_0 - x)\right)\cdot g$

Gewichtskraft: $F_g = \rho_Q\cdot\left(L\cdot B\cdot H\right)\cdot g$

Da der Körper in der Ruhelage bis zur halben Höhe eintaucht, gilt: $\rho_Q = \frac{\rho_{H_2 0}}{2}$

Es folgt: $$F_{rück} = F_A - F_g = \rho_{H_2O} \cdot \left(L \cdot B \cdot \left(x_0 - x\right)\right) \cdot g - \frac{\rho_{H_2O}}{2} \cdot \left(L \cdot B \cdot H\right) \cdot g$$

Da $x_0 = \frac{H}{2}$ ist, folgt: $$F_{rück} = \rho_{H_2O} \left(L \cdot B \cdot \frac{H}{2}\right) g - \rho_{H_2O} \left(L \cdot B \cdot x\right) g - \frac{\rho_{H_2O}}{2} \left(L \cdot B \cdot H\right) g$$

Es folgt: $$F_{rück} = -\rho_{H_2O} \left(L \cdot B \cdot x\right) g \qquad (1)$$

D'Alembertsches Prinzip: $$\sum_i \vec{F}_i - m_Q \, \vec{a} = 0$$

$$F_{rück} - m_Q \, a = 0 \qquad (2)$$

Die Masse des Quaders ist: $$m_Q = \frac{\rho_{H_2O}}{2} L \cdot B \cdot H \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (3) in (2): $$-\rho_{H_2O} \, L \cdot B \cdot x \cdot g - \frac{\rho_{H_2O}}{2} L \cdot B \cdot H \cdot \ddot{x} = 0$$

Es folgt: $$\ddot{x} + \frac{2g}{H} x = 0$$

Die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung lautet:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\,g}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,m\,s^{-2}}{0{,}05066\,m}} = 19{,}869\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

Ergebnis: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \cong 0{,}3162\,s$$

3a. Bestimmung der Abklingkonstante mit Hilfe der Näherung $T_e \cong T_0$:

Es gilt laut Aufgabenstellung: $$x\left(t = 8T_e\right) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot 8 \cdot T_e} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_e} \cdot 8T_e\right) = 0{,}1 \cdot x_0$$

Es folgt: $$e^{-\beta \cdot 8 \cdot T_e} \cdot \cos\left(8 \cdot 2\pi\right) = 0{,}1$$

Da $\cos\left(8 \cdot 2\pi\right) = 1$, folgt: $$e^{-\beta \cdot 8 \cdot T_e} = 0{,}1$$

$$\beta = -\frac{\ln\left(0{,}1\right)}{8 \cdot T_e}$$

Aus den Angaben zur Masse und zur Federkonstante erhält man die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{6{,}1685\,N\,m^{-1}}{0{,}1\,kg}} = 7{,}85398\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer des ungedämpften Feder-Masse.Systems:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}8\,s$$

Man kann in einem ersten Schritt die Näherung: $T_e \cong T_0$ verwenden.

Es folgt: $$\beta = -\frac{\ln\left(0{,}1\right)}{8 \cdot T_e} \approx -\frac{\ln\left(0{,}1\right)}{8 \cdot T_0} = -\frac{\ln\left(0{,}1\right)}{8 \cdot 2\pi} \cdot \omega_0$$

$$\beta = 0{,}0458085 \cdot \omega_0$$

Ergebnis: $$\beta = -\frac{-2{,}302585}{8 \cdot 0{,}8\,s} = 0{,}359778\,s^{-1}$$

3b. Bestimmung der Abklingkonstante unter Verwendung der exakten Bedingung $T_e \neq T_0$:

Es gilt: $$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \frac{(2\pi)^2}{T_e^2}$$

Es folgt: $$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Exakte Lösung: $$\beta = -\frac{\ln 0{,}1}{8 \cdot T_e} = \frac{\ln 0{,}1 \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{8 \cdot 2\pi}$$

$$\beta^2 = \frac{(\ln 0{,}1)^2 \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)}{256\pi^2}$$

$$256\pi^2\beta^2 = (\ln 0{,}1)^2 \cdot \omega_0^2 - (\ln 0{,}1)^2 \cdot \beta^2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(\ln 0{,}1)^2 \cdot \omega_0^2}{256\pi^2 + (\ln 0{,}1)^2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{256\pi^2}{(\ln 0{,}1)^2}}}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{256\pi^2}{(\ln 0{,}1)^2}}} = \frac{\omega_0}{21{,}85291} = 0{,}0457605 \cdot \omega_0$$

Ergebnis: $$\beta_{exakt} = 0{,}0457605 \cdot \frac{2\pi}{T_0} = 0{,}359402\, s^{-1}$$

Näherungslösung und exakte Lösung weichen ca. 0,1% voneinander ab.

4. Laut Aufgabenstellung soll der Boden sinusförmig mit einer Frequenz von $2\,Hz$ und einer Amplitude von 0,5 mm vibrieren.

Die Amplitudenfunktion lautet: $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_a \cdot t)$,

mit: $x_0 = 5\,mm$

und: $\omega_a = 2\pi \cdot 2s^{-1} = 125{,}66\,s^{-1}$

Die Geschwindigkeitsfunktion lautet: $v(t) = \dot{x}(t) = (x_0 \cdot \omega_a) \cdot \cos(\omega_a \cdot t)$

Die Beschleunigungsfunktion lautet: $a(t) = \ddot{x}(t) = -(x_0 \cdot \omega_a^2) \cdot \sin(\omega_a \cdot t)$

Die maximale Amplitude der Beschleunigungsfunktion ist demnach:

$$f_a = \frac{F_a}{m} = x_0 \cdot \omega_a^2$$

$$f_a = 0{,}0005\,m \cdot (125{,}66 s^{-1})^2 = 7{,}8952\,m\,s^{-2}$$

Für die Amplitude eines Feder-Masse-Systems mit äußerer Erregung gilt:

$$A = x_0(\omega_a, \omega_0, \beta) = \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2}}$$

Nach Aufgabenstellung soll die Amplitude des schwingenden Systems aus Instrument und Betonplatte nur noch $x_{0,B} = 0{,}02\,mm$ betragen.

Es muss gelten: $$x_{0,B} = \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2}},$$

wobei gelten soll: $\beta = 0{,}1 \cdot \omega_0$.

Es folgt: $$x_{0,B} = \frac{f_a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 + 4 \cdot 0{,}01 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_a^2}}$$

Ziel: Aus dieser Gleichung muss die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 für das System aus Instrument und Betonplatte ermittelt werden.

Es gilt: $$x_{0,B}^2 = \frac{f_a^2}{\omega_0^4 - 2\,\omega_0^2\omega_a^2 + \omega_a^4 + 0{,}04\,\omega_0^2\omega_a^2}$$

$$\omega_0^4 - 2 \cdot 0{,}98 \cdot \omega_0^2\omega_a^2 + \omega_a^4 = \frac{f_a^2}{x_{0,B}^2}$$

$$\omega_0^4 - 2 \cdot 0{,}98 \cdot \omega_0^2\omega_a^2 + \left(0{,}98 \cdot \omega_a^2\right)^2 = \frac{f_a^2}{x_{0,B}^2} - \omega_a^4 + 0{,}9604 \cdot \omega_a^4$$

$$\left(\omega_0^2 - 0{,}98 \cdot \omega_a^2\right)^2 = \frac{f_a^2}{x_{0,B}^2} - 0{,}0396 \cdot \omega_a^4$$

$$\omega_0^2 = 0{,}98 \cdot \omega_a^2 \pm \sqrt{\frac{f_a^2}{x_{0,B}^2} - 0{,}0396 \cdot \omega_a^4}$$

$$\omega_0^2 = 0{,}98 \cdot \left(125{,}66 s^{-1}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{\left(7{,}8952 ms^{-2}\right)^2}{\left(0{,}00002\,m\right)^2} - 0{,}0396 \cdot \left(125{,}66 s^{-1}\right)^4}$$

$$\omega_0^2 = 15\,475 s^{-2} \pm 394747\, s^{-2}$$

Ergebnis für pos. Wurzel: $\omega_{0,+}^2 = 410\,222\, s^{-2}$

Ergebnis für neg. Wurzel: $\omega_{0,-}^2 = -379\,272\, s^{-2}$ scheidet aus.

Ergebnis für ω_0 $\quad \omega_0 = \sqrt{410\,222\, s^{-2}} = 640\, s^{-1}$

Die Masse des schwingenden Systems setzt sich aus des Instruments und der Betonplatte zusammen: $m_{ges} = m_{Instr} + m_B$

Die vier Federn sind parallel angeordnet, deshalb addieren sich die Federkonstanten.

$$D_{ges} = 4 \cdot D = 4 \cdot 25\, kN/mm = 100\, kN/mm$$

(*Bem. Im Klausurblatt vom 16.06.11 hat sich ein Tippfehler eingeschlichen. Dort stand* $D = 25\, kN/m$, *richtig ist aber* $D = 25\, kN/mm$. *Dies beeinflusst den Lösungsweg nicht, wohl aber die Ergebnisse. Dies wurde bei der Klausurbewertung natürlich entsprechend berücksichtigt.)*

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_{ges}}} = \sqrt{\frac{D}{m_{Instr} + m_B}} = \sqrt{\frac{100\, kN/mm}{4\, kg + m_B}}$$

Für die gesuchte Masse der Betonplatte gilt:

$$m_B = \frac{D}{\omega_0^2} - m_{Instr}$$

$$m_B = \frac{100\, kN/mm}{410\,222 s^{-2}} - m_{Instr} = \frac{10^8\, kg\, m\, s^{-2}/m}{410\,222 s^{-2}} - 4\, kg$$

Ergebnis: $m_B = 240\, kg$